Глава 3. Аналитическая структура силовых полей

§1. Диссипативные силы. Диссипативная функция

1°. Диссипативные системы. Закон изменения обобщенной энергии диссипативных систем

Как было показано в §3, п.2° главы 1, изменение обобщенной энергии $h(t,q,\dot{q})$ механической системы при ее движении подчиняется закону

$$\frac{dh(t,q,\dot{q})}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + N_q,$$

где $L(t,q,\dot{q})$ — кинетический потенциал, $N_q(t,q,\dot{q}) = \sum_{j=1}^{n} Q_j \dot{q}_j$ — виртуальная (обобщенная) мощность непотенциальных сил, действующих на механическую систему.

Если кинетический потенциал L не зависит явно от t, то данный закон приобретает вид

$$\frac{dh}{dt} = N_q. \tag{3.1.1}$$

Обобщенная энергия h в таком случае так же, как и кинетический потенциал L, не будет зависеть явно от времени t.

Определение 1.

Если виртуальная мощность $N_q(t,q,\dot{q})$ всех непотенциальных сил, действующих на голономную механическую систему, удовлетворяет неравенствам

$$N_q(t,q,\dot{q}) \le 0 \ \text{и} \ N_q(t,q,\dot{q}) \not\equiv 0$$

*при всех $t,q,\dot{q}$, где заданы эти силы, то такая механическая система называется **диссипативной системой**, а непотенциальные силы — **диссипативными силами**.*

Из закона (3.1.1) следует, что на движениях диссипативной системы обобщенная энергия не возрастает, ибо скорость ее изменения является неположительной функцией;

$$\frac{dh}{dt} = N_q \le 0.$$

О таких системах говорят, что при их движении происходит рассеивание энергии. На основе этого свойства дано и название сил, при действии которых происходит рассеивание энергии:

диссипативные силы — это силы, рассеивающие энергию.

Определение 2.

*Рассеивание энергии в процессе движения называется **диссипацией**.*

*Если функция $N_q(t,q,\dot{q})$ при любых t и q является определенно отрицательной относительно переменных $\dot{q}$, то **диссипация называется полной**.*

*Если функция $N_q(t,q,\dot{q})$ при любых t и q является знакопостоянной отрицательной по переменным $\dot{q}$, то **диссипация называется неполной**.*

Замечание.

К диссипативным системам относятся, в частности, стационарные голономные системы, осуществляющие свое движение в стационарном потенциальном поле и в поле диссипативных сил.

В таких системах обобщенная энергия $h(t,q,\dot{q})$ совпадает с полной механической энергией $E(q,\dot{q}) = T_2(q,\dot{q}) + \Pi(q)$, и закон (3.1.1) принимает вид:

$$\frac{dE}{dt} = N_q \le 0.$$

2°. Диссипативная функция. Диссипативная функция сил вязкого трения.

Определение 3.

Функция $\Phi(t,q,\dot q)$ *называется* ***диссипативной функцией****, если она обладает следующими свойствами:*

1) *задается при всех* $t,q,\dot q$ *, где определены движения механической системы,*
2) *является вещественной функцией, дифференцируемой по обобщенным скоростям* $\dot q$ *и непрерывной по остальным переменным в указанной области;*
3) *принимает неотрицательные значения в области задания;*
4) *обобщенные силы* Q_j*,* $j=\overline{1,n}$*, связаны с функцией* $\Phi(t,q,\dot q)$ *зависимостями*

$$Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot q_j}, \qquad j=\overline{1,n}. \tag{3.1.2}$$

Диссипативная функция впервые была введена в классическом труде Релея «Теория звука» для сил сопротивления движению, пропорциональных первой степени скорости.

Поэтому ***диссипативную функцию*** иначе называют ***функцией Релея***, распространив данное название и на другие зависимости диссипативных сил от скоростей.

Диссипативная функция Φ возникает, например, когда в системе действуют силы сопротивления движению, подчиняющиеся следующим законам, называемым ***законами сил вязкого трения*:**

1) *сила вязкого трения направлена против скорости движения материальной точки относительно той среды, в которой происходит движение;*
2) *величина силы вязкого трения зависит от величины относительной скорости материальной точки, т.е. от величины скорости ее движения относительно этой среды.*

Покажем, как функция Релея $\Phi(t,q,\dot q)$ связана с силами сопротивления, подчиняющимися законам 1) и 2).

Рассмотрим эту связь на примере сил сопротивления $\vec F_\nu$, действующих на точки P_ν, $\nu=\overline{1,N}$, механической системы по законам, представленным в виде:

$$\vec F_\nu = -k_\nu f_\nu(V_\nu)\frac{\vec V_\nu}{V_\nu}, \qquad \nu=\overline{1,N}. \tag{3.1.3}$$

С такими законами встречаемся, когда на движения механических систем оказывают влияния силы трения и (или) аэродинамические силы, а также при движении механических систем в жидких и газообразных средах.

В соотношениях (3.1.3):

- $\vec V_\nu$ — вектор скорости точки P_ν относительно внешней среды;
- $V_\nu = \left|\vec V_\nu\right|$ — модуль (величина) скорости;
- $k_\nu = k_\nu(t,q) \ge 0$ — коэффициент трения или сопротивления внешней среды; неотрицательная величина, зависящая от положений точек системы и, быть может, времени; эти коэффициенты зависят также от конструктивных параметров системы и параметров окружающей среды; они определяются и задаются, как правило, на основе наблюдений и в результате обработки экспериментальных данных;
- $f_\nu(V_\nu) \ge 0$ — закон изменения величины силы сопротивления в зависимости от скорости точки P_ν; неотрицательная функция.

Вычислим обобщенные силы, соответствующие системе сил $\left\{\vec F_\nu\right\}_{\nu=\overline{1,N}}$, задаваемых формулами (3.1.3).

