Глава 2. Канонические преобразования уравнений Гамильтона

§1. Канонические преобразования

1°. Преобразования переменных. Матрица Якоби

Рассмотрим гамильтонову систему дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме

$$\frac{dz}{dt} = J\mathrm{H}_z^*. \tag{2.1.1}$$

Здесь z — $2n$-мерный вектор-столбец, $z^* = (q^*, p^*)$, $q^* = (q_1, ..., q_n)$ $p^* = (p_1, ..., p_n)$,

$$J = \begin{Vmatrix} O_n & E_n \\ -E_n & O_n \end{Vmatrix}, \tag{2.1.2}$$

O_n и E_n — нулевая и единичная матрицы n-го порядка, $\mathrm{H} = \mathrm{H}_z(z,t)$ — функция Гамильтона, $\mathrm{H}_z(z,t)$ — матрица-строка размерности $(1 \times 2n)$,

$$\mathrm{H}_z = \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial z} = \left\| \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_{2n}} \right\|,$$

или в другой форме

$$\mathrm{H}_z = \left\| \mathrm{H}_q, \mathrm{H}_p \right\|,$$

где $\mathrm{H}_q = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q}$ и $\mathrm{H}_p = \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}$ — матрицы-строки размерности $(1 \times n)$ каждая,

$$\mathrm{H}_q = \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial q} = \left\| \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial q_n} \right\|,$$

$$\mathrm{H}_p = \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial p} = \left\| \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial p_n} \right\|.$$

Матрица J имеет размерность $(2n \times 2n)$. Она обладает следующими свойствами, которые легко проверяются:

$$J^* = J^{-1} = -J, \quad J^2 = -E_{2n}, \quad \det J = 1. \tag{2.1.3}$$

Построение решений системы уравнений (2.1.1) часто оказывается очень сложным делом. Поэтому надо искать какие-то пути, упрощающие исследование движения.

Например, в §6 главы 1 показано, что наличие одной циклической координаты позволяет понизить порядок системы (2.1.1) на две единицы. Это указывает на то, что удачный выбор обобщенных координат может существенно упростить уравнения движения и, тем самым, облегчить его исследование.

Будем рассматривать две системы переменных: переменные $z^* = (q^*, p^*)$, называемые «старыми», и переменные $\zeta^* = (Q^*, P^*)$, называемые «новыми». Здесь

$$Q^* = (Q_1, ..., Q_n), \qquad P^* = (P_1, ..., P_n),$$

Q_j, $j = \overline{1,n}$ — компоненты вектора-столбца Q, P_j, $j = \overline{1,n}$ — компоненты вектора-столбца P.

Пусть новые переменные Q_j, P_j, $j = \overline{1,n}$ связаны со «старыми» переменными функциональными зависимостями

$$\begin{cases} Q_j = Q_j(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t) = Q_j(z,t), \\ P_j = P_j(q_1, ..., q_n, p_1, ..., p_n, t) = P_j(z,t), \qquad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Эти зависимости называются преобразованием старых переменных в новые.

Если ввести обозначения

$$\zeta^* = (Q^*, P^*), \qquad Q^* = (Q_1,...,Q_n), \qquad P^* = (P_1,...,P_n),$$

$$Q^*(z,t) = (Q_1(z,t),...,Q_n(z,t)), \qquad P^*(z,t) = (P_1(z,t),...,P_n(z,t)),$$

$$\zeta^*(z,t) = (Q^*(z,t), P^*(z,t)),$$

то (2.1.4) примут вид:

$$\zeta = \zeta(z,t). \tag{2.1.5}$$

Будем считать, что функции $\zeta(z,t)$ заданы и дважды непрерывно дифференцируемы по z и t при всех их значениях, где определены правые части уравнений (2.1.1).

Соотношение (2.1.5), так же, как и (2.1.4), называется преобразованием старых переменных в новые, оно описывает эти преобразования в векторной форме. Время в (2.1.5) и (2.1.4) рассматривается как параметр.

Предполагается, что соотношения (2.1.4) и (2.1.5) разрешимы относительно старых переменных:

$$q_s = q_s(Q,P,t), \qquad p_s = p_s(Q,P,t), \qquad s = \overline{1,n}, \tag{2.1.6}$$

или в векторной форме

$$z = z(\zeta,t). \tag{2.1.7}$$

Вектор-функции

$$q^*(\zeta,t) = (q_1(Q,P,t), \ldots, q_n(Q,P,t)),$$

$$p^*(\zeta,t) = (p_1(Q,P,t),, \ldots, p_n(Q,P,t)),$$

$$z^*(\zeta,t) = (q^*(\zeta,t), p^*(\zeta,t))$$

также дважды непрерывно дифференцируемы по переменным Q,P,t.

Соотношения (2.1.6), (2.1.7) называется преобразованием «новых» переменных в «старые». Чтобы различать преобразования (2.1.4) – (2.1.5) и (2.1.6) – (2.1.7), часто преобразования (2.1.4) – (2.1.5) называют прямым, а (2.1.6) – (2.1.7) — обратным.

Введем обозначения

$$K_z(z,t) \overset{def}{=} \frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial z} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial \zeta_1(z,t)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta_1(z,t)}{\partial z_k}, \ldots, \frac{\partial \zeta_1(z,t)}{\partial z_{2n}} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{\partial \zeta_i(z,t)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta_i(z,t)}{\partial z_k}, \ldots, \frac{\partial \zeta_i(z,t)}{\partial z_{2n}} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \frac{\partial \zeta_{2n}(z,t)}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta_{2n}(z,t)}{\partial z_k}, \ldots, \frac{\partial \zeta_{2n}(z,t)}{\partial z_{2n}} \end{Vmatrix}. \tag{2.1.8}$$

Матрица $K_z(z,t)$ называется ***матрицей Якоби*** преобразования (2.1.5). Она имеет размерность $(2n \times 2n)$. Аналогично вводится матрица Якоби $K_\zeta(\zeta,t)$ обратного преобразования (2.1.7).

$$K_\zeta(\zeta,t)\overset{def}{=}\frac{\partial z(\zeta,t)}{\partial\zeta}=\begin{Vmatrix}\dfrac{\partial z_1(\zeta,t)}{\partial\zeta_1}, & \dots, & \dfrac{\partial z_1(\zeta,t)}{\partial\zeta_{2n}}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial z_j(\zeta,t)}{\partial\zeta_1}, & \dots, & \dfrac{\partial z_j(\zeta,t)}{\partial\zeta_{2n}}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial z_{2n}(\zeta,t)}{\partial\zeta_1}, & \dots, & \dfrac{\partial z_{2n}(\zeta,t)}{\partial\zeta_{2n}}\end{Vmatrix}. \tag{2.1.9}$$

Отметим важные тождественные соотношения, которые существуют между матрицами Якоби прямого и обратного преобразования, а также выводы, которые можно сделать из них.

Справедливы тождества:

$$K_z(z(\zeta,t),t)K_\zeta(\zeta,t)\equiv E_{2n},$$
$$K_\zeta(\zeta(z,t),t)K_z(z,t)\equiv E_{2n}.$$

Они устанавливаются на основе следующих свойств функций $\zeta(z,t)$ и $z(\zeta,t)$:

$$\zeta\equiv\zeta(z(\zeta,t),t),\qquad z\equiv z(\zeta(z,t),t).$$

Дифференцируя по ζ обе части первого из этих тождеств и по z — второго, придем к сделанному выше утверждению. Из данного утверждения вытекает

$$\begin{cases}K_\zeta(\zeta,t)\equiv K_z^{-1}(z(\zeta,t),t),\\ K_z(z,t)\equiv K_\zeta^{-1}(\zeta(z,t),t).\end{cases} \tag{2.1.10}$$

Из (2.1.10) следуют два заключения.

1. Матрица Якоби $K_\zeta(\zeta,t)$ обратного преобразования совпадает с обратной матрицей Якоби $K_z^{-1}(z(\zeta,t),t)$ прямого преобразования, выраженной в новых переменных ζ.
2. Матрица Якоби $K_z(z,t)$ прямого преобразования совпадает с обратной матрицей Якоби $K_\zeta^{-1}(\zeta(z,t),t)$ обратного преобразования, выраженной в старых переменных z.

Может случиться, что в новых переменных система уравнений (2.1.1) будет иметь более простую структуру, и ее интегрирование будет проще интегрирования исходной системы. В новых переменных уравнения движения могут уже не быть гамильтоновыми. Будем далее рассматривать только такие преобразования (2.1.4), которые не нарушают гамильтоновой формы уравнений движения. Это будут *канонические преобразования*. Ниже дадим определение канонических преобразований, получим критерии каноничности и укажем способ нахождения функции Гамильтона, отвечающей преобразованным уравнениям.

Практический смысл канонических преобразований состоит в упрощении уравнений движения, в выборе таких новых координат в фазовом пространстве, которые более удобны для решения задачи о движении системы, нежели исходные старые координаты. Метод канонических преобразований является широко распространенным и эффективным методом исследования гамильтоновых систем.

2º. Понятие и свойства канонических преобразований

Определение 1.

Преобразование (2.1.5) *называется **каноническим**, если существует такое постоянное число* $c \neq 0$, *что матрица Якоби* (2.1.8) *удовлетворяет тождеству*

$$K_z^*(z,t) J K_z(z,t) \equiv cJ\,, \tag{2.1.11}$$

где матрица J *определена равенством* (2.1.2).

Определение 2.

Число c *называется **валентностью канонического преобразования**; если* $c=1$, *то преобразование* (2.1.5) *называется **унивалентным**.*

Определение 3.

Матрица $K_z(z,t)$, *удовлетворяющая тождеству* (2.1.11) *при* $c=1$ *называется **симплектической.** Если в тождестве* (2.1.11) $c \neq 1$, *то матрица* $K_z(z,t)$ *называется **обобщенно симплектической** (с валентностью* c*).*

Отметим основные свойства канонических преобразований, вытекающих из определений.

Свойство 1. *Матрица Якоби канонического преобразования* (2.1.5) *является невырожденной.*

Действительно, из (2.1.11) вытекает

$$\det K_z^*(z,t) \cdot \det J \cdot \det K_z(z,t) \equiv c^{2n} \det J\,.$$

Поскольку $\det K_z^*(z,t) = \det K_z(z,t)$, а из (2.1.3) следует $\det J = 1$, то будем иметь

$$\det K_z(z,t) = \pm c^n \neq 0\,.$$

Свойство 2. Пусть выполнены последовательно два канонических преобразования $\zeta^{(1)} = \zeta^{(1)}(z,t)$ с валентностью c_1 и $\zeta^{(2)} = \zeta^{(2)}(\zeta^{(1)},t)$ с валентностью c_2. Справедливо утверждение.

Результирующее преобразование

$$\zeta = \zeta(z,t) \equiv \zeta^{(2)}(\zeta^{(1)}(z,t),t)$$

тоже будет каноническим, и его валентность равна произведению $c_1 c_2$.

Действительно, по определению 1 имеем

$$K_z^{(1)*}(z,t) J K_z^{(1)}(z,t) \equiv c_1 J\,, \qquad K_{\zeta^{(1)}}^{(2)*}(\zeta^{(1)},t) J K_{\zeta^{(1)}}^{(2)}(\zeta^{(1)},t) \equiv c_2 J\,.$$

В этих тождествах $K_z^{(1)}(z,t)$ и $K_{\zeta^{(1)}}^{(2)}(\zeta^{(1)},t)$ суть матрицы Якоби последовательных преобразований

$$K_z^{(1)*}(z,t) = \frac{\partial \zeta^{(1)}(z,t)}{\partial z}\,, \qquad K_{\zeta^{(1)}}^{(2)*}(\zeta^{(1)},t) = \frac{\partial \zeta^{(2)}(\zeta^{(1)},t)}{\partial \zeta^{(1)}}\,.$$

Обозначим $K_z(z,t)$ матрицу Якоби результирующего преобразования

$$K_z(z,t) \stackrel{def}{=} \frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial z}\,.$$

Функция $\zeta(z,t)$ является суперпозицией функций $\zeta^{(2)}(\zeta^{(1)},t)$ и $\zeta^{(1)}(z,t)$. Поэтому по правилу дифференцирования суперпозиции функций будем иметь:

$$K_z(z,t) = \frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}[\zeta^{(2)}(\zeta^{(1)}(z,t),t)] = \left.\frac{\partial\zeta^{(2)}(\zeta^{(1)},t)}{\partial\zeta^{(1)}}\right|_{\zeta^{(1)}=\zeta^{(1)}(z,t)} \cdot \frac{\partial\zeta^{(1)}(z,t)}{\partial z} =$$
$$= K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)},t)\Big|_{\zeta^{(1)}=\zeta^{(1)}(z,t)} \cdot K^{(1)}_z(z,t) = K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)}(z,t),t)\cdot K^{(1)}_z(z,t).$$

В данном выражении оператор $\left.\dfrac{\partial\zeta^{(2)}(\zeta^{(1)},t)}{\partial\zeta^{(1)}}\right|_{\zeta^{(1)}=\zeta^{(1)}(z,t)}$ обозначает следующие действия:

1) на первом шаге вычисляется производная по вектору $\zeta^{(1)}$ от вектор-функции $\zeta^{(2)}(\zeta^{(1)},t)$;
2) на втором шаге в этот результат, который получили на первом шаге, делается подстановка
$$\zeta^{(1)} = \zeta^{(1)}(z,t)$$
(переход от «старых» переменных к «новым» переменным $\zeta^{(1)}$).