По определению обобщенной силы Q_j, $\nu=\overline{1,N}$, имеем

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^{N} (\vec{F}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}).$$

Подставляя (3.1.3)

$$\vec{F}_\nu = -k_\nu f_\nu(V_\nu)\frac{\vec{V}_\nu}{V_\nu}, \qquad \nu = \overline{1, N}, \tag{3.1.3}$$

и учитывая соотношение $\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{V}_\nu}{\partial \dot{q}_j}$ из кинематической леммы Лагранжа, получим:

$$Q_j = -\sum_{\nu=1}^{N} k_\nu f_\nu(V_\nu)(\frac{\vec{V}_\nu}{V_\nu}, \frac{\partial \vec{V}_\nu}{\partial \dot{q}_j}) = -\sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{2} k_\nu \frac{f_\nu(V_\nu)}{V_\nu} \frac{\partial \vec{V}_\nu^2}{\partial \dot{q}_j}.$$

Отсюда приходим к следующему выражению обобщенной силы Q_j:

$$Q_j = -\sum_{\nu=1}^{N} k_\nu f_\nu(V_\nu)\frac{\partial V_\nu}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_{\nu=1}^{N} k_\nu \int_0^{V_\nu} f_\nu(u)\,du. \tag{3.1.4}$$

Обозначим

$$\Phi(t, q, \dot{q}) = \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu(t, q) \int_0^{V_\nu} f_\nu(u)\,du. \tag{3.1.5}$$

Легко видеть, что функция $\Phi(t, q, \dot{q})$ является неотрицательной при любых значениях $t, q, \dot{q}$.

Обобщенная сила (3.1.4) через функцию $\Phi(t, q, \dot{q})$, задаваемую формулой (3.1.5), будет вычисляться дифференцированием по координате $\dot{q}_j$:

$$Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}.$$

Следовательно, функция (3.1.5) является функцией Релея для системы сил сопротивления, задаваемых законами (3.1.3).

Эта функция Φ в общем случае зависит от времени t, обобщенных координат q и величин скоростей V_ν точек P_ν, $\nu = \overline{1, N}$, механической системы.

В выражении (3.1.5) явная зависимость функции Φ от переменных $\dot{q}$ не указывается. Эта зависимость проявляется через скорости V_ν.

В свою очередь, зависимость Φ от скоростей V_ν реализуется через функции

$$\varphi_\nu(V_\nu) = \int_0^{V_\nu} f_\nu(u)\,du,$$

причем, функции $\varphi_\nu(V_\nu)$ входят в функцию $\Phi(t, q, \dot{q})$ аддитивно.

Запишем выражения для функции Релея Φ в некоторых частных случаях. Пусть

$$f_\nu = V_\nu^m, \tag{3.1.6}$$

где $m \geq 0$ — целое число.

В частности, если $m = 0$, то $f_\nu(V_\nu) = 1$. В этом случае

$$\vec{F}_\nu = -k_\nu f_\nu(V_\nu)\frac{\vec{V}_\nu}{V_\nu}. \tag{3.1.7}$$

Такая сила называется ***силой сухого трения*** или ***силой кулонова трения***.

Сила сухого трения не зависит от величины скорости. От скорости зависит только направление действия этой силы. Оно противоположно направлению скорости движения.

Если $m = 1$, то $f_\nu(V_\nu) = V_\nu$. В этом случае

$$\vec{F}_\nu = -k_\nu \vec{V}_\nu. \tag{3.1.8}$$

Эта сила называется ***силой вязкого трения***, пропорциональной первой степени скорости. Как отмечалось выше, для таких сил впервые Релеем была введена диссипативная функция.

Формула (3.1.5) позволяет построить диссипативную функцию для сил (3.1.6) при любом значении $m \geq 0$, в том числе и в указанных частных случаях (3.1.7) и (3.1.8).

Согласно (3.1.5)

$$\Phi(t,q,\dot{q}) = \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu(t,q) \int_0^{V_\nu} f_\nu(u)\,du\,. \tag{3.1.5}$$

при любом целом $m \geq 0$ функция Φ определяется по формуле

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu V_\nu^{m+1}. \tag{3.1.9}$$

Из формулы (3.1.9) заключаем, что Φ является однородной функцией степени $m+1$ относительно модулей V_ν скоростей $\vec{V}_\nu$ точек механической системы и обращается в нуль только тогда, когда скорости всех точек принимают значения, равные нулю.

Найдем зависимость функции Φ от обобщенных скоростей $\dot{q}$.

Поскольку $\vec{V}_\nu = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}$, то для модуля V_ν скорости $\vec{V}_\nu$ можем записать:

$$V_\nu = \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right| = \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Подставляя в (3.1.9), получим

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right|^{m+1}$$

$$= \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu \left[\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 \right]^{(m+1)/2}.$$

Построенная формула показывает явную зависимость функции Φ от обобщенных скоростей $\dot{q}$.

Из нее видим, что в общем случае (когда связи не стационарны), функция Φ не является однородной функцией относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$.

Если связи стационарны, и обобщенные координаты q выбраны так, что их связь с $\vec{r}_\nu = \vec{r}_\nu(q)$, $\nu = \overline{1,N}$, не содержит явной зависимости от времени t, то функция Φ примет вид:

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu \left[\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^\nu \dot{q}_i \dot{q}_j \right]^{(m+1)/2}, \tag{3.1.10}$$

где

$$a_{ij}^\nu = \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \right), \qquad i,j = \overline{1,n}.$$

Из (3.1.10) следует, что при стационарных связях функция Релея Φ является однородной формой степени $m+1$ относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$.

При этом если коэффициенты $k_\nu(t,q) > 0$ для всех $\nu = \overline{1,N}$, то функция Φ обращается в нуль только тогда, когда все скорости $V_\nu = 0$.

Так же, как и при доказательстве определенной положительности по переменным $\dot{q}$ при любых значениях q и t квадратичной формы T_2, входящей в выражение для кинетической энергии, легко устанавливается, что $\vec{V}_\nu = 0$, $\nu = \overline{1,N}$, тогда и только тогда, когда $\dot{q} = 0$.

А это значит, что функция Φ является определенно положительной по отношению к переменным $\dot{q}$ при любых значениях q и t.

Примечание.

Поскольку обобщенная сила Q_j связана с функцией Φ соотношением $Q_j = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_j}$, а функция Φ зависит от модуля скорости V_ν, то при определении Q_j возникает необходимость вычислить частные производные от модуля скорости V_ν или от функции $\left|\dot{q}_j\right|$.

При этом вычислении следует иметь в виду, что

$$\frac{\partial\left|\dot{q}_j\right|}{\partial\dot{q}_j} = sign\,\dot{q}_j = \begin{cases} 1 \ \text{при} \ \dot{q}_j > 0, \\ -1 \ \text{при} \ \dot{q}_j < 0. \end{cases}$$

Например, при $n = 1$ формула (3.1.10) задает функцию $\Phi = \dfrac{k}{m+1}\left|\dot{q}\right|^{m+1}$, где

$$k = \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu \left(\frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q}, \frac{\partial\vec{r}_\nu}{\partial q} \right)^{(m+1)/2} .$$

А тогда обобщенная сила Q, построенная по ней, представляется в форме:

$$Q = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial\left|\dot{q}\right|}\cdot\frac{\partial\left|\dot{q}\right|}{\partial\dot{q}} = -k\left|\dot{q}\right|^m sign\,\dot{q} .$$

3º. Закон изменения обобщенной энергии при движении в силовых полях, задаваемых однородной функцией Релея.

Пусть функция Релея $\Phi(t,q,\dot{q})$ является однородной функцией степени m $(m \ge 1)$ относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$.

Вычислим виртуальную мощность обобщенных сил Q_j, $j = \overline{1,n}$, задаваемых этой функцией $\Phi(t,q,\dot{q})$:

$$N_q = \sum_{j=1}^{n} Q_j\,\dot{q}_j = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j .$$

Согласно теореме Эйлера для функции Φ, однородной степени m по переменным $\dot{q}$, можем записать:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j = m\Phi(t,q,\dot{q}) .$$

Поэтому

$$N_q = -m\Phi(t,q,\dot{q}) .$$

А тогда закон изменения обобщенной энергии для механических систем с кинетическим потенциалом L, который не зависит от t явно, примет вид:

$$\frac{dh}{dt} = -m\Phi(t,q,\dot{q}) .$$

Если голономная система имеет стационарные связи, и потенциальная энергия не зависит от t, то обобщенная энергия равна полной энергии E механической системы:

$$h(q,\,\dot{q}) = E(q,\dot{q}) = T_2(q,\dot{q}) + \Pi(q) ,$$

Следовательно, закон изменения полной энергии в этом случае имеет вид:

$$\frac{dE}{dt} = -m\Phi(t,q,\dot{q}) \le 0 .$$

Поскольку $\Phi(t,q,\dot{q})$ — определенно положительная функция относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$ при всех t и q, то равенство нулю возможно только при $\dot{q} = 0$.

Таким образом, приходим к следующему заключению:

При движении ***диссипативных систем*** *со стационарными связями* ***скорость рассеивания полной механической энергии*** *равна функции Релея, увеличенной в* m *раз, и эта скорость всегда отрицательна.*

§2. Гироскопические силы

1°. Общие свойства гироскопических сил.

Пусть $Q=(Q_1, ..., Q_n)^*$ — вектор обобщенных сил. В общем случае он зависит от $t,q,\dot{q}$, т.е. можем записать $Q=Q(t,q,\dot{q})$. Будем считать, что вектор-функция $Q(t,q,\dot{q})$ определена при всех $t,\ q\in E^n,\ \dot{q}\in E^n$, непрерывна по совокупности аргументов и в области задания не является тождественным нулем

$$Q(t,q,\dot{q})\not\equiv 0. \qquad (3.2.1)$$

Определение 1.

Вектор $Q(t,q,\dot{q})$ *будем называть* ***гироскопическим*** *(соответственно,* ***обобщенные силы*** $Q_1,..., Q_n$ *будем называть* ***гироскопическими****), если виртуальная мощность* $N_q(t,q,\dot{q})$ *обобщенных сил, задаваемая формулой*

$$N_q(t,q,\dot{q})=\dot{q}^*Q=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j Q_j(t,q,\dot{q}) ,$$

тождественно равна нулю. Иначе говоря, для любых $t,q,\dot{q}$ *из области задания функции* $Q(t,q,\dot{q})$ *имеем тождество*

$$Q^*\dot{q}\equiv 0 . \qquad (3.2.2)$$

Запишем закон изменения обобщенной энергии при действии гироскопических сил в совокупности с потенциальными силами.

Поскольку согласно этому закону

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}+N_q, \qquad (3.2.3)$$

где $h=h(t,q,\dot{q})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\dot{q}_j=-L(t,q,\dot{q})=L_2-L_0$ — обобщенная энергия, то из условия (3.2.2) следует, что гироскопические силы не влияют на изменение обобщенной энергии, а также и полной механической энергии, ибо при $N_q\equiv 0$ закон (3.2.3) принимает вид:

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Установим теперь, какими аналитическими свойствами обладают гироскопические силы.

Свойство 1.

Пусть n' *— это количество обобщенных сил, для которых выполняются условия* (3.2.1), (3.2.2). *Тогда* $n\geq n'\geq 2$ *(т.е. количество обобщенных сил должно быть не меньше двух).*

Доказательство. Доказательство проводим от противного.