Поскольку на первом шаге построили функцию Якоби $K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)},t)$, то действие $K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)},t)\Big|_{\zeta^{(1)}=\zeta^{(1)}(z,t)}$ соответствует действию замены переменных $\zeta^{(1)}$ на $\zeta^{(1)}(z,t)$.

Таким образом, получили, что матрица Якоби $K_z(z,t)$ результирующего преобразования «старых» переменных z в «новые» переменные $\zeta^{(2)}$ равна произведению матрицы Якоби $K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)},t)$ последнего преобразования, выраженной в зависимости от «старых» переменных z, на матрицу Якоби $K^{(1)}_z(z,t)$ первого преобразования.

Остается проверить, согласно определению 1, будет ли выполняться тождество (2.1.11) для матрицы $K_z(z,t)$. Запишем и преобразуем левую часть тождества (2.1.11) для матрицы $K_z(z,t)$.

$$\begin{aligned} &K^*_z(z,t)JK_z(z,t) = \left(K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)}(z,t),t)\cdot K^{(1)}_z(z,t)\right)^* J\left(K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)}(z,t),t)\cdot K^{(1)}_z(z,t)\right) = \\ &= K^{(1)*}_z(z,t)\underline{K^{(2)*}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)}(z,t),t)\,J\,K^{(2)}_{\zeta^{(1)}}(\zeta^{(1)}(z,t),t)}K^{(1)}_z(z,t) = K^{(1)*}_z(z,t)c_2JK^{(1)}_z(z,t) = \\ &= c_2\underline{\underline{K^{(1)*}_z(z,t)\,J\,K^{(1)}_z(z,t)}} \equiv c_1c_2J. \end{aligned} \qquad (2.1.12)$$

Подчеркнутые одной чертой произведения матриц удовлетворяют тождеству (2.1.11) при $c = c_2$, так как второе преобразование — каноническое с валентностью c_2.

Произведения матриц, подчеркнутые двумя чертами, соответствуют тождеству (2.1.11) для первого канонического преобразования с валентностью c_1. Таким образом, второе свойство доказано.

Свойство 3. *Если прямое преобразование* (2.1.5) *является каноническим преобразованием с валентностью* c*, то его обратное преобразование* (2.1.7) *также будет каноническим, но с валентностью* c^{-1}.

Действительно, запишем тождество (2.1.11) для матрицы Якоби $K_z(z,t)$ прямого преобразования
$$K^*_z(z,t)JK_z(z,t) \equiv cJ\,.$$
Очевидно, оно справедливо и для обратных матриц левой и правой части:
$$(K^*_z(z,t)\,JK_z(z,t))^{-1} \equiv (cJ)^{-1} \quad \text{или} \quad K^{-1}_z(z,t)\,J^{-1}K^{*-1}_z(z,t) \equiv c^{-1}J^{-1}.$$
Транспонируем матрицы, стоящие в левой и правой части последнего тождества, и учтем, что $J^{*-1} = -J$.

$$K_z^{*-1}(z,t)\,JK_z^{-1}(z,t) \equiv c^{-1}J\,.$$

Заменим в аргументах матрицы $K_z^{*-1}(z,t)$ и $K_z^{-1}(z,t)$ «старые» переменные z на «новые» ζ в соответствии с преобразованием (2.1.7) $z = z(\zeta,t)$. Получим

$$K_z^{*-1}(z(\zeta,t),t)\,JK_z^{-1}(z(\zeta,t),t) \equiv c^{-1}J\,.$$

Воспользуемся формулой (2.1.10) связи матрицы Якоби $K_\zeta(\zeta,t)$ обратного преобразования с матрицей $K_z^{-1}(z(\zeta,t),t)$, согласно которой эти матрицы тождественно равны. Замена матрицы $K_z^{-1}(z(\zeta,t),t)$ на $K_\zeta(\zeta,t)$ в полученном выше тождестве дает

$$K_\zeta^{*-1}(\zeta,t)\,JK_\zeta^{-1}(\zeta,t) \equiv c^{-1}J\,.$$

Согласно определению 1, это означает, что преобразование (2.1.7) является каноническим, и его валентность равна c^{-1}.

Свойство 4. *Тождественные преобразования*

$$\zeta = z \qquad и \qquad z = \zeta\,.$$

являются каноническими унивалентными преобразованиями.

Замечание.

Из доказанных свойств канонических преобразований вытекает, что совокупность всех канонических преобразований образует группу. Унивалентные преобразования составляют ее подгруппу.

§2. Критерии каноничности преобразований

1°. Критерий каноничности, основанный на скобках Лагранжа

В §1 понятие канонического преобразования дано определением 1. В нем указано тождество (2.1.11), которому должна удовлетворять матрица Якоби прямого преобразования. На его основе установлены другие свойства канонических преобразований.

Тождество (2.1.11) дает конструктивный метод, позволяющий проверить, будет преобразование (2.1.5) каноническим или нет.

В этом параграфе приводятся другие критерии каноничности. Они эквивалентны тождеству (2.1.11), и каждый из них может быть использован в качестве определения канонического преобразования.

В первом пункте установим критерий каноничности, основанный на скобках Лагранжа. Для этого введем понятия скобки Лагранжа и матрицы Лагранжа. На базе этих понятий выведем и докажем критерий каноничности преобразования (2.1.5), согласованный с определением 1 из §1.

1.1. Скобки Лагранжа

Пусть имеем n упорядоченных пар функций

$$(\varphi_j(\alpha,\beta,t),\ \psi_j(\alpha,\beta,t)), \qquad j = \overline{1,n}\,.$$

В общем случае аргументы α и β могут быть векторами.

$$\alpha^* = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \qquad \beta^* = (\beta_1,\ldots,\beta_n)\,.$$

Время t можно считать параметром или тоже переменной величиной.

Функции $\varphi_j(\alpha,\beta,t), \psi_j(\alpha,\beta,t)$, $j = \overline{1,n}$, стоящие в упорядоченных парах, будем считать дважды непрерывно дифференцируемыми по совокупности переменных α,β,t. Фиксируем два аргумента среди переменных α,β,t. Изменим их обозначения на x и y, чтобы отличать от всех остальных аргументов.

Определение 1.

Скобкой Лагранжа *по заданной системе функций называется функция*

$$[x,y]=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}\right). \tag{2.2.1}$$

Здесь x *и* y *— выделенные аргументы, по которым строится скобка Лагранжа*.

Ранее, в §7 главы 1 было дано понятие *скобки Пуассона*. Скобка Лагранжа, как и скобка Пуассона, строится на семействе упорядоченных пар функций, зависящих от многих переменных.

Отличие скобки Пуассона от скобки Лагранжа в том, что ***скобка Пуассона*** строится только по одной из упорядоченных пар функций $(\varphi_j(\alpha,\beta,t),\psi_j(\alpha,\beta,t))$ (j — фиксированный номер пары) из заданной системы функций.

При построении ***скобки Пуассона*** учитываются все упорядоченные пары аргументов (α_i,β_i), $i=\overline{1,n}$, а время t рассматривается только в качестве параметра и не включается в эти пары.

При построении одной ***скобки Лагранжа*** фиксируется только одна пара аргументов, а сама скобка строится по всем упорядоченным парам функций, включенных в семейство. При этом в фиксируемую пару аргументов вместо одного из них может быть включено и время t в тех случаях, когда оно рассматривается не как параметр, а как переменная величина.

Для обозначения ***скобки Пуассона*** применяются круглые скобки, содержащие внутри те две функции из семейства, по которым строится эта скобка.

Для обозначения ***скобки Лагранжа*** применяются квадратные скобки, содержащие внутри те два аргумента, по которым вычисляются частные производные от всех пар функций, включенных в семейство.

Отметим следующие свойства скобок Лагранжа, которые легко проверяются на основе определения 1.

Свойство 1. $[x,x]=[y,y]\equiv 0$.

Свойство 2. $[x,y]=-[y,x]$.

Как и в скобках Пуассона, при вычислении скобок Лагранжа строго согласован порядок следования функций (функция ψ_j следует за φ_j) и порядок следования в (2.2.1) производных по x и y.

Докажем еще одно важное свойство скобок Лагранжа.

Свойство 3.

Отметим три независимых переменных среди аргументов α,β,t системы функций φ_j, ψ_j, $j=\overline{1,n}$. Обозначим их x,y,z.

Справедливо тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}[y,z]+\frac{\partial}{\partial y}[z,x]+\frac{\partial}{\partial z}[x,y]\equiv 0. \tag{2.2.2}$$

Доказательство.

Раскроем по формуле (2.2.1) скобки Лагранжа в левой части (2.2.2):

$$\frac{\partial}{\partial x}[y,z]=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}=\sum_{j=1}^{n}(A_{j1}+A_{j2}),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[z,x]=\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}=\sum_{j=1}^{n}(A_{j3}+A_{j4}),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}[x,y]=\frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n}(A_{j5}+A_{j6}),$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}&A_{j1}=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_{jy}\psi_{jz});\qquad A_{j2}=-\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_{jz}\psi_{jy});\qquad A_{j3}=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_{jz}\psi_{jx});\\&A_{j4}=-\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_{jx}\psi_{jz});\qquad A_{j5}=\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_{jx}\psi_{jy});\qquad A_{j6}=-\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_{jy}\psi_{jx}),\qquad j=\overline{1,n}.\end{aligned}\tag{2.2.3}$$

В функциях $A_{ji},\ i=\overline{1,6}$ под знаком частных производных в скобках стоят произведения следующих функций:

$$\begin{aligned}&\varphi_{jx}=\frac{\partial\varphi_j}{\partial x},\qquad \varphi_{jy}=\frac{\partial\varphi_j}{\partial y},\qquad \varphi_{jz}=\frac{\partial\varphi_j}{\partial z},\\&\psi_{jx}=\frac{\partial\psi_j}{\partial x},\qquad \psi_{jy}=\frac{\partial\psi_j}{\partial y},\qquad \psi_{jz}=\frac{\partial\psi_j}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.2.4}$$

Тождество (2.2.2) будет доказано, если покажем, что

$$\sum_{i=1}^{6}A_{ji}\equiv 0\,.\tag{2.2.5}$$

В левой части (2.2.5) сгруппируем слагаемые A_{ji} по парам $A_{j1}+A_{j4}$, $A_{j2}+A_{j5}$, $A_{j3}+A_{j6}$, подставим их выражения из (2.2.3) и вычислим частные производные по x,y,z от произведений, указанных в них. Выпишем отдельно каждую сгруппированную пару и подставим в нее (2.2.3):

$$(A_{j1}+A_{j4})=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_{jy}\psi_{jz})-\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_{jx}\psi_{jz})=\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{jy}-\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{jx}\right)\psi_{jz}+(B_{j1}+B_{j2})\,,\tag{2.2.6}$$

$$(A_{j2}+A_{j5})=-\frac{\partial}{\partial x}(\varphi_{jz}\psi_{jy})+\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_{jx}\psi_{jy})=\left(-\frac{\partial}{\partial x}\varphi_{jz}+\frac{\partial}{\partial z}\varphi_{jx}\right)\psi_{jy}+(B_{j3}+B_{j4})\,,\tag{2.2.7}$$

$$(A_{j3}+A_{j6})=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_{jz}\psi_{jx})-\frac{\partial}{\partial z}(\varphi_{jy}\psi_{jx})=\left(\frac{\partial}{\partial y}\varphi_{jz}-\frac{\partial}{\partial z}\varphi_{jy}\right)\psi_{jx}+(B_{j5}+B_{j6})\,.\tag{2.2.8}$$

Здесь

$$\begin{aligned}&B_{j1}=\varphi_{jy}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{jz}\,,\qquad B_{j2}=-\varphi_{jx}\frac{\partial}{\partial y}\psi_{jz}\,,\qquad B_{j3}=-\varphi_{jz}\frac{\partial}{\partial x}\psi_{jy}\,,\\&B_{j4}=\varphi_{jx}\frac{\partial}{\partial z}\psi_{jy}\,,\qquad B_{j5}=\varphi_{jz}\frac{\partial}{\partial y}\psi_{jx}\,,\qquad B_{j6}=-\varphi_{jy}\frac{\partial}{\partial z}\psi_{jx}\,.\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

В соотношениях (2.2.6) – (2.2.8) первые слагаемые тождественно равны нулю, так как равны нулю множители при $\psi_{jz},\psi_{jy},\psi_{jx}$. Эти множители представляют собой разности вторых смешанных производных от функций φ_j по переменным: x,y — в (2.2.6), x,z — в (2.2.7), y,z — в (2.2.8), соответственно. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{6} A_{ji} = (B_{j1} + B_{j6}) + (B_{j2} + B_{j4}) + (B_{j3} + B_{j5}).$$

Из соотношений (2.2.9) видим, что

$$B_{j1} + B_{j6} = \varphi_{jy}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_{jz} - \frac{\partial}{\partial z}\psi_{jx}\right) \equiv 0,$$

так как в скобках стоит разность вторых смешанных производных по x, z от функции ψ_j. Эта разность тождественно равна нулю, в силу непрерывности смешанных производных.