Пусть $n'=1$. Это значит, что имеется всего одна обобщенная сила Q_j, такая, что для нее выполняется

$$Q_j(t,q,\dot{q})\not\equiv 0, \qquad (3.2.4)$$

$$Q_j(t,q,\dot{q})\dot{q}_j\equiv 0 , \qquad (3.2.5)$$

а все остальные обобщенные силы $Q_i(t,q,\dot{q})$ при $i\neq j$, $i=\overline{1,n}$ тождественно равны нулю.

Тогда в тождестве (3.2.5) полагаем $\dot{q}_j\neq 0$. Поскольку оно справедливо для любых $\dot{q}_j$, то при $\dot{q}_j\neq 0$ из него следует, что

$$Q_j(t,q,\dot{q})\Big|_{\dot{q}_j\neq 0}\equiv 0 .$$

А это значит, что неравенство (3.2.4) может выполняться только при $\dot{q}_j = 0$.

Пусть оно выполняется при некотором значении $t = \bar{t}$, $q = \bar{q}$.

Тогда в силу непрерывности функции $Q_j(\bar{t}, \bar{q}, \dot{q})$ по $\dot{q}_j$ неравенство нулю должно выполняться не только при $\dot{q}_j = 0$, но и в некоторой окрестности точки $\dot{q}_j = 0$, т.е. в точках $\dot{q}_j \neq 0$ из этой окрестности. Получили противоречие с выводом о том, что при $\dot{q}_j \neq 0$ выполняется тождество $Q_j(t, q, \dot{q})\big|_{\dot{q}_j \neq 0} \equiv 0$ при всех $\dot{q}_j \neq 0$ и любых t, q из области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$. Что и требовалось доказать.

Свойство 2.

*Если вектор $Q(t, q, \dot{q})$ — **гироскопический**, то каждая из обобщенных сил $Q_j(t, q, \dot{q}) \not\equiv 0$, $j = \overline{1, n}$, явно зависит от $\dot{q}$.*

Доказательство (от противного).

Пусть $Q(t, q, \dot{q})$ — гироскопический вектор, но обобщенная сила с номером j, не являющаяся тождественным нулем, не зависит от $\dot{q}$, т.е. имеем

$$Q_j = Q_j(t, q) \not\equiv 0. \tag{3.2.6}$$

Поскольку для Q справедливо тождество (3.2.2), то полагаем в нем $\dot{q}_i = 0$ для $i \neq j$, $i = \overline{1, n}$, и $\dot{q}_j \neq 0$. Получим из тождества (3.2.2)

$$Q_j(t, q)\dot{q}_j \equiv 0 \text{ при } \dot{q}_j \neq 0.$$

Отсюда следует, что $Q_j(t, q) \equiv 0$. А это противоречит условию (3.2.6). Что и требовалось доказать.

Введем следующее обозначение. Положим в обобщенной силе $Q_j(t, q, \dot{q})$, для которой выполняется неравенство (3.2.4),

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \ldots = \dot{q}_{j-1} = \dot{q}_{j+1} = \ldots = \dot{q}_n = 0,$$

а $\dot{q}_j$ будем считать переменной величиной.

Обозначим получившуюся функцию Q_j через $\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Свойство 3.

При любом $j = \overline{1, n}$, для которого выполняется

$$Q_j(t, q, \dot{q}) \not\equiv 0, \tag{3.2.7}$$

справедливы тождества

$$\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \equiv 0. \tag{3.2.8}$$

Иначе говоря, во все ненулевые компоненты Q_j вектора Q координата $\dot{q}_j$ вектора $\dot{q}$ с тем же номером, что и компонента Q_j, не входит свободно.

Доказательство (от противного).

Пусть $\dot{q}_j \neq 0$, $\dot{q}_i = 0$ для $i = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и $\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \not\equiv 0$. Тогда из тождества (3.2.2) следует, что

$$\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j)\dot{q}_j \equiv 0.$$

Но поскольку $\dot{q}_j \neq 0$, то отсюда получаем, что

$$\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \equiv 0 \text{ при всех } \dot{q}_j \neq 0. \tag{3.2.9}$$

Если предположить, что

$$\widehat{Q}_j(t,q,\dot{q}_j)\Big|_{\dot{q}_j=0} \not\equiv 0 \tag{3.2.10}$$

(т.е. нарушается тождество (3.2.8)), то неравенство (3.2.10) в силу непрерывности функции $\widehat{Q}_j(t,q,\dot{q}_j)$ по $\dot{q}_j$ при любых фиксированных t, q будет выполняться и в некоторой окрестности точки $\dot{q}_j = 0$, что противоречит тождеству (3.2.9).

Свойство 4.

Справедливо тождество $Q(t,q,\dot{q})\big|_{\dot{q}=0} \equiv 0$.

Это утверждение является следствием из свойства 3.

Свойства 2 и 4 объединим и сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1.

Если вектор-функция $Q(t,q,\dot{q})$ *в области задания обладает следующими свойствами:*

- *непрерывна по совокупности аргументов;*
- $Q(t,q,\dot{q}) \not\equiv 0$ *(*Q *не является тождественным нулем);*
- $\dot{q}^*Q(t,q,\dot{q}) \equiv 0$ *(*Q *является гироскопической).*

Тогда каждая компонента вектор-функции $Q(t,q,\dot{q})$ *явно зависит от* $\dot{q}$, *и* $Q(t,q,0)\equiv 0$ *при всех значениях* t *и* q *в области задания.*

2º. Теорема Зубова о каноническом разложении гироскопических сил

Пусть вектор обобщенных координат q имеет размерность $n \geq 2$. Будем рассматривать вектор-функцию $Q(t,q,\dot{q})$ той же размерности, что и вектор $\dot{q}$. Пусть $Q(t,q,\dot{q})$ обладает следующими свойствами:

1) $Q(t,q,\dot{q})$ — вещественная и непрерывная по совокупности аргументов при $t \in <t_0, t_1>$, $q \in G$, $\dot{q} \in G_1$; область G_1 содержит точку $\dot{q} = 0$;
2) в области задания выполняется неравенство

$$Q(t,q,\dot{q}) \not\equiv 0 \tag{3.2.11}$$

Функция $Q(t,q,\dot{q})$ может быть или не быть гироскопической.