Аналогично устанавливается, что $B_{j2} + B_{j4} \equiv 0$ и $B_{j3} + B_{j5} \equiv 0$. Тождество (2.2.5) доказано, а вместе с ним доказано и тождество (2.2.2).

Замечание.

Тождество (2.2.2) выполняется при выборе любых трех независимых аргументов функций $\varphi_j(\alpha,\beta,t), \psi_j(\alpha,\beta,t)$. В качестве одного из этих трех аргументов может выступать и время t.

Свойство 4.

Возьмем в качестве функций φ_j и ψ_j, $j = \overline{1,n}$, соответственно, функции $Q_j(q,p,t)$ и $P_j(q,p,t)$, $j = \overline{1,n}$, преобразования (2.1.4) переменных q и p, где

$$q^* = (q_1,\dots,q_n), \quad p^* = (p_1,\dots,p_n).$$

Пусть (2.1.4) является тождественным преобразованием:

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

*Вычислим **скобки Лагранжа**, построенные на такой системе функций.*

Полагаем в (2.2.1) $\varphi_j = Q_j = q_j$, $\psi_j = P_j = p_j$, и последовательно для всех $i,k = \overline{1,n}$ следующие варианты пары переменных x и y:

$$1)\ x = q_i,\ y = q_k, \qquad 2)\ x = p_i,\ y = p_k, \qquad 3)\ x = q_i,\ y = p_k.$$

Получим соответствующие им скобки Лагранжа:

$$1)\ [q_i, q_k] \equiv 0, \quad 2)\ [p_i, p_k] \equiv 0, \quad 3)\ [q_i, p_k] = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,n}. \qquad (2.2.10)$$

Здесь δ_{ik} — символ Кронекера; $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$.

*Такие скобки называются **фундаментальными скобками Лагранжа.***

1.2. Матрица Лагранжа прямого преобразования и ее связь с матрицей Якоби

Обратимся к прямому преобразованию (2.1.4), (2.1.5) переменных q, p. Будем смотреть на правые части преобразования (2.1.4), как на задание системы функций $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$ в виде n упорядоченных пар $Q_j(q,p,t)$, $P_j(q,p,t)$, $j = \overline{1,n}$, по которым строятся скобки Лагранжа $[q_i,q_k], [q_i,p_k], [p_i,q_k], [p_i,p_k]$ для всех значений $i,k = \overline{1,n}$.

Введем матрицу $\Lambda(q,p,t)$ размерности $(2n \times 2n)$, имеющую блочную структуру следующего вида:

$$\Lambda(q,p,t) = \left\| \begin{matrix} \Lambda_{11}(q,p,t); & \Lambda_{12}(q,p,t) \\ \Lambda_{21}(q,p,t); & \Lambda_{22}(q,p,t) \end{matrix} \right\|. \qquad (2.2.11)$$

Ее блоки Λ_{rs}, $r,s=1,2$, являются матрицами размерности $(n\times n)$ каждый. Элементы их представляют собой скобки Лагранжа, построенные по указанной выше системе упорядоченных пар функций $Q_j(q,p,t), P_j(q,p,t)$:

$$\Lambda_{11}=\begin{Vmatrix}[q_1,q_1], \cdots, [q_1,q_k], \cdots, [q_1,q_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_i,q_1], \cdots, [q_i,q_k], \cdots, [q_i,q_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_n,q_1], \cdots, [q_n,q_k], \cdots, [q_n,q_n]\end{Vmatrix}; \quad \Lambda_{12}=\begin{Vmatrix}[q_1,p_1], \cdots, [q_1,p_k], \cdots, [q_1,p_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_i,p_1], \cdots, [q_i,p_k], \cdots, [q_i,p_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_n,p_1], \cdots, [q_n,p_k], \cdots, [q_n,p_n]\end{Vmatrix} \qquad (2.2.12)$$

$$\Lambda_{21}=\begin{Vmatrix}[p_1,q_1], \cdots, [p_1,q_k], \cdots, [p_1,q_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [p_i,q_1], \cdots, [p_i,q_k], \cdots, [p_i,q_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [p_n,q_1], \cdots, [p_n,q_k], \cdots, [p_n,q_n]\end{Vmatrix}; \quad \Lambda_{22}=\begin{Vmatrix}[p_1,p_1], \cdots, [p_1,p_k], \cdots, [p_1,p_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [p_i,p_1], \cdots, [p_i,p_k], \cdots, [p_i,p_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [p_n,p_1], \cdots, [p_n,p_k], \cdots, [p_n,p_n]\end{Vmatrix} \qquad (2.2.13)$$

Определение 2.

Матрица $\Lambda(q,p,t)$, *построенная по формулам* (2.2.11) – (2.2.13) *по преобразованию* (2.1.4) – (2.1.5), *называется* ***матрицей Лагранжа*** *данного преобразования.*

В определении 2 не предполагается, что преобразование, по которому строится матрица Лагранжа, есть каноническое. Она может быть построена по формулам (2.2.11) – (2.2.13) для любого преобразования, в том числе и для канонического.

Легко показать, что матрица Λ является кососимметрической, т.е. справедливо равенство

$$\Lambda^* = -\Lambda\,. \qquad (2.2.14)$$

Действительно, соотношение (2.2.14) с учетом (2.2.11) – (2.2.13) принимает вид:

$$\Lambda^*=\begin{Vmatrix}\Lambda_{11}^*, & \Lambda_{21}^*\\ \Lambda_{12}^*, & \Lambda_{22}^*\end{Vmatrix} = -\begin{Vmatrix}\Lambda_{11}, & \Lambda_{12}\\ \Lambda_{21}, & \Lambda_{22}\end{Vmatrix} = -\Lambda\,.$$

Здесь воспользовались равенствами:

$$\Lambda_{11}^* = -\Lambda_{11}, \quad \Lambda_{22}^* = -\Lambda_{22}, \quad \Lambda_{21}^* = -\Lambda_{12}, \quad \Lambda_{12}^* = -\Lambda_{21}\,. \qquad (2.2.15)$$

Докажем их. Очевидно, транспонируя матрицу Λ_{11}, задаваемую формулами (2.2.12), получим

$$(\Lambda_{11})^*=\begin{Vmatrix}[q_1,q_1], \cdots, [q_1,q_k], \cdots, [q_1,q_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_k,q_i], \cdots, [q_k,q_k], \cdots, [q_k,q_n]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_n,q_1], \cdots, [q_n,q_k], \cdots, [q_n,q_n]\end{Vmatrix}^* = \begin{Vmatrix}[q_1,q_1], \cdots, [q_k,q_1], \cdots, [q_n,q_1]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_1,q_k], \cdots, [q_k,q_k], \cdots, [q_n,q_k]\\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots\\ [q_1,q_n], \cdots, [q_k,q_n], \cdots, [q_n,q_n]\end{Vmatrix}.$$

Если в матрице, стоящей в правой части равенства, во всех элементах в скобках Лагранжа переставим местами аргументы, каждая скобка приобретет знак «минус».

Общий множитель «-1» вынесем за знак матрицы. В результате такой операции правая часть равенства примет вид матрицы $(-\Lambda_{11})$. Такими же действиями доказываются и остальные равенства (2.2.15).

Установим связь матрицы Якоби заданного прямого преобразования с его матрицей Лагранжа.

Матрицу Якоби преобразования (2.1.5)

$$K_z(z,t) = \frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial z}$$

будем представлять в виде блочной матрицы, зависящей от переменных q, p и параметра t. Ее блоки строятся как частные производные по переменным q, p от вектор-функций $Q(q,p,t)$ и $P(q,p,t)$ размерности $(n \times 1)$, задающих преобразование (2.1.4):

$$K_z = \frac{\partial}{\partial z}\begin{Vmatrix} Q(z,t) \\ P(z,t) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q(z,t)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial P(z,t)}{\partial z} \end{Vmatrix}. \tag{2.2.16}$$

Перейдем в (2.2.16) от переменных z к переменным q, p. Матрица Якоби K_z в зависимости от переменных q, p будет иметь следующую блочную структуру

$$K_z = K_z(q,p,t) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q}; & \dfrac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P(q,p,t)}{\partial q}; & \dfrac{\partial P(q,p,t)}{\partial p} \end{Vmatrix}. \tag{2.2.17}$$

Лемма 1.

Справедливо тождество

$$\Lambda(q,p,t) \equiv K_z^*(q,p,t)\, J K_z(q,p,t), \tag{2.2.18}$$

где J *— матрица, определяемая по формуле* (2.1.2).

Доказательство.

Тождество доказывается непосредственным вычислением его правой части и сравнением результатов с матрицей Лагранжа.

Определим произведение матриц (2.1.2) и (2.2.17)

$$JK_z(q,p,t) = \begin{Vmatrix} O_n; \; E_n \\ -E_n; \; O_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q}; & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q}; & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial q}; & \dfrac{\partial P}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial Q}{\partial q}; & -\dfrac{\partial Q}{\partial p} \end{Vmatrix}.$$

Умножая результат на $K_z^*(q,p,t)$ слева, придем к выражению правой части тождества (2.2.18). Оно будет иметь вид блочной матрицы с четырьмя блоками

$$K_z^*(q,p,t)\, JK_z(q,p,t) = \begin{Vmatrix} R_{11}, & R_{12} \\ R_{21}, & R_{22} \end{Vmatrix},$$

где

$$R_{11} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^* \frac{\partial P}{\partial q} - \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial q}, \tag{2.2.19}$$

$$R_{12} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^* \frac{\partial P}{\partial p} - \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial p}, \tag{2.2.20}$$

$$R_{21} = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^* \frac{\partial P}{\partial q} - \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial q}, \tag{2.2.21}$$

$$R_{22} = \left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^* \frac{\partial P}{\partial p} - \left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial p}. \tag{2.2.22}$$

Покажем, что

$$\Lambda_{11} \equiv R_{11}, \qquad \Lambda_{12} \equiv R_{12}, \qquad \Lambda_{21} \equiv R_{21}, \qquad \Lambda_{22} \equiv R_{22}. \tag{2.2.23}$$

Дадим представление матриц $\frac{\partial Q}{\partial q}, \frac{\partial Q}{\partial p}, \frac{\partial P}{\partial q}, \frac{\partial P}{\partial p}$ в виде столбцовых матриц. Это представление имеет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \left\| \frac{\partial Q}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial q_j}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial q_n} \right\|; \tag{2.2.24}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \left\| \frac{\partial Q}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial p_j}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial p_n} \right\|; \tag{2.2.25}$$

$$\frac{\partial P}{\partial q} = \left\| \frac{\partial P}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial q_j}, \dots, \frac{\partial P}{\partial q_n} \right\|; \tag{2.2.26}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} = \left\| \frac{\partial P}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial p_j}, \dots, \frac{\partial P}{\partial p_n} \right\|. \tag{2.2.27}$$

Обозначим $r_{ik}^{(11)}$ элемент с номером i,k матрицы R_{11}. Для матриц R_{12}, R_{21}, R_{22} элементы с таким же номером i,k будут обозначаться $r_{ik}^{(12)}$, $r_{ik}^{(21)}$, $r_{ik}^{(22)}$, соответственно.

Согласно (2.2.19) – (2.2.20) и с учетом представлений (2.2.24) – (2.2.27) по правилам произведения матриц находим формулы для расчета указанных элементов.

$$r_{ik}^{(11)} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial P}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial P}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = [q_i, q_k],$$

$$r_{ik}^{(12)} = \left(\frac{\partial Q}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial P}{\partial p_k} - \left(\frac{\partial P}{\partial q_i}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial q_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} = [q_i, p_k],$$

$$r_{ik}^{(21)} = \left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right)^* \frac{\partial P}{\partial q_k} - \left(\frac{\partial P}{\partial p_i}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial q_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_j}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k} = [p_i, q_k],$$

$$r_{ik}^{(22)} = \left(\frac{\partial Q}{\partial p_i}\right)^* \frac{\partial P}{\partial p_k} - \left(\frac{\partial P}{\partial p_i}\right)^* \frac{\partial Q}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i}\frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial p_i}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k} = [p_i, p_k].$$

Формулы справедливы для всех $i,k = \overline{1,n}$.

Последние равенства в этих выражениях записаны согласно определению скобки Лагранжа. Сопоставляя с выражениями (2.2.12) – (2.2.13), видим, что справедливы тождества (2.2.23), а вместе с ними и тождество (2.2.18). Лемма 1 доказана.

Лемма 1 говорит о том, что ***матрица Лагранжа*** *любого преобразования вида* (2.1.4) – (2.1.5) *связана с* ***матрицей Якоби*** *этого преобразования тождеством* (2.2.18).

При ее доказательстве нигде не применялось тождество (2.1.11), определяющее его каноничность.

1.3. Критерий каноничности преобразования, выраженный через матрицу Лагранжа

Опираясь на лемму 1, можем сформулировать следующий критерий каноничности преобразований.

Теорема 1.

Для того чтобы преобразование (2.1.4) – (2.1.5) *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовало число* $c \neq 0$ *такое, при котором выполняется тождество*

$$\Lambda(z,t) \equiv cJ\,. \tag{2.2.28}$$

Утверждение очевидно, поскольку, согласно лемме 1, для любого преобразования (2.1.4) – (2.1.5) справедливо тождество (2.2.18). Поэтому

1) из тождеств (2.1.11) и (2.2.18) следует выполнение тождества (2.2.28) (необходимость условия (2.2.28) для каноничности преобразования),
2) из тождеств (2.2.28) и (2.2.18) следует выполнение тождества (2.1.11) (достаточность условия (2.2.28) для каноничности преобразования).

Теорема 1 и условия (2.2.28) преобразуются к следующей форме.

Теорема 1′.

Для *каноничности преобразования* (2.1.4) – (2.1.5), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие тождества по* z *и* t *(по* q, p *и* t *) для всех* $i,k=\overline{1,n}$:

$$[q_i,q_k]\equiv 0,\quad [p_i,p_k]\equiv 0,\quad [q_i,p_k]\equiv c\delta_{ik}, \tag{2.2.29}$$

где δ_{ik} *— символ Кронекера (* $\delta_{ik}=1$ *при* $i=k$ *и* $\delta_{ik}=0$ *при* $i\neq k$ *), а* c *— валентность канонического преобразования.*

Формулы (2.2.29) получаем путем сравнения элементов матрицы Лагранжа (2.2.11) – (2.2.13) с соответствующими элементами матрицы cJ , которая имеет вид:

$$cJ = \begin{Vmatrix} O_n\ ;\ cE_n \\ -cE_n\ ;\ O_n \end{Vmatrix}.$$

2°. Критерий каноничности, основанный на скобках Пуассона

В этом пункте установим критерий каноничности, основанный на скобках Пуассона. Для этого, прежде всего, введем понятие ***матрицы Пуассона*** прямого преобразования, покажем ее связь с ***матрицей Якоби*** $K_z(q,p,t)$ и докажем критерий каноничности преобразования (2.1.5), согласованный с определением 1 из §1.

2.1. Матрица Пуассона прямого преобразования

Будем смотреть на правые части преобразования (2.1.4) как на задание системы функций $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$, по которым строятся скобки Пуассона, упорядоченные по парам аргументов q_j, p_j, $j=\overline{1,n}$. Время t считается параметром и в эти пары не включается. Скобки Пуассона (Q_i,Q_k), (Q_i,P_k), (P_i,Q_k), (P_i,P_k) строятся для всех значений $i,k=\overline{1,n}$, где $Q_i(q,p,t)$, $P_i(q,p,t)$, $i=\overline{1,n}$ — компоненты вектор-функций $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$, соответственно.

По аналогии с ***матрицей Лагранжа*** введем матрицу

$$\mathrm{M}(q,p,t)=\begin{Vmatrix} \mathrm{M}_{11}(q,p,t); & \mathrm{M}_{12}(q,p,t) \\ \mathrm{M}_{21}(q,p,t); & \mathrm{M}_{22}(q,p,t) \end{Vmatrix}. \tag{2.2.30}$$

Ее блоки M_{rs}, $r,s=1{,}2$, являются матрицами размерности $(n\times n)$ каждая. Элементы их представляют собой ***скобки Пуассона***, построенные по парам из указанной системы функций $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$. Скобки строятся по всем упорядоченным парам q_j, p_j, $j=\overline{1,n}$ сопряженных аргументов.

$$\mathrm{M}_{11} = \begin{Vmatrix} (Q_1,Q_1),\cdots,(Q_1,Q_k),\cdots,(Q_1,Q_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (Q_i,Q_1),\cdots,(Q_i,Q_k),\cdots,(Q_i,Q_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (Q_n,Q_1),\cdots,(Q_n,Q_k),\cdots,(Q_n,Q_n) \end{Vmatrix}; \quad \mathrm{M}_{12} = \begin{Vmatrix} (Q_1,P_1),\cdots,(Q_1,P_k),\cdots,(Q_1,P_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (Q_i,P_1),\cdots,(Q_i,P_k),\cdots,(Q_i,P_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (Q_n,P_1),\cdots,(Q_n,P_k),\cdots,(Q_n,P_n) \end{Vmatrix} \qquad (2.2.31)$$

$$\mathrm{M}_{21} = \begin{Vmatrix} (P_1,Q_1),\cdots,(P_1,Q_k),\cdots,(P_1,Q_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (P_i,Q_1),\cdots,(P_i,Q_k),\cdots,(P_i,Q_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (P_n,Q_1),\cdots,(P_n,Q_k),\cdots,(P_n,Q_n) \end{Vmatrix}; \quad \mathrm{M}_{22} = \begin{Vmatrix} (P_1,P_1),\cdots,(P_1,P_k),\cdots,(P_1,P_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (P_i,P_1),\cdots,(P_i,P_k),\cdots,(P_i,P_n) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (P_n,P_1),\cdots,(P_n,P_k),\cdots,(P_n,P_n) \end{Vmatrix} \qquad (2.2.32)$$

Определение 3.

Матрица $\mathrm{M}(q,p,t)$, *построенная по формулам* (2.2.30) – (2.2.32) *по преобразованию* (2.1.4) – (2.1.5), *называется* ***матрицей Пуассона*** *данного преобразования.*

Так же, как и в определении 2 матрицы Лагранжа, здесь не предполагается, что преобразование (2.1.4) – (2.1.5) является каноническим, т.е. ***матрица Пуассона*** связывается с преобразованием, обладающим любыми качествами.

Матрица $\mathrm{M}(q,p,t)$, как и матрица $\Lambda(q,p,t)$, есть кососимметрическая,

$$\mathrm{M}^* = -\mathrm{M}.$$

2.2 Связь матрицы Пуассона с матрицей Якоби прямого преобразования

Установим связь матрицы Пуассона преобразования (2.1.5) с его матрицей Якоби, записанной в блочной структуре (2.2.17).

Лемма 2.

Справедливо тождество

$$\mathrm{M}(q,p,t) \equiv K_z(q,p,t)\, J K_z^*(q,p,t), \qquad (2.2.33)$$

где J *— матрица, определяемая по формуле* (2.1.2).

Доказательство.

Будем проводить доказательство по той же схеме, что и в лемме 1. Вычислим произведение $K_z J$. Подставим (2.1.2) и (2.2.17), получим

$$K_z(q,p,t)\,J = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q}; & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q}; & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} O_n\,;\, E_n \\ -E_n\,;\, O_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\dfrac{\partial Q}{\partial p}; & \dfrac{\partial Q}{\partial q} \\ -\dfrac{\partial P}{\partial p}; & \dfrac{\partial P}{\partial q} \end{Vmatrix}.$$

Умножая результат на $K_z^*(q,p,t)$ справа, придем к выражению правой части тождества (2.2.33). Оно будет иметь вид блочной матрицы с четырьмя блоками

$$K_z(q,p,t)\,JK_z^*(q,p,t) = \begin{Vmatrix} \overline{R}_{11}, & \overline{R}_{12} \\ \overline{R}_{21}, & \overline{R}_{22} \end{Vmatrix},$$

где

$$\overline{R}_{11} = \frac{\partial Q}{\partial q}\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial Q}{\partial p}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^*,$$

$$\overline{R}_{12} = \frac{\partial Q}{\partial q}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial Q}{\partial p}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^*, \qquad (2.2.34)$$

$$\overline{R}_{21} = \frac{\partial P}{\partial q}\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial P}{\partial p}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^*, \qquad (2.2.35)$$

$$\overline{R}_{22} = \frac{\partial P}{\partial q}\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial P}{\partial p}\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^*. \qquad (2.2.36)$$

Покажем, что $\overline{R}_{11}$ совпадает с матрицей M_{11} из (2.2.31). Элементы матрицы $\overline{R}_{11}$ будем обозначать $\overline{r}_{ik}^{11},\ i,k=\overline{1,n}$. Элемент $\overline{r}_{ik}$ определяется разностью элементов с номером i,k матриц $\frac{\partial Q}{\partial q}\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^*$ и $\frac{\partial Q}{\partial p}\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^*$.

Каждая из них является произведением двух матриц. Элемент с номером i,k произведения вычисляется по формуле скалярного произведения $i-$ой строки первого сомножителя на k - й столбец второго. Строкой с номером i матрицы $\frac{\partial Q}{\partial q}$ является вектор-строка $\frac{\partial Q_i}{\partial q}$, где Q_i — компонента с номером i вектор-столбца Q.

Столбец с номером k в матрице $\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^*$ совпадает со строкой $\frac{\partial Q_k}{\partial p}$, записанной в виде $k-$го столбца матрицы $\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^*$, т.е. совпадает с $\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p}\right)^*$.

Действуя по этому правилу, можем записать

$$\overline{r}_{ik}^{11} = \frac{\partial Q_i}{\partial q}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial Q_i}{\partial p}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q}\right)^*$$

Раскрывая скалярные произведения, получим

$$\overline{r}_{ik}^{11} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial Q_k(q,p,t)}{\partial p_j} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial Q_k(q,p,t)}{\partial q_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial Q_k(q,p,t)}{\partial p_j} - \frac{\partial Q_i(q,p,t)}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial Q_k(q,p,t)}{\partial q_j}\right).$$

Правая часть построенного выражения совпадает (по определению) со скобкой Пуассона функций $Q_i(q,p,t)$ и $Q_k(q,p,t)$, вычисленной по парам сопряженных переменных $q_j, p_j,\ j=\overline{1,n}$. Следовательно, $\overline{r}_{ik}^{11} = (Q_i, Q_k)$ при всех $i,k=\overline{1,n}$. Сопоставляя с элементами матрицы M_{11} из (2.2.31), заключаем, что

$$\mathrm{M}_{11} \equiv \overline{R}_{11}.$$

Аналогично, если обозначить $\overline{r}_{ik}^{12}, \overline{r}_{ik}^{21}, \overline{r}_{ik}^{22},\ i,k=\overline{1,n},$ элементы матриц $\overline{R}_{12}, \overline{R}_{21}, \overline{R}_{22}$, то из (2.2.34), (2.2.35), (2.2.36) можем найти:

$$\bar{r}_{ik}^{12} = \frac{\partial Q_i}{\partial q}\left(\frac{\partial P_k}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial Q_i}{\partial p}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q}\right)^* = (Q_i, P_k), \qquad i,k = \overline{1,n},$$

$$\bar{r}_{ik}^{21} = \frac{\partial P_i}{\partial q}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial P_i}{\partial p}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q}\right)^* = (P_i, Q_k), \qquad i,k = \overline{1,n},$$

$$\bar{r}_{ik}^{22} = \frac{\partial P_i}{\partial q}\left(\frac{\partial P_k}{\partial p}\right)^* - \frac{\partial P_i}{\partial p}\left(\frac{\partial P_k}{\partial p}\right)^* = (P_i, P_k), \qquad i,k = \overline{1,n}.$$

Из этих формул вытекают тождества

$$\mathrm{M}_{12} \equiv \bar{R}_{12}, \quad \mathrm{M}_{21} \equiv \bar{R}_{21}, \quad \mathrm{M}_{22} \equiv \bar{R}_{22} ,$$

а вместе с ними и тождество (2.2.33). Лемма 2 доказана.

Как и в лемме 1, при доказательстве леммы 2 не использовалось тождество (2.1.11), определяющее каноничность преобразования (2.1.4) – (2.1.5). Поэтому связь ***матрицы Якоби*** с ***матрицей Пуассона***, определяемая тождеством (2.2.33), справедлива для любого прямого преобразования.

2.3. Критерий каноничности преобразования, выраженный через матрицу Пуассона

Опираясь на лемму 2, докажем критерий каноничности преобразований, основанный на скобках Пуассона.

Теорема 2.

Для того чтобы преобразование (2.1.4) – (2.1.5) *было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы существовало число* $c \neq 0$ *такое, при котором выполняется тождество*

$$\mathrm{M}(q,p,t) \equiv cJ . \tag{2.2.37}$$

Доказательство.

Согласно лемме 2 для любых преобразований имеем связь (2.2.33):

$$\mathrm{M}(q,p,t) \equiv K_z\, J\, K_z^* .$$

Если в формулировке теоремы 2 условие (2.2.37) заменить условием

$$K_z\, J\, K_z^* \equiv c\, J , \tag{2.2.38}$$

то ее утверждение будет справедливым.

Иначе говоря, условия (2.2.37) и (2.2.38) эквивалентны. Поэтому доказательство теоремы 2 будем проводить для тождества (2.2.38).

Необходимость.

Пусть (2.1.4) – (2.1.5) — каноническое преобразование. Тогда справедливо тождество (2.1.11):

$$K_z^*\, J\, K_z \equiv c\, J . \tag{2.2.39}$$

Покажем, что вместе с ним будет выполняться тождество (2.2.38). Для этого проведем с тождеством (2.2.39) следующие операции:

а) запишем (2.2.39) для обратных матриц его левой и правой части

$$(K_z^*\, J\, K_z)^{-1} \equiv (c\, J)^{-1} \quad \Rightarrow \quad K_z^{-1}\, J^{-1}\, K_z^{*-1} \equiv c^{-1}\, J^{-1} ; \tag{a}$$

б) умножим обе части тождества (а) слева на матрицу $(-c\, K_z)$,

справа на матрицу K_z^*, и учтем, что $J^{-1} = -J$.