Лемма 2.

Если выполнено условие

$$Q(t,q,0) \equiv 0, \tag{3.2.12}$$

то вектор-функцию $Q(t,q,\dot{q})$ *можно представить в виде*

$$Q(t,q,\dot{q}) = H_1(t,q,\dot{q}) + H(t,q,\dot{q}), \tag{3.2.13}$$

где вектор-функции $H(t,q,\dot{q})$ *и* $H_1(t,q,\dot{q})$ *обладают следующими свойствами:*

а) $H(t,q,\dot{q})$ *и* $H_1(t,q,\dot{q})$ *вещественные и непрерывные в области задания функции* $Q(t,q,\dot{q})$;

б) $H(t,q,0) \equiv 0$, $H_1(t,q,0) \equiv 0$;

в) функция $H_1(t,q,\dot{q})$ *через вектор-функцию* $Q(t,q,\dot{q})$ *вычисляется по формуле*

$$H_1(t,q,\dot{q}) = \frac{\dot{q}^*Q}{\dot{q}^2}\dot{q}; \tag{3.2.14}$$

г) функция $H(t,q,\dot{q})$ *представима в виде*

$$H(t,q,\dot{q}) = \Gamma(t,q,\dot{q})\dot{q}, \tag{3.2.15}$$

где $\Gamma(t,q,\dot{q})$ *— кососимметрическая матрица, т.е.* $\Gamma^*(t,q,\dot{q}) = -\Gamma(t,q,\dot{q})$;

д) хотя бы одна из вектор-функций $H(t,q,\dot{q})$ *и* $H_1(t,q,\dot{q})$ *не является тождественным нулем в области задания функции* $Q(t,q,\dot{q})$.

Примечание 1.

При выполнении условий 1) и 2), накладываемых на вектор-функцию $Q(t,q,\dot{q})$, и тождества (3.2.12) легко показать, что $Q(t,q,\dot{q})$ явно зависит от $\dot{q}$, и в области задания вектор-функции $Q(t,q,\dot{q})$ найдется хотя бы одна такая точка $(\bar{t},\bar{q},\bar{\dot{q}})\neq 0$, в которой $\bar{\dot{q}}\neq 0$ и $Q(\bar{t},\bar{q},\bar{\dot{q}})\neq 0$.

Действительно, если бы было $Q=Q(t,q)$, т.е. функция Q не зависела бы от $\dot{q}$, то из условия (3.2.12) следовало бы $Q(t,q)\equiv 0$, что противоречит неравенству (3.2.11). Следовательно, $Q(t,q,\dot{q})$ зависит явно от $\dot{q}$.

Наличие точки $(\bar{t},\bar{q},\bar{\dot{q}})$ в области задания функции $Q(t,q,\dot{q})$, для которой выполняется $Q(\bar{t},\bar{q},\bar{\dot{q}})\neq 0$, вытекает из неравенства (3.2.11).

Поскольку при $\dot{q}=0$ справедливо тождество (3.2.12), то, очевидно, что $\bar{\dot{q}}$ не может быть равно нулю.

Примечание 2.

Легко видеть, что вектор $H_1(t,q,\dot{q})$ коллинеарен вектору $\dot{q}$ при любых t, q, $\dot{q}$ из области задания вектор-функции $Q(t,q,\dot{q})$, а вектор $H(t,q,\dot{q})$ в этой области ортогонален вектору $\dot{q}$, т.е. для $H(t,q,\dot{q})$ справедливо тождество

$$\dot{q}^* H(t,q,\dot{q})\equiv 0.$$

Действительно, согласно (3.2.15) имеем

$$\dot{q}^* H(t,q,\dot{q})=\dot{q}^*\Gamma(t,q,\dot{q})\dot{q}\equiv 0,$$

ибо квадратичная форма с кососимметрической матрицей является тождественным нулем.

Доказательство леммы 2.

Пусть вектор $Q(t,q,\dot{q})$ удовлетворяет условиям 1,2 и тождеству (3.2.12). Тогда в области задания функции $Q(t,q,\dot{q})$ при $\dot{q}\neq 0$ будем вычислять функцию $H_1(t,q,\dot{q})$ по формуле (3.2.14):

$$H_1(t,q,\dot{q})=\frac{\dot{q}^* Q}{\|\dot{q}\|^2}\dot{q}.$$

Очевидно, $H_1(t,q,\dot{q})$ определена и непрерывна по переменным t, q, $\dot{q}$ при $\dot{q}\neq 0$. Это следует из непрерывности $Q(t,q,\dot{q})$. Доопределим ее при $\dot{q}=0$. Для этого воспользуемся следующей оценкой функции $H_1(t,q,\dot{q})$, справедливой при всех $\dot{q}\neq 0$.

$$\|H_1\|=\left|\frac{\dot{q}^* Q}{\|\dot{q}\|}\right|\cdot\left\|\frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|}\right\|\leq\|Q\|\left\|\frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|}\right\|^2\leq\|Q\|.$$

Из данной оценки функции $H_1(t,q,\dot{q})$, непрерывности $Q(t,q,\dot{q})$ и тождества (3.2.12) следует, что

$$\|H_1(t,q,\dot{q})\|\to 0 \text{ при } \|\dot{q}\|\to 0, \text{ ибо } \|Q(t,q,\dot{q})\|\to 0 \text{ при } \|\dot{q}\|\to 0.$$

Поэтому доопределим вектор-функцию $H_1(t,q,\dot{q})$ при $\dot{q}=0$, положив (по непрерывности):

$$H_1(t,q,0)\equiv 0. \qquad (3.2.16)$$

Таким образом, вектор-функция $H_1(t,q,\dot{q})$, задаваемая формулами (3.2.14), (3.2.16), будет определена и непрерывна в области задания функции $Q(t,q,\dot{q})$, и будет удовлетворять условию б). Иначе говоря, для нее справедливы первые три утверждения леммы 2.

Положим теперь (по определению)

$$H(t,q,\dot{q})=Q(t,q,\dot{q})-H_1(t,q,\dot{q}) \qquad (3.2.17)$$

и покажем, что функция $H(t,q,\dot{q})$ удовлетворяет утверждениям леммы 2.

Во-первых, она определена и непрерывна в области задания функции $Q(t,q,\dot q)$, поскольку является разностью функций Q и H_1, обладающих этими свойствами (т.е. утверждение а) справедливо).

Во-вторых, поскольку $Q(t,q,\dot q)\big|_{\dot q=0}\equiv 0$ согласно условию (3.2.12), а для $H_1(t,q,\dot q)$ при $\dot q=0$ справедливо тождество (3.2.16), то для функции $H(t,q,\dot q)$ будем иметь:

$$H(t,q,\dot q)\big|_{\dot q=0}=Q(t,q,\dot q)\big|_{\dot q=0}-H_1(t,q,\dot q)\big|_{\dot q=0}\equiv 0.$$

Таким образом доказали выполнение второго условия (условия б)) для функции $H(t,q,\dot q)$. Покажем теперь справедливость четвертого утверждения (условия г)). Подставим в (3.2.17) формулу (3.2.14), справедливую для вектор-функции $H_1(t,q,\dot q)$. Получим

$$H(t,q,\dot q)=Q-\frac{\dot q^*Q}{\dot q^2}\dot q=Q\frac{\dot q^*\dot q}{\dot q^2}-\dot q\frac{\dot q^*Q}{\dot q^2}=\frac{Q\dot q^*}{\dot q^2}\dot q-\dot q\frac{Q^*\dot q}{\dot q^2}=\frac{Q\dot q^*-\dot q Q^*}{\dot q^2}\dot q=\Gamma(t,q,\dot q)\dot q. \quad (3.2.18)$$

Здесь ввели обозначение

$$\Gamma(t,q,\dot q)=\frac{Q\dot q^*-\dot q Q^*}{\dot q^2}. \quad (3.2.19)$$

Матрица $\Gamma(t,q,\dot q)$, очевидно, определена при всех $t,q,\dot q$ в области задания функции $Q(t,q,\dot q)$, кроме точек, где $\dot q=0$. Однако при $\dot q=0$ функция $H(t,q,\dot q)$ удовлетворяет тождеству $H(t,q,0)\equiv 0$. И поэтому формула (3.2.18) останется справедливой, если в ней положить $\Gamma(t,q,0)\equiv 0$.

Доопределим матрицу $\Gamma(t,q,\dot q)$, считая, что при $\dot q=0$ и $\forall t\in<t_0,t_1>$, $\forall q\in G$ она обращается в тождественный нуль.

Поскольку $\Gamma(t,q,\dot q)$ — кососимметрическая матрица (в данном факте легко убедиться, если вычислим $\Gamma^*(t,q,\dot q)$, учитывая формулу (3.2.19)), то все сказанное о функции $H(t,q,\dot q)$ подтверждает, что условие г) леммы 2 выполняется.

Утверждение д) также выполняется. Действительно, представление (3.2.13) вектор-функции $Q(t,q,\dot q)$ в области ее задания в виде суммы вектор-функций $H_1(t,q,\dot q)$ и $H(t,q,\dot q)$, задаваемых формулами (3.2.14), (3.2.15), (3.2.19), – справедливо. А тогда, поскольку $Q(t,q,\dot q)\not\equiv 0$, хотя бы одно из слагаемых в правой части (3.2.13) не будет тождественным нулем. Лемма 2 доказана полностью.

Докажем теперь теорему Зубова о каноническом разложении гироскопических сил.

Теорема Зубова (о каноническом разложении гироскопических сил).

Для того чтобы вектор-функция $Q(t,q,\dot q)$, не являющаяся тождественным нулем, заданная, вещественная и непрерывная по совокупности аргументов $t,q,\dot q$ в области $t\in I_t$, $q\in G$, $\dot q\in G_1$, была ***гироскопической****, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде*

$$Q(t,q,\dot q)=\Gamma(t,q,\dot q)\dot q, \quad (3.2.20)$$

где $\Gamma(t,q,\dot q)$ — вещественная кососимметрическая матрица, определенная в области задания функции $Q(t,q,\dot q)$, т.е. для нее выполняется тождество

$$\Gamma^*(t,q,\dot q)\equiv-\Gamma(t,q,\dot q).$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть

$$Q(t,q,\dot q)\not\equiv 0, \quad (3.2.21)$$

$Q(t,q,\dot q)$ — непрерывная вектор-функция в области задания и являющаяся гироскопической, т.е. для нее (согласно определению гироскопического вектора) справедливо тождество

$$\dot q^*Q(t,q,\dot q)\equiv 0. \quad (3.2.22)$$

Докажем, что вектор-функция $Q(t,q,\dot q)$ представима в виде (3.2.20).