Придем к следующему результату:

$$c\, J \equiv K_z\, J\, K_z^* ,$$

который совпадает с (2.2.38). Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть на преобразовании (2.1.4) – (2.1.5) выполняется тождество (2.2.38). Покажем, что в таком случае будет справедливо (2.2.39) и, следовательно, данное преобразование будет каноническим.

Для этого проведем с тождеством (2.2.38) операции, аналогичные тем, которые проводились с тождеством (2.2.39) при доказательстве необходимости. А именно:

а) запишем (2.2.38) для обратных матриц его левой и правой части

$$(K_z\, J\, K_z^*)^{-1} \equiv (c\, J\,)^{-1} \quad \Rightarrow \quad K_z^{*-1}\, J^{-1}\, K_z^{-1} \equiv c^{-1}\, J^{-1}; \qquad (a')$$

б) умножим обе части тождества (a') слева на матрицу $(-c\, K_z^*)$,

справа на матрицу K_z и учтем, что $J^{-1} = -J$.

Получим тождество

$$c\, J \equiv K_z^*\, J\, K_z\,,$$

совпадающее с (2.2.39). Достаточность, а вместе с ней и теорема 2, доказана.

Теорема 2 и условия (2.2.37) преобразуются к следующей форме.

Теорема 2'.

Для каноничности преобразования (2.1.4) – (2.1.5) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие тождества по* z *и* t *для всех* $i, k = \overline{1, n}$ *:*

$$(Q_i, Q_k) \equiv 0, \quad (P_i, P_k) \equiv 0, \quad (Q_i, P_k) \equiv c\delta_{ik}\,, \qquad (2.2.40)$$

где δ_{ik} *— символ Кронекера,* c *— валентность канонического преобразования.*

Эта теорема доказывается так же, как и теорема $1'$.

Замечание.

Из доказанных критериев каноничности преобразований следует, что преобразования тогда и только тогда являются каноническими, когда его матрицы Лагранжа и Пуассона по значениям одинаковы и совпадают с матрицами $c\, J$, $K_z^*\, J\, K_z$ и $K_z\, J\, K_z^*$:

$$\Lambda(z,t) \equiv M(z,t) \equiv c\, J = \begin{Vmatrix} O_n; & cE_n \\ -cE_n; & O_n \end{Vmatrix} \equiv K_z^*\, J\, K_z \equiv K_z\, J\, K_z^*\,. \qquad (2.2.41)$$

3°. Критерий каноничности преобразований, основанный на изохронных вариациях

В п.п.1° и 2° построены критерии каноничности преобразования (2.1.4), основанные на вычислении ***скобок Лагранжа*** (п.1°) или ***скобок Пуассона*** (п.2°). В данном пункте дадим критерий каноничности преобразования (2.1.4), который основан на результатах анализа линейной формы относительно изохронных вариаций δq и δp.

Эта линейная форма задается в явной форме и строится по функциям $Q(q, p, t)$ и $P(q, p, t)$ преобразования (2.1.4). Целью ее анализа служит ответ на вопрос: будет ли она являться изохронной вариацией некоторой функции $F(q, p, t)$ или нет.

Ниже показывается, что необходимые и достаточные условия, при которых реализуется положительный ответ на поставленный вопрос, эквивалентны условиям каноничности преобразования (2.1.4).

Прежде чем переходить к формулировке и доказательству этого результата, напомним понятие изохронной вариации функции $F(q, p, t)$.

Будем считать функцию $F(q, p, t)$ заданной при $(q, p) \in G,\ t \in J$, где G — открытое связное множество в $2n-$мерном пространстве переменных q и p, и дважды непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных q, p, t.

Определение 4.

Изохронной вариацией *функции* $F(q,p,t)$ *при фиксированном значении* $t=\bar{t}\in J$ *называется функция* δF

$$\delta F=\frac{\partial F(q,p,\bar{t})}{\partial q}\delta q+\frac{\partial F(q,p,\bar{t})}{\partial p}\delta p. \qquad (2.2.42)$$

Переменные δq и δp *называются* ***изохронными вариациями*** сопряженных переменных q,p, соответственно. Они могут принимать любые значения, при которых точки $(q+\delta q,p+\delta p)\in G$.

В (2.2.42) δF является символом, обозначающим изохронную вариацию функции $F(q,p,t)$ в момент $\bar{t}$. Как видно из (2.2.42), δF является линейной формой по изохронным вариациям δq и δp аргументов q и p. Коэффициенты формы зависят от q и p, вычисляются по значению $\bar{t}$ параметра t. Тем самым, на заданном промежутке J по формуле (2.2.42) строится семейство изохронных вариаций функции $F(q,p,t)$, причем t является параметром этого семейства. Заметим, что коэффициенты линейной формы (2.2.42) зависят от q и p и не зависят от t.

Функция $F(q,p,\bar{t})$, рассматриваемая как функция переменных q и p, при любых $(q,p)\in G$ является непрерывно дифференцируемой функцией. Поэтому она имеет дифференциал в любой точке $(q,p)\in G$. Запишем его выражение:

$$dF(q,p,\bar{t})=\frac{\partial F(q,p,\bar{t})}{\partial q}dq+\frac{\partial F(q,p,\bar{t})}{\partial p}dp. \qquad (2.2.43)$$

В нем dq и dp — дифференциалы переменных q и p. В тех случаях, когда q и p являются независимыми переменными, их дифференциалы dq и dp имеют тот же смысл, что и изохронные вариации δq и δp в формуле (2.2.42). А потому, сопоставляя (2.2.43) и (2.2.42), видим, что правые части их совпадают, если δq и δp заменить на dq и dp, соответственно. Поэтому при такой замене имеем

$$\delta F\overset{(q,p)}{\equiv}dF(q,p,\bar{t}), \qquad (2.2.44)$$

т.е. изохронная вариация функции $F(q,p,t)$ при $t=\bar{t}$ совпадает с дифференциалом функции $F(q,p,\bar{t})$.

Пусть задана линейная форма

$$A(q,p)\delta q+B(q,p)\delta p, \qquad (2.2.45)$$

где $A(q,p)$ и $B(q,p)$ — непрерывно дифференцируемые вектор-функции по q и p размерности $(1\times n)$. Укажем условия, которые следует наложить на $A(q,p)$ и $B(q,p)$, чтобы при выполнении их линейная форма (2.2.45) была изохронной вариацией какой-либо функции $f(q,p)$.

Заменим в (2.2.45) δq на dq, δp на dp. Получим линейную форму относительно дифференциалов dq и dp:

$$A(q,p)dq+B(q,p)dp. \qquad (2.2.46)$$

По виду этой формы или другими средствами решим вопрос о существовании функции $f(q,p)$, для которой (2.2.46) является полным дифференциалом.

Пусть ответ на поставленный вопрос — положительный, т.е. коэффициенты $A(q,p)$ и $B(q,p)$ формы (2.2.46) таковы, что можно указать функцию $\varphi(q,p)$, дифференциал $d\varphi(q,p)$ которой удовлетворяет тождеству:

$$d\varphi(q,p)=\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q}dq+\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p}dp\equiv A(q,p)dq+B(q,p)dp\,. \qquad (2.2.47)$$

по переменным q,p и дифференциалам dq,dp при всех $(q,p)\in G$ и $(q+dq,\ p+dp)\in G$.

В этом случае из тождества (2.2.44) делаем заключение о том, что линейная форма (2.2.45) является изохронной вариацией функции $\varphi(q,p)$.

В противном случае, т.е. когда установлено, что не существует функции $\varphi(q,p)$, для которой выполнялось бы тождество (2.2.47), из тождества (2.2.44) следует, что линейная форма (2.2.45) не может быть изохронной вариацией какой-либо функции $\varphi(q,p)$.

Ответы на вопросы о существовании функции $\varphi(q,p)$ для линейной формы (2.2.46) можно получить разными способами. Например,

- установить существование $\varphi(q,p)$ непосредственно по заданной форме функции (2.2.46) (в тех случаях, когда она имеет простой вид),
- путем прямого построения решения $\varphi(q,p)$ уравнения в полных дифференциалах
  $$d\varphi=A(q,p)dq+B(q,p)dp\,, \qquad (2.2.48)$$
  которое получается из (2.2.47) заменой знака тождества на знак равенства,
- путем построения решения $\varphi(q,p)$ системы уравнений в частных производных
  $$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_i}&=a_i(q,p), \qquad i=\overline{1,n},\\ \frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p_k}&=b_k(q,p), \qquad k=\overline{1,n},\end{aligned} \qquad (2.2.49)$$
  которая эквивалентна уравнению (2.2.48) в полных дифференциалах; в (2.2.49) функции $a_i(q,p),\, i=\overline{1,n}$, и $b_k(q,p),\, k=\overline{1,n}$, обозначают элементы вектор-функций $A(q,p)$ и $B(q,p)$, соответственно.

Наконец, возможны ситуации, когда нет необходимости иметь явное выражение функции $\varphi(q,p)$, дифференциал которой совпадает с линейной формой (2.2.46), а требуется лишь знать, что такая функция есть. В этих случаях достаточно произвести проверку выполнения необходимых и достаточных условий существования решения $\varphi(q,p)$ уравнения (2.2.48) в полных дифференциалах.

Их вывод основан на свойствах полного дифференциала функции $\varphi(q,p)$, который должен совпадать с правой частью уравнения (2.2.48). А именно, если предположить, что существует такая функция $\varphi(q,p)$, то ее частные производные $\dfrac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_i}$ и $\dfrac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p_k}$ при всех $i,k=\overline{1,n}$ должны тождественно совпадать с правыми частями (2.2.49):

$$\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_i}\equiv a_i(q,p), \qquad \frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p_k}\equiv b_k(q,p), \qquad i,k=\overline{1,n},. \qquad (2.2.49')$$

Из непрерывной дифференцируемости $a_i(q,p),\, b_k(q,p)$ по переменным q,p следует, что функция $\varphi(q,p)$ дважды непрерывно дифференцируема. А тогда из непрерывности вторых производных функции $\varphi(q,p)$ заключаем, что ее смешанные производные удовлетворяют тождествам

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_i}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_k}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p_i}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p_k}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_i}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial p_i}\left(\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_k}\right),\qquad i,k=\overline{1,n}. \tag{2.2.50}$$

Замена в этих тождествах частных производных функции $\varphi(q,p)$ на правые части тождеств (2.2.49′) приводит к тем условиям, которым должны удовлетворять коэффициенты линейной формы (2.2.46), чтобы функция $\varphi(q,p)$ существовала. Запишем их в виде леммы 3.

Лемма 3.

Для того чтобы линейная форма (2.2.46) *была полным дифференциалом некоторой функции* $\varphi(q,p)$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

1) *для частных производных функции* $\varphi(q,p)$ *выполнялись тождества*

$$\frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial q_i}\equiv a_i(q,p),\quad i=\overline{1,n},\qquad \frac{\partial\varphi(q,p)}{\partial p_k}\equiv b_k(q,p),\quad k=\overline{1,n}. \tag{2.2.51}$$

2) *частные производные элементов* $a_i(q,p)$ и $b_k(q,p)$ *для всех* $i,k=\overline{1,n}$ *удовлетворяли следующим тождественным соотношениям:*

$$\frac{\partial a_i(q,p)}{\partial q_k}\equiv\frac{\partial a_k(q,p)}{\partial q_i},\quad \frac{\partial b_i(q,p)}{\partial p_k}\equiv\frac{\partial b_k(q,p)}{\partial p_i},\quad \frac{\partial a_i(q,p)}{\partial p_k}\equiv\frac{\partial b_k(q,p)}{\partial q_i}. \tag{2.2.52}$$

Необходимость условий (2.2.51), (2.2.52) доказана при их выводе, приведенном перед леммой. С доказательством достаточности можно ознакомиться в учебном пособии [Ермолин В.С., Королев В.С., Потоцкая И.Ю. Теоретическая механика. Часть 1. Кинематика. СПб: СПбГУ, ВВМ, 2012, с.94-96, или в учебных пособиях по математическому анализу].

Следствие.

Для того чтобы линейная форма (2.2.45) *была* ***изохронной вариацией*** *некоторой функции* $\varphi(q,p)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (2.2.51), (2.2.52).

Справедливость следствия вытекает из тождества (2.2.44) и утверждения леммы 3.

Обратимся к прямому преобразованию (2.1.4) – (2.1.5). Обозначим $\delta F(q,p,t)$ соотношение следующего вида

$$\delta F(q,p,t)=cp^*\delta q-P^*(q,p,t)\delta Q(q,p,t), \tag{2.2.53}$$

Здесь $c\neq 0$ — некоторое число; оно совпадает с валентностью преобразования (2.1.4), если это преобразование есть каноническое; $Q(q,p,t)$ и $P(q,p,t)$ — вектор-функции, определяющие прямое преобразование старых переменных q,p в новые переменные Q,P; δq — изохронная вариация переменных q; $\delta Q(q,p,t)$ — изохронная вариация вектор-функции $Q(q,p,t)$

$$\delta Q(q,p,t)=\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q}\delta q+\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p}\delta p. \tag{2.2.54}$$

В левой части равенства (2.2.53) $\delta F(q,p,t)$ всего лишь символ, обозначающий функцию, стоящую в правой части. В (2.2.54) матрицы $\dfrac{\partial Q}{\partial q}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial p}$, представленные в виде столбцов, совпадают с (2.2.24) и (2.2.25).