1. Поскольку $Q(t,q,\dot q)$ — гироскопический вектор, то из леммы 1 следует
$$Q(t,\,q,\,0)\equiv 0\,. \tag{3.2.23}$$
2. Так как вектор-функция $Q(t,\,q,\,\dot q)$ непрерывна по совокупности аргументов, и для нее выполняются соотношения (3.2.21) и (3.2.23), то согласно лемме 2 она представима в виде
$$Q(t,q,\dot q)=\frac{\dot q^{*}Q}{\dot q^{2}}\dot q+\Gamma(t,q,\dot q)\,\dot q\,, \tag{3.2.24}$$
где $\Gamma(t,q,\dot q)$ — вещественная кососимметрическая матрица, определенная в области задания вектор-функции $Q(t,q,\dot q)$.
3. Поскольку выполнено тождество (3.2.22), то при подстановке его в разложение (3.2.24) получаем формулу (3.2.20). Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть выполнены условия:

1) $Q(t,q,\dot q)\not\equiv 0$ и $Q(t,q,\dot q)$ — непрерывная вектор-функция по совокупности аргументов в области задания;

2) вектор-функция $Q(t,q,\dot q)$ представима в виде $Q(t,q,\dot q)=\Gamma(t,q,\dot q)\dot q$, где $\Gamma(t,q,\dot q)$ — кососимметрическая матрица.

Надо доказать, что $Q(t,q,\dot q)$ — гироскопический вектор, т.е. $\dot q^{*}Q(t,q,\dot q)\equiv 0$. Утверждение будет доказано, если показать справедливость тождества (3.2.22).

Действительно, оно справедливо, поскольку
$$\dot q^{*}Q=\dot q^{*}\Gamma(t,q,\dot q)\dot q\,,$$
и правая часть этого равенства тождественно равна нулю, ибо она является квадратичной формой с кососимметрической матрицей коэффициентов. Теорема доказана.

Определение 2.

Представление гироскопических сил в виде (3.2.20), *где матрица* $\Gamma(t,q,\dot q)$ *удовлетворяет условиям теоремы Зубова, называется* ***каноническим разложением гироскопических сил***, *а* ***матрица*** $\Gamma(t,q,\dot q)$ *называется* ***канонической*** *для заданного вектора* $Q(t,q,\dot q)$ *гироскопических сил*.

Замечание.

В каноническом разложении гироскопических сил матрица $\Gamma(t,q,\dot q)$ не является единственной. Очевидно, если матрица $\Gamma_1(t,q,\dot q)$ является канонической, то любая матрица Γ, определяемая по формуле
$$\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2(t,q,\dot q)\,,$$
где $\Gamma_2(t,q,\dot q)$ — кососимметрическая матрица и такая, что
$$\Gamma(t,q,\dot q)\,\dot q\equiv 0\,, \tag{3.2.25}$$
будет также давать каноническое разложение вектора Q. А это значит, что матрица Γ будет также канонической. Действительно, пусть
$$Q(t,q,\dot q)\equiv\Gamma_1(t,q,\dot q)\,\dot q\,. \tag{3.2.26}$$
Тогда
$$(\Gamma_1(t,q,\dot q)+\Gamma_2(t,q,\dot q))\dot q\equiv\Gamma_1(t,q,\dot q)\,\dot q+\Gamma_2(t,q,\dot q)\,\dot q$$
Учитывая тождества (3.2.25) и (3.2.26), получим
$$(\Gamma_1(t,q,\dot q)+\Gamma_2(t,q,\dot q))\,\dot q\equiv Q(t,q,\dot q)\,. \tag{3.2.27}$$
Поскольку Γ_1 и Γ_2 — кососимметрические матрицы, то матрица $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ будет также кососимметрической. Поэтому (3.2.27) является каноническим разложением вектора Q, и матрица Γ является канонической.

Справедлива следующая теорема.

Теорема.

Если матрица $\Gamma_1(t,q,\dot q)$ *является* ***канонической для заданного вектора*** $Q(t,q,\dot q)$ ***гироскопических сил****, то все семейство канонических матриц* $\Gamma(t,q,\dot q)$*, задающих разложение вектора* $Q(t,q,\dot q)$*, описывается формулой*

$$\Gamma(t,q,\dot q)=\Gamma_1(t,q,\dot q)+\Gamma_2(t,q,\dot q)\,, \tag{3.2.28}$$

где $\Gamma_2(t,q,\dot q)$ *— произвольная кососимметрическая матрица, удовлетворяющая тождеству* (3.2.25).

Доказательство.

Выше показано, что любая матрица Γ, задаваемая формулой (3.2.28), является канонической для вектора Q. Покажем теперь, что любую каноническую для вектора Q матрицу $\overline{\Gamma}(t,q,\dot q)$ можно представить в виде (3.2.28). Для этого сначала покажем, что если Γ_0 и Γ_1 — две канонические матрицы для вектора Q, то выполняется тождество

$$(\Gamma_0-\Gamma_1)\,\dot q\equiv 0\,. \tag{3.2.29}$$

Действительно, поскольку Γ_0 и Γ_1 — канонические матрицы вектора Q, то будем иметь

$$Q(t,q,\dot q)\equiv\Gamma_0(t,q,\dot q)\,\dot q\,,\qquad\qquad Q(t,q,\dot q)\equiv\Gamma_1(t,q,\dot q)\,\dot q\,.$$

Вычитая одно тождество из другого, получим

$$0\equiv Q(t,q,\dot q)-Q(t,q,\dot q)\equiv\Gamma_0(t,q,\dot q)\,\dot q-\Gamma_1(t,q,\dot q)\,\dot q=(\Gamma_0(t,q,\dot q)-\Gamma_1(t,q,\dot q))\,\dot q$$

Это значит, что матрица $\Gamma_0-\Gamma_1$ удовлетворяет тождеству (3.2.29), или, что то же самое, тождеству (3.2.25). А тогда любую каноническую для вектора Q матрицу $\overline{\Gamma}(t,q,\dot q)$ можно представить в виде

$$\overline{\Gamma}(t,q,\dot q)=\Gamma_1(t,q,\dot q)+(\overline{\Gamma}(t,q,\dot q)-\Gamma_1(t,q,\dot q))\,,$$

где $\Gamma_1(t,q,\dot q)$ — матрица, о которой говорится в теореме.