Докажем следующую лемму 4.

Лемма 4.

Для того чтобы выражение $\delta F(q,p,t)$, *задаваемое формулой* (2.2.53), *было* ***изохронной вариацией*** *некоторой функции* $F(q,p,t)$, *необходимо и достаточно, чтобы при каждом фиксированном значении* $t\in J$ *выполнялись тождества по переменным* q и p*:*

$$[q_i,q_k]\equiv 0,\quad [p_i,p_k]\equiv 0,\quad [q_i,p_k]\equiv c\delta_{ik},\qquad i,k=\overline{1,n}. \tag{2.2.55}$$

Доказательство.

Запишем правую часть (2.2.53) в явной зависимости от δq и δp и приведем ее к виду (2.2.45). Для этого подставим (2.2.54) в (2.2.53).

$$\delta F(q,p,t)=cp^*\delta q-P^*\frac{\partial Q}{\partial q}\delta q-P^*\frac{\partial Q}{\partial p}\delta p,$$

или

$$\delta F(q,p,t)=\left[cp^*-P^*\frac{\partial Q}{\partial q}\right]\delta q-P^*\frac{\partial Q}{\partial p}\delta p. \tag{2.2.56}$$

Из (2.2.55) и следствия из леммы 3 вытекает, что для того чтобы правая часть (2.2.55) была изохронной вариацией некоторой функции $F(q,p,t)$ при любом фиксированном значении $t\in J$, необходимо и достаточно, чтобы для функции $\varphi(q,p)=F(q,p,t)$ выполнялись условия (2.2.51) и (2.2.52).

Заметим, что в аргументах функции $F(q,p,t)$ время t считается параметром семейства изохронных вариаций, и оно фиксировано. Поэтому функция $\varphi(q,p)=F(q,p,t)$, а также вектор-функции $Q(q,p,t)$ и $P(q,p,t)$, рассматриваются как функции, зависящие только от q и p.

Условия (2.2.51) означают, что в правой части (2.2.56) коэффициенты при δq_k, $k=\overline{1,n}$, тождественно совпадают с $\dfrac{\partial F(q,p,t)}{\partial q_k}$, а при δp_i, $i=\overline{1,n}$, — соответственно, с $\dfrac{\partial F(q,p,t)}{\partial q_i}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial q_k}&=cp_k-P^*(q,p,t)\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k}, && k=\overline{1,n},\\ \frac{\partial F}{\partial p_i}&=-P^*(q,p,t)\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i}, && i=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.2.57}$$

Условия (2.2.52) эквивалентны соотношениям (2.2.50), и, применительно к функции $\varphi(q,p)=F(q,p,t)$, они принимают форму:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_k\partial q_i}\equiv\frac{\partial^2 F}{\partial q_i\partial q_k},\qquad i,k=\overline{1,n}, \tag{2.2.58}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_k\partial p_i}\equiv\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\partial p_k},\qquad i,k=\overline{1,n}, \tag{2.2.59}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial p_i} \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial q_k}, \qquad i,k=\overline{1,n}. \tag{2.2.60}$$

Запишем (2.2.58) с учетом равенств (2.2.57):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_k} = -\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k} - P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_i \partial q_k},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_i} = -\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_i} - P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_k \partial q_i}.$$

Вычтем второе равенство из предыдущего:

$$0 \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial q_k \partial q_i} = \left(\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_i} - \frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k}\right) +$$
$$+\left(P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_k \partial q_i} - P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_i \partial q_k}\right).$$

Выражение, стоящее во второй скобке, тождественно равно нулю, поскольку

$$\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_k \partial q_i} \equiv \frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_i \partial q_k}$$

в силу непрерывности вторых смешанных производных.

Выражение в первой скобке представимо в виде

$$\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_i} - \frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_i}\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial q_k} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_k}\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial q_i} \stackrel{def}{=} [q_i, q_k],$$

где $[q_i, q_k]$ — скобка Лагранжа, составленная по переменным q_i и q_k относительно семейства функций $Q(q,p,t)$, $P(q,p,t)$, упорядоченного по парам $(Q_j(q,p,t),\, P_j(q,p,t))$, $j=\overline{1.n}$. Таким образом, тождества (2.2.58) эквивалентны тождествам

$$[q_i, q_k] \equiv 0, \qquad i,k=\overline{1,n}. \tag{2.2.61}$$

Преобразуем теперь тождества (2.2.59). С учетом равенств (2.2.57) имеем:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(-P^*(q,p,t)\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_k}\right) = -\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_k} - P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_i \partial p_k},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left(-P^*(q,p,t)\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i}\right) = -\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i} - P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_k \partial p_i}.$$

Вычитаем второе равенство из первого:

$$0 \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} - \frac{\partial^2 F}{\partial p_k \partial p_i} = \left(\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i} - \frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_k}\right) +$$
$$+\left(P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_k \partial p_i} - P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_i \partial p_k}\right).$$

Выражение, стоящее во второй скобке, тождественно равно нулю, так как

$$\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_k \partial p_i} \equiv \frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_i \partial p_k}.$$

Выражение, стоящее в первой скобке, имеет вид:

$$\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i}-\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_k}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial p_k}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_k}\cdot\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial p_i}\overset{def}{=}[p_i,p_k],$$

где $[p_i,p_k]$ — скобка Лагранжа, составленная по переменным p_i,p_k относительно того же семейства функций, по которому составлены скобки (2.2.61). Следовательно, тождества (2.2.59) эквивалентны тождествам

$$[p_i,p_k]\equiv 0,\qquad i,k=\overline{1,n}. \qquad (2.2.62)$$

Наконец, преобразуем тождества (2.2.60) с учетом равенств (2.2.57):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_k\partial p_i}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(-P^*(q,p,t)\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i}\right)=$$

$$=-\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i}-P^*(q,p,t)\cdot\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_k\partial p_i},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial p_i}\left(cp_k-P^*(q,p,t)\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k}\right)=$$

$$=c\delta_{ki}-\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_i}\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k}-P^*(q,p,t)\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_i\partial q_k},$$

где $\delta_{ki}=\begin{cases}1, & i=k,\\ 0, & i\neq k,\end{cases}$ δ_{ki} — символ Кронекера.

Вычитаем второе равенство из первого:

$$0\equiv\frac{\partial^2 F^2}{\partial q_k\partial p_i}-\frac{\partial^2 F}{\partial p_i\partial q_k}=\left(-c\delta_{ki}+\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k}-\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i}\right)+$$

$$+\left(P^*(q,p,t)\cdot\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_i\partial q_k}-P^*(q,p,t)\cdot\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_k\partial p_i}\right).$$

Выражение, стоящее во второй скобке, тождественно равно нулю, так как

$$\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial p_i\partial q_k}\equiv\frac{\partial^2 Q(q,p,t)}{\partial q_k\partial p_i}.$$

Выражение, стоящее в первой скобке, преобразуется следующим образом:

$$-c\delta_{ki}+\left(\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial q_k}-\frac{\partial P^*(q,p,t)}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial Q(q,p,t)}{\partial p_i}\right)=$$

$$=-c\delta_{ki}+\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial p_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial q_k}\right)=$$

$$=-c\delta_{ki}+[q_k,p_i],$$

где $[q_k,p_i]$ есть скобка Лагранжа по переменным q_k и p_i относительно выше описанного семейства функций. Следовательно, тождества (2.2.60) эквивалентны тождествам

$$[q_k,p_i]\equiv c\delta_{ki},\qquad i,k=\overline{1,n}. \qquad (2.2.63)$$

Объединение доказанных тождеств (2.2.61), (2.2.62), (2.2.63) совпадает с совокупностью тождеств (2.2.55) в утверждении леммы 4. Лемма 4 доказана.

Лемма 4 позволяет доказать следующий критерий каноничности преобразования, основанный на построении изохронных вариаций некоторых функций $F(q,p,t)$.

Теорема 3.

Для каноничности преобразования (2.1.4) – (2.1.5) *необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная* $c \neq 0$ *такая, что выражение* (2.2.53)

$$\delta F(q,p,t) = cp^{*}\delta q - P^{*}(q,p,t)\delta Q(q,p,t)$$

является изохронной вариацией некоторой функции $F(q,p,t)$.

Утверждение очевидно, поскольку выполнение тождеств (2.2.55) согласно лемме 4 является необходимым и достаточным условием существования функции $F(q,p,t)$, имеющей изохронную вариацию, совпадающую с правой частью выражения (2.2.53).

С другой стороны, тождества (2.2.55) совпадают с тождествами (2.2.29), которые, в свою очередь, являются необходимыми и достаточными условиями каноничности преобразования (2.1.4) – (2.1.5), согласно теореме 1′.

§3. Ковариантность уравнений Гамильтона при канонических преобразованиях

Имеем каноническую систему Гамильтона (2.1.1):

$$\frac{dz}{dt} = J\,\mathrm{H}_z^{*}, \tag{2.3.1}$$

z — вектор-столбец $(2n \times 1)$, который составлен из вектора обобщенных координат $q = (q_1,\ldots,q_n)^{*}$ и обобщенных импульсов $p = (p_1,\ldots,p_n)^{*}$, так что $z^{*} = (q^{*}, p^{*})$;

$$J = \begin{Vmatrix} O_n; & E_n \\ -E_n; & O_n \end{Vmatrix}, \tag{2.3.2}$$

$\mathrm{H}(z,t)$ — функция Гамильтона. В зависимости от переменных q,p будем обозначать ее также $\mathrm{H}(q,p,t)$. Вектор-функция H_z является матрицей Якоби функции $\mathrm{H}(z,t)$:

$$\mathrm{H}_z = \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial z} = \left\Vert \frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial z_1},\ldots,\frac{\partial \mathrm{H}(z,t)}{\partial z_{2n}} \right\Vert. \tag{2.3.3}$$

Она имеет размерность $(1 \times 2n)$. В тех случаях, когда H_z рассматривается как функция от переменных $q_1,\ldots,q_n;\ p_1,\ldots,p_n$, будем представлять ее в виде следующей блочной матрицы размерности $(1 \times 2n)$:

$$\mathrm{H}_z = \left\Vert \mathrm{H}_q, \mathrm{H}_p \right\Vert,$$

где $\mathrm{H}_q = \dfrac{\partial \mathrm{H}(q,p,t)}{\partial q}$, $\quad \mathrm{H}_p = \dfrac{\partial \mathrm{H}(q,p,t)}{\partial p}$ — матрицы размерности $(1 \times n)$ каждая.

$$\mathrm{H}_q = \left\Vert \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_n} \right\Vert, \qquad \mathrm{H}_p = \left\Vert \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1},\ldots,\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_n} \right\Vert.$$

Пусть задано каноническое преобразование старых переменных q,p в новые Q,P:

$$Q = Q(q,p,t), \qquad P = P(q,p,t). \tag{2.3.4}$$

Здесь, как всегда, $q,p;\ Q,P;\ Q(q,p,t), P(q,p,t)$ суть вектор-столбцы размерности $(n \times 1)$. В обозначениях

$$\zeta^{*} = (Q^{*},\ P^{*}), \qquad \zeta^{*}(q,p,t) = (Q^{*}(q,p,t),\ P^{*}(q,p,t)) = \zeta^{*}(z,t),$$

где $Q^{*} = (Q_1,\ldots.Q_n)$, $\quad P^{*} = (P_1,\ldots.P_n)$, преобразование (2.3.4) принимает вид:

$$\zeta = \zeta(z,t). \qquad (2.3.5)$$

Выведем уравнения Гамильтона для новых переменных ζ.

Для этого установим связь между скоростью $\dot{\zeta}$ изменения новых переменных и скоростью $\dot{z}$ изменения старых переменных на движениях механической системы. Продифференцируем по времени t преобразование (2.3.5) вдоль любого решения $z(t)$, описываемого в старых переменных уравнениями (2.3.1). Будем иметь:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{d}{dt}(\zeta(z,t)) = \frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial t}. \qquad (2.3.6)$$

Формула (2.3.6) получена по правилу дифференцирования суперпозиции функции $\zeta(z,t)$ и функции $z(t)$, являющейся любым решением системы (2.3.1). В (2.3.6) множитель $\dfrac{\partial\zeta(z,t)}{\partial z}$ при $\dfrac{dz}{dt}$ является матрицей Якоби преобразования (2.3.5). В принятых ранее обозначениях, можем записать:

$$\frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial z} = K_z(z,t).$$

Тогда (2.3.6) принимает вид $$\frac{d\zeta}{dt} = K_z(z,t)\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial t}.$$

Учтем, что на решениях системы (2.3.1) $\dfrac{dz}{dt}$ совпадает с правой частью этой системы. Подставляя ее, получим:

$$\frac{d\zeta}{dt} = K_z(z,t)\,J\ \mathrm{H}_z^*(z,t) + \frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial t}. \qquad (2.3.7)$$

Для продолжения процесса построения гамильтоновой системы дифференциальных уравнений в новых переменных, необходимо заменить в правой части (2.3.7) аргументы z на обратное преобразование — преобразование новых переменных ζ в старые z:

$$z = z(\zeta,t). \qquad (2.3.8)$$

Для канонического преобразования (2.3.4) – (2.3.5) оно всегда существует. Отметим здесь, что функция $z(\zeta,t)$ является обратной по отношению к функции $\zeta(z,t)$, т.е. подстановка ее в (2.3.5) дает тождество

$$\zeta(z(\zeta,t),t) \equiv \zeta. \qquad (2.3.9)$$

Не будем спешить пока делать такую замену во всех функциях, стоящих в правой части (2.3.7), а проведем ее только в функции $\mathrm{H}_z(z,t)$. Введем обозначение $\hat{\mathrm{H}}(\zeta,t)$ для функции Гамильтона $\mathrm{H}(z,t)$, представленной в зависимости от новых переменных $\zeta^* = (Q^*, P^*)$:

$$\hat{\mathrm{H}}(\zeta,t) = \mathrm{H}(z(\zeta,t),t). \qquad (2.3.10)$$

В явной зависимости от Q,P,t будем ее обозначать также $\hat{\mathrm{H}}(Q,P,t)$:

$$\hat{\mathrm{H}}(Q,P,t) = \mathrm{H}(q(Q,P,t),\,p(Q,P,t),t). \qquad (2.3.10')$$

Из тождества (2.3.9) следует обратная связь функций $\mathrm{H}(z,t)$ и $\hat{\mathrm{H}}(\zeta,t)$:

$$\mathrm{H}(z,t) = \hat{\mathrm{H}}(\zeta(z,t),t). \qquad (2.3.11)$$

Обозначим

$$\hat{\mathrm{H}}_\zeta(\zeta,t) = \frac{\partial\hat{\mathrm{H}}_\zeta(\zeta,t)}{\partial\zeta}. \qquad (2.3.12)$$

Тогда из (2.3.11) получаем связь $\mathrm{H}_z(z,t)$ и $\hat{\mathrm{H}}_\zeta(\zeta,t)$ в следующем виде:

$$\mathrm{H}_z(z,t) = \hat{\mathrm{H}}_\zeta(\zeta,t)\Big|_{\zeta=\zeta(z,t)} \cdot \frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial z} = \hat{\mathrm{H}}_\zeta\Big|_{\zeta=\zeta(z,t)} \cdot K_z(z,t). \tag{2.3.13}$$

Теперь вернемся к системе (2.3.7) и продолжим процесс приведения ее правой части. С учетом (2.3.13) и тождества (2.3.9) проведем замену (2.3.8) в первом слагаемом в правой части (2.3.7):

$$\left[K_z(z,t)\, J\mathrm{H}_z^*(z,t)\right]\Big|_{z=z(\zeta,t)} = \left[K_z(z,t)\, JK_z^*(z,t)\right]\Big|_{z=z(\zeta,t)} \cdot \hat{\mathrm{H}}_\zeta^*(\zeta,t)\,.$$

Как показано в §2, для канонических преобразований справедливы тождества (2.2.42), согласно которым матрица $K_z(z,t)\,JK_z^*(z,t)$, стоящая в правой части в квадратных скобках, совпадает с $c\,J$ и не зависит от z,t. Следовательно,

$$\left[K_z(z,t)\, J\mathrm{H}_z^*(z,t)\right]\Big|_{z=z(\zeta,t)} = \left[K_z(z,t)\, JK_z^*(z,t)\right]\Big|_{z=z(\zeta,t)} \cdot \hat{\mathrm{H}}_\zeta^*(\zeta,t) = c\,J\,\hat{\mathrm{H}}_\zeta^*(\zeta,t)\,. \tag{2.3.14}$$

Обратимся ко второму слагаемому в правой части (2.3.7) с целью установить его вид после подстановки преобразования (2.3.8).

Сформулируем следующую теорему 4. На ее основе можно будет построить алгоритм, позволяющий получить представление этого слагаемого в зависимости от новых переменных ζ.

Теорема 4.

Для любого канонического преобразования (2.3.5)

$$\zeta = \zeta(z,t)$$

можно построить такую функцию $\hat{S}(\zeta,t)$, *дважды непрерывно дифференцируемую по* t *и* ζ *в области определения функции* $\zeta(z,t)$, *для которой выполняется тождество*

$$\frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial t}\Bigg|_{z=z(\zeta,t)} \equiv J\hat{S}_\zeta^*(\zeta,t), \tag{2.3.15}$$

где

$$\hat{S}_\zeta(\zeta,t) = \frac{\partial\hat{S}(\zeta,t)}{\partial\zeta}, \tag{2.3.16}$$

а $z = z(\zeta,t)$ *— обратное преобразование* (2.3.8).

Доказательство теоремы 4 дадим в конце этого параграфа, а здесь продолжим процесс приведения системы (2.3.7).

Воспользуемся представлениями (2.3.14) и (2.3.15) первого и второго слагаемых правой части (2.3.7). Подстановка их в (2.3.7) приводит к следующему уравнению

$$\frac{d\zeta}{dt} = Jc\hat{\mathrm{H}}_\zeta^*(\zeta,t) + J\hat{S}_\zeta^*(\zeta,t) = J\,(c\hat{\mathrm{H}}_\zeta^*(\zeta,t) + \hat{S}_\zeta^*(\zeta,t))\,,$$

которое можно записать в форме гамильтоновой системы

$$\frac{d\zeta}{dt} = J\,\tilde{\mathrm{H}}_\zeta^*(\zeta,t) \tag{2.3.17}$$

с функцией Гамильтона

$$\tilde{\mathrm{H}}(\zeta,t) = c\hat{\mathrm{H}}(\zeta,t) + \hat{S}(\zeta,t)\,. \tag{2.3.18}$$

Здесь $\hat{\mathrm{H}}(\zeta,t)$ — это исходно заданная функция Гамильтона $\mathrm{H}(z,t)$, выраженная в новых переменных по формуле (2.3.10). Функция $\hat{S}(\zeta,t)$ является решением следующей системы уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial \hat{S}(\zeta,t)}{\partial \zeta} = \hat{\varphi}^*(\zeta,t)\, J^{*-1}, \tag{2.3.19}$$

где $\hat{\varphi}(\zeta,t)$ — вектор-функция размерности $(n\times 1)$, совпадающая с частной производной по t от функции $\zeta(z,t)$, в которой после дифференцирования произведена замена старых переменных z на новые ζ по формуле (2.3.8):

$$\hat{\varphi}(\zeta,t) = \left.\frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial t}\right|_{z=z(\zeta,t)}. \tag{2.3.20}$$

Эта система уравнений построена на основе вектор-функции (2.3.16) и тождества (2.3.15).

Как видно из (2.3.17), уравнение в новых переменных при каноническом преобразовании (2.3.5) действительно можно записать в гамильтоновой форме, вообще говоря, с другой функцией Гамильтона — функцией $\tilde{\mathrm{H}}(\zeta,t)$, построенной по формуле (2.3.18). Такое свойство гамильтоновых систем называется ***ковариантностью***.

Следовательно, можем считать, что ковариантность гамильтоновых систем установлена, если докажем теорему 4 о существовании функции $\hat{S}(\zeta,t)$. Поэтому приступим к ее доказательству.

Теорема 4 будет доказана, если покажем существование решения системы уравнений (2.3.19) – (2.3.20). С этой целью преобразуем систему уравнений (2.3.19) – (2.3.20).

Произведем в уравнении (2.3.19) обратную замену переменных в соответствии с преобразованием (2.3.5)

$$\zeta = \zeta(z,t).$$

Очевидно, при такой замене в (2.3.20) будем иметь

$$\hat{\varphi}(\zeta(z,t),t) = \left.\frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial t}\right|_{z=z(\zeta(z,t),t)} = \frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial t}. \tag{2.3.21}$$

Если обозначим $S(z,t)$ функцию

$$S(z,t) = \hat{S}(\zeta(z,t),t), \tag{2.3.22}$$

то, дифференцируя ее по z, получим

$$S_z(z,t) = \frac{\partial S(z,t)}{\partial z} = \left.\frac{\partial \hat{S}(\zeta,t)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\zeta(z,t)} \cdot \frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial z} = \left.\frac{\partial \hat{S}(\zeta,t)}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=\zeta(z,t)} \cdot K_z(z,t). \tag{2.3.23}$$

Сделаем замену $\zeta = \zeta(z,t)$ в левой и правой части уравнения (2.3.19). Затем умножим на матрицу $K_z(z,t)$ обе части полученного равенства и воспользуемся соотношениями (2.3.21) и (2.3.23). В результате система уравнений (2.3.19) для функции $\hat{S}(\zeta,t)$ преобразуется в следующую систему уравнений для функции $S(z,t)$:

$$S_z(z,t) = \left(\frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial t}\right)^* J^{*-1} \cdot K_z(z,t).$$

Поскольку $J^{*-1} = J$, то окончательно она принимает вид

$$\frac{\partial S(z,t)}{\partial z} = \left(\frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial t}\right)^* J \cdot K_z(z,t). \tag{2.3.24}$$

Из вывода уравнений (2.3.24) и связи (2.3.22) функций $S(z,t)$ и $\hat{S}(\zeta,t)$ можем сделать следующее заключение.

Если $S(z,t)$ есть решение системы (2.3.24), то функция $\hat{S}(\zeta,t)$, определяемая по формуле

$$\hat{S}(\zeta,t) = S(z(\zeta,t),t),$$

где $z(\zeta,t)$ — каноническое преобразование (2.3.5), будет являться решением системы уравнений (2.3.19), (2.3.20).

Напомним здесь, что решением системы (2.3.19) называем дважды непрерывно дифференцируемую по всем своим аргументам функцию $\hat{S}(\zeta,t)$, которая при подстановке в (2.3.19) обращает эту систему в тождества. Аналогичное определение решения в виде функции $S(z,t)$ дается для системы (2.3.24).

Система (2.3.24) связывает между собой функции, стоящие в правой части, и частные производные от функции $S(z,t)$, стоящие в левой части, в зависимости от старых переменных канонического преобразования. Для того чтобы определить, существует или нет решение этой системы, не требуется знание обратного преобразования. Условия существования решения, записанные в старых переменных, для практики чаще всего более удобны. Выведем эти условия.

Запишем вектор-функцию $\zeta(z,t)$ и матрицу Якоби $K_z(z,t)$ прямого преобразования (2.3.4) в виде блочных матриц

$$\zeta(z,t) = \begin{Vmatrix} Q(q,p,t) \\ P(q,p,t) \end{Vmatrix}; \quad K_z = \frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial z} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial q}; & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \\ \dfrac{\partial P}{\partial q}; & \dfrac{\partial P}{\partial p} \end{Vmatrix}. \tag{2.3.25}$$

Блоки матрицы K_z в зависимости от переменных q, p, t поэлементно представляются следующими таблицами:

$$Q_q = \frac{\partial Q}{\partial q} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q_1(q,p,t)}{\partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial Q_1(q,p,t)}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial Q_n(q,p,t)}{\partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial Q_n(q,p,t)}{\partial q_n} \end{Vmatrix}, \quad Q_p = \frac{\partial Q}{\partial p} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial Q_1(q,p,t)}{\partial p_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial Q_1(q,p,t)}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial Q_n(q,p,t)}{\partial p_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial Q_n(q,p,t)}{\partial p_n} \end{Vmatrix},$$

$$P_q = \frac{\partial P}{\partial q} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial P_1(q,p,t)}{\partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial P_1(q,p,t)}{\partial q_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial P_n(q,p,t)}{\partial q_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial P_n(q,p,t)}{\partial q_n} \end{Vmatrix}, \quad P_p = \frac{\partial P}{\partial p} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial P_1(q,p,t)}{\partial p_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial P_1(q,p,t)}{\partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial P_n(q,p,t)}{\partial p_1}, & \cdots, & \dfrac{\partial P_n(q,p,t)}{\partial p_n} \end{Vmatrix}.$$

Вычислим в правой части (2.3.24) произведение $J \cdot K_z$. Подставляя (2.3.2) и (2.3.25), придем к выражению

$$JK_z = \begin{Vmatrix} O_n & E_n \\ -E_n & O_n \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} Q_q; Q_p \\ P_q; P_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} P_q; & P_p \\ -Q_q; & -Q_p \end{Vmatrix}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{\partial \zeta(z,t)}{\partial t} \right)^* = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t} Q^*(q,p,t); & \dfrac{\partial}{\partial t} P^*(q,p,t) \end{Vmatrix},$$

то правая часть уравнения (2.3.24) в процессе построения произведений матриц приводится к строчной матрице, состоящей из двух блоков:

$$\left(\frac{\partial\zeta(z,t)}{\partial t}\right)^{*}\cdot JK_z=\left\|\frac{\partial}{\partial t}Q^{*};\ \frac{\partial}{\partial t}P^{*}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}P_q; & P_p\\ -Q_q; & -Q_p\end{matrix}\right\|=$$
$$=\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}Q^{*}\right)P_q-\left(\frac{\partial}{\partial t}P^{*}\right)Q_q;\ \left(\frac{\partial}{\partial t}Q^{*}\right)P_p-\left(\frac{\partial}{\partial t}P^{*}\right)Q_p\right\|. \tag{2.3.26}$$

Левую часть уравнения (2.3.24) в зависимости от переменных q,p,t можем записать так:

$$\frac{\partial S}{\partial z}=\left\|\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial q};\ \frac{\partial S(q,p,t)}{\partial p}\right\|, \tag{2.3.27}$$

где блоки матрицы-строки $\dfrac{\partial S}{\partial z}$ имеют следующее представление

$$\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial q}=\left(\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial q_n}\right),\quad \frac{\partial S(q,p,t)}{\partial p}=\left(\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial p_1},\cdots,\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial p_n}\right).$$

Согласно уравнению (2.3.24), матрицы (2.3.27) и (2.3.26) совпадают. Приравниваем соответствующие блоки этих матриц. В результате уравнение (2.3.24) приобретает форму системы:

$$\frac{\partial S}{\partial q}=\left(\frac{\partial}{\partial t}Q^{*}\right)P_q-\left(\frac{\partial}{\partial t}P^{*}\right)Q_q;$$
$$\frac{\partial S}{\partial p}=\left(\frac{\partial}{\partial t}Q^{*}\right)P_p-\left(\frac{\partial}{\partial t}P^{*}\right)Q_p.$$

Запишем каждое из двух уравнений в транспонированном виде:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{*}=grad_q S(q,p,t)=\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial t}Q-\left(\frac{\partial Q}{\partial q}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial t}P, \tag{2.3.28}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)^{*}=grad_p S(q,p,t)=\left(\frac{\partial P}{\partial p}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial t}Q-\left(\frac{\partial Q}{\partial p}\right)^{*}\frac{\partial}{\partial t}P. \tag{2.3.29}$$

Раскроем правые части. Для этого транспонируем и запишем блоки $Q_q,\ Q_p,\ P_q,\ P_p$ матрицы Якоби (2.3.25) в форме, удобной для проведения вычислений правых частей (2.3.28), (2.3.29).

$$Q_q^{*}=\left\|grad_q Q_1(q,p,t),\ \ldots,\ grad_q Q_j(q,p,t),\ldots,grad_q Q_n(q,p,t)\right\|, \tag{2.3.30}$$

$$Q_p^{*}=\left\|grad_p Q_1(q,p,t),\ \ldots,\ grad_p Q_j(q,p,t),\ldots,grad_p Q_n(q,p,t)\right\|, \tag{2.3.31}$$

$$P_q^{*}=\left\|grad_q P_1(q,p,t),\ \ldots,\ grad_q P_j(q,p,t),\ldots,grad_q P_n(q,p,t)\right\|, \tag{2.3.32}$$

$$P_p^{*}=\left\|grad_p P_1(q,p,t),\ \ldots,\ grad_p P_j(q,p,t),\ldots,grad_p P_n(q,p,t)\right\|. \tag{2.3.33}$$

В этих матрицах j - тые столбцы, $j=\overline{1,n}$, обозначенные как $grad_q Q_j(q,p,t)$, $grad_p Q_j(q,p,t)$, $grad_q P_j(q,p,t)$, $grad_p P_j(q,p,t)$ поэлементно выражаются так:

$$grad_q Q_j(q,p,t) = \left(\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_i}, \cdots, \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial q_n} \right)^* \quad \text{для} \quad Q_q^* = \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \right)^*;$$

$$grad_p Q_j(q,p,t) = \left(\frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_i}, \cdots, \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial p_n} \right)^* \quad \text{для} \quad Q_p^* = \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)^*;$$

$$grad_q P_j(q,p,t) = \left(\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial q_i}, \cdots, \frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial q_n} \right)^* \quad \text{для} \quad P_q^* = \left(\frac{\partial P}{\partial q} \right)^*;$$

$$grad_p P_j(q,p,t) = \left(\frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial p_i}, \cdots, \frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial p_n} \right)^* \quad \text{для} \quad P_p^* = \left(\frac{\partial P}{\partial p} \right)^*.$$

Кроме того, поэлементную запись векторов $\frac{\partial Q}{\partial t}$ и $\frac{\partial P}{\partial t}$ представим в форме

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \left(\frac{\partial Q_1(q,p,t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial Q_j(q,p,t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial Q_n(q,p,t)}{\partial t} \right)^*, \tag{2.3.34}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{\partial P_1(q,p,t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial P_j(q,p,t)}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial P_n(q,p,t)}{\partial t} \right)^*. \tag{2.3.35}$$

Применяя формулы (2.3.32), (2.3.34), (2.3.30), (2.3.35) для строки с номером $i,\ i = \overline{1,n}$, матрицы, стоящей в правой части (2.3.28), по правилу умножения матрицы на вектор получим

$$\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial Q_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial t} \right], \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2.3.36}$$

Аналогично, используя выражения (2.3.34), (2.3.33), (2.3.31), (2.3.35) для строки с номером $k,\ k = \overline{1,n}$, матрицы, стоящей в правой части уравнения (2.3.29), найдем

$$\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial p_k} = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial Q_j}{\partial t} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial P_j}{\partial t} \right], \qquad k = \overline{1,n}. \tag{2.3.37}$$

Правые части (2.3.36) и (2.3.37) являются, соответственно, скобками Лагранжа $[t,q_i]$ и $[t,p_k]$, построенными по системе функций $Q_j(q,p,t),\ P_j(q,p,t),\ j = \overline{1,n}$, задающих преобразование переменных q,p в новые переменные Q,P; или, иначе, — преобразование переменных $z = (q,p)$ в переменные $\zeta = (Q,P)$.

Таким образом, в явном аналитическом выражении в скалярной форме система уравнений (2.3.28), (2.3.29) имеет вид:

$$\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial q_i} = [t,q_i], \qquad i = \overline{1,n}, \tag{2.3.38}$$

$$\frac{\partial S(q,p,t)}{\partial p_k} = [t,p_k], \qquad k = \overline{1,n}. \tag{2.3.39}$$

Рассматриваем в правых частях переменную t как параметр. Тогда для того чтобы существовало решение $S(q,p,t)$ системы уравнений (2.3.38), (2.3.39), необходимо и достаточно, чтобы линейная форма

$$\sum_{i=1}^{n} \{[t,q_i]dq_i + [t,p_i]dp_i\}$$

была полным дифференциалом функции $S(q,p,t)$ относительно переменных $q_i, p_i, i=\overline{1,n}$, при любых фиксированных значениях t. В свою очередь, чтобы она была полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение следующих тождеств:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}[t,q_k]-\frac{\partial}{\partial q_k}[t,q_i]\equiv 0, \qquad i,k=\overline{1,n}, \tag{2.3.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}[t,p_k]-\frac{\partial}{\partial p_k}[t,p_i]\equiv 0, \qquad i,k=\overline{1,n}, \tag{2.3.41}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_i}[t,p_k]-\frac{\partial}{\partial p_k}[t,q_i]\equiv 0, \qquad i,k=\overline{1,n}. \tag{2.3.42}$$

Тождества должны выполняться для всех значений q,p,t.

Преобразуем тождества (2.3.40) – (2.3.42). Для этого воспользуемся тождеством, доказанным для скобок Лагранжа. А именно, если функции $\varphi_j(x), \psi_j(x),\ j=\overline{1,n}$, по которым строятся скобки Лагранжа, зависят не менее, чем от трех аргументов $x_i,\ x_k,\ x_l$, т.е. размерность вектора x аргументов функций $\varphi_j(x), \psi_j(x),\ j=\overline{1,n}$, не меньше трех, то для любой тройки переменных $x_i,\ x_k,\ x_l,\ i\neq k\neq l,\ i\neq l$, справедливо тождество:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}[x_k,x_l]+\frac{\partial}{\partial x_k}[x_l,x_i]+\frac{\partial}{\partial x_l}[x_i,x_k]\equiv 0. \tag{2.3.43}$$

Учитывая (2.3.43), левую часть (2.3.40) можем записать так

$$\frac{\partial}{\partial q_i}[t,q_k]+\frac{\partial}{\partial q_k}[q_i,t]+\frac{\partial}{\partial t}[q_k,\ q_i]-\frac{\partial}{\partial t}[q_k,\ q_i]\equiv 0, \qquad i,k=\overline{1,n}.$$

Первые три слагаемых образуют тождество вида (2.3.43), составленное для переменных $q_k, q_i,\ t$. Поэтому (2.3.40) эквивалентно тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t}[q_k,\ q_i]\equiv 0 \quad \text{для любых } i,k=\overline{1,n}. \tag{2.3.44}$$

Аналогично доказывается, что (2.3.41) и (2.3.42) эквивалентны тождествам

$$\frac{\partial}{\partial t}[p_k,\ p_i]\equiv 0, \qquad i,k=\overline{1,n}, \tag{2.3.45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[p_k,\ q_i]\equiv 0, \qquad i,k=\overline{1,n}. \tag{2.3.46}$$

Таким образом, установили, что необходимыми и достаточными условиями существования решения системы уравнений (2.3.24) являются тождества (2.3.44), (2.3.45), (2.3.46).

Из тождеств (2.3.44) – (2.3.46) следует, что для того, чтобы они выполнялись, необходимо и достаточно, чтобы элементы матрицы Лагранжа, построенной для преобразования (2.3.4) – (2.3.5), не зависели явно от t.

Как показано в §2, необходимым и достаточным условием каноничности преобразования (2.3.4) – (2.3.5), является требование, чтобы матрица Лагранжа совпадала с матрицей cJ, т.е. была постоянной (не зависящей от q,p,t). Поэтому для канонических преобразований тождества (2.3.44) – (2.3.46) выполняются. Отсюда делаем заключение, что теорема 4 справедлива.

§4. Примеры канонических преобразований

Приведем некоторые простые, но практически важные примеры канонических преобразований. Старую и новую функции Гамильтона обозначим соответственно $H(q,p,t)$ и $\tilde{H}(Q,P,t)$.

Пример 1.

Тождественное преобразование

$$Q_j = q_j, \quad P_j = p_j \qquad (j = 1,2,...,n). \tag{2.4.1}$$

Это унивалентное каноническое преобразование; при этом $\tilde{H} = H(Q,P,t)$.

Пример 2.

Преобразование

$$Q_j = p_j, \quad P_j = q_j \qquad (j = 1,2,...,n). \tag{2.4.2}$$

Это каноническое преобразование с валентностью $c = -1$. Оно меняет ролями обобщенные координаты и обобщенные импульсы. При этом

$$\tilde{H} = -H(P,Q,t).$$

Пример 3.

Преобразование

$$Q_j = \alpha q_j, \quad P_j = \beta p_j \qquad (j = 1,2,...,n;\ \alpha = const,\ \beta = const,\ \alpha\beta \neq 0). \tag{2.4.3}$$

Это преобразование каноническое, и

$$\tilde{H} = \alpha\beta H(\frac{1}{\alpha}Q, \frac{1}{\beta}P, t).$$

Пример 4.

Преобразование

$$Q_j = \alpha p_j, \quad P_j = \beta q_j \qquad (j = 1,2,...,n;\ \alpha = const,\ \beta = const,\ \alpha\beta \neq 0). \tag{2.4.4}$$

Это преобразование также каноническое, а

$$\tilde{H} = -\alpha\beta H(\frac{1}{\beta}P, \frac{1}{\alpha}Q, t).$$

Примеры 2 и 4 показывают, что при канонических преобразованиях может исчезнуть различие между координатами и импульсами. Применение названий «импульс» и «координата» может стать чисто условным. Поэтому для пары переменных Q_i и P_i очень удобно название *«канонически сопряженные переменные»*.

Пример 5.

Перенос начала координат в фазовом пространстве

$$Q = q - f(t), \quad P = p - g(t) \tag{2.4.5}$$

представляет собой унивалентное каноническое преобразование. При этом новые переменные Q,P удовлетворяют системе дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона

$$\tilde{H} = H(Q + f(t), P + g(t), t) + \frac{dg^*}{dt}Q - \frac{df^*}{dt}P. \tag{2.4.6}$$

Пример 6.

Преобразование

$$q_j = \sqrt{2r_j}\sin\varphi_j, \quad p_j = \sqrt{2r_j}\cos\varphi_j \qquad (j = 1,2,...,n) \tag{2.4.7}$$

является унивалентным каноническим преобразованием.

Оно осуществляет переход от пары канонически сопряженных переменных q_j, p_j, играющих роль декартовых координат, к паре канонически сопряженных переменных φ_j, r_j (φ_j — «координата», r_j — «импульс»), имеющих характер полярных координат.

Если старая функция Гамильтона имела вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(q_j^2 + p_j^2), \qquad (2.4.8)$$

то уравнениям для переменных φ_j, r_j соответствует функция Гамильтона

$$\tilde{H} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j r_j . \qquad (2.4.9)$$

Пример 7.

Преобразование

$$Q_j = q_j - ip_j, \quad P_j = q_j + ip_j \qquad (j = 1,2,...,n), \qquad (2.4.10)$$

где i *— мнимая единица* $(i^2 = -1)$, *осуществляет переход к комплексно сопряженным переменным. Оно является каноническим с валентностью* $2i$ *и*

$$\tilde{H} = 2iH\left(\frac{P+Q}{2}, \frac{P-Q}{2i}, t\right). \qquad (2.4.11)$$

Если, например, старая функция Гамильтона имеет вид (2.4.8), то

$$\tilde{H} = i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Q_j P_j . \qquad (2.4.12)$$