По доказанному, матрица

$$\Gamma_2(t,q,\dot q)=\overline{\Gamma}(t,q,\dot q)-\Gamma_1(t,q,\dot q)$$

удовлетворяет тождеству (3.2.25). Следовательно, матрица $\overline{\Gamma}(t,q,\dot q)$ принадлежит семейству (3.2.28). Теорема доказана.

Замечание.

Согласно доказанной теореме, в формуле (3.2.28) в качестве матрицы Γ_1 можно взять любую каноническую матрицу вектора Q. В частности, такой матрицей может служить кососимметрическая матрица Γ_1, построенная через вектор Q по формуле (3.2.19).

§3. Каноническая структура силовых полей

1°. Теорема Зубова о каноническом разложении поля направлений в системах обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)\,. \tag{3.3.1}$$

В этой системе x – вектор размерности $[n\times 1]$, $f(t,x)$ – вещественная вектор-функция размерности $[n\times 1]$, непрерывная при всех t из некоторого интервала I_t на вещественной оси (в частности, I_t может совпадать со всей осью или полуосью) и при всех x из области G n-мерного пространства E^n.

Область G содержит точку $x=0$, а вместе с ней и отрезки, соединяющие точку $x=0$ с любой точкой $\overline{x}$ из области G.

Определение 1.

Множество векторов $f = f(t,x)$ *в пространстве* E^n*, образованное при изменении* x *в области* G *и* t *в интервале* I_t*, называется **полем направлений системы уравнений*** (3.3.1).

Вектор $f = f(t,x)$ из поля направлений задает скорость и направление изменения положения x в момент времени t на движении системы (3.3.1).

Введем функцию

$$W(t,x) = x^* f(t,x). \tag{3.3.2}$$

Она определена и непрерывна в области задания вектор-функции $f(t,x)$. Наложим на эту функцию дополнительное условие.

Будем считать, что функция $W(t,x)$ непрерывно дифференцируема по x при любом фиксированном t.

Иначе говоря, $grad_x W(t,x)$ является непрерывной вектор-функцией по совокупности аргументов.

Замечание.

Безусловно, указанное требование к функции $W(t,x)$ накладывает дополнительное условие на вектор-функцию $f(t,x)$.

Например, оно будет выполняться в том случае, если потребуем, чтобы вектор-функция $f(t,x)$ была непрерывно дифференцируема по x при любом фиксированном t.

Однако можно привести примеры, когда $f(t,x)$ не является непрерывно дифференцируемой по x, а функция $W(t,x)$, задаваемая формулой (3.3.2), тем не менее, будет непрерывно дифференцируемой.

Поэтому условие непрерывной дифференцируемости функции $W(t,x)$ предъявляет более слабые требования к вектор-функции $f(t,x)$.

Теорема Зубова (о каноническом представлении поля направлений).

Если выполнены условия, накладываемые на вектор-функцию $f(t,x)$ *и функцию* $W(t,x)$*, сформулированные выше, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует функция* $V(t,x)$ *вещественная, непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по* x *при любом фиксированном* t *в области задания правых частей системы* (3.3.1).
2. *Функция* $V(t,x)$ *является решением уравнения*

$$x^* grad_x V(t,x) = W(t,x), \tag{3.3.3}$$

причем $V(t,0) \equiv 0$. *В этом уравнении через* $grad_x V(t,x)$ *обозначен вектор*

$$grad_x V(t,x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^* .$$

3. *Правые части системы* (3.3.1) *через функцию* $V(t,x)$ *представимы в виде*

$$f(t,x) = grad_x V + H(t,x), \tag{3.3.4}$$

где вектор-функция $H(t,x)$ *определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания правых частей системы* (3.3.1) *и в этой области удовлетворяет тождествам по переменным* t, x:

$$x^* H(t,x) \equiv 0, \quad H(t,0) \equiv 0. \tag{3.3.5}$$

4. *Если* $H(t,x) \not\equiv 0$, *то вектор-функция* $H(t,x)$ *представима в виде*

$$H(t,x) = \Gamma(t,x)x, \tag{3.3.6}$$

где $\Gamma(t,x)$ *— кососимметрическая матрица размерности* $(n \times n)$*, т.е. для нее справедливо соотношение*

$$\Gamma(t,x) = -\Gamma^*(t,x). \tag{3.3.7}$$

Доказательство.

Пусть $W(t,x)$ — функция, о которой говорится в теореме. Построим в области задания правых частей системы (3.3.1) функцию

$$V(t,x) = \int_0^1 \frac{1}{y} W(t,yx)\,dy = \int_0^1 x * f(t,yx)\,dy\,. \tag{3.3.8}$$

Здесь y — скалярная величина, принимающая значения из отрезка $[0,1]$. Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы.

1. *Установим справедливость первого утверждения теоремы.*

- Докажем первую часть этого утверждения:

«Функция $V(t,x)$*, задаваемая формулой* (3.3.8)*, определена и непрерывна по совокупности аргументов при всех* $x \in G$, $t \in I_t$ *».*

Действительно, подынтегральная функция $x * f(t,yx)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов t, x, y при всех $x \in G$, $t \in I_t$ и $y \in [0,1]$. Поэтому интеграл в (3.3.8) существует при любых значениях аргументов t, x, $x \in G$, $t \in I_t$.

Из непрерывности подынтегральной функции по t, x следует (согласно теореме о непрерывной зависимости интеграла от параметров) непрерывность интеграла, стоящего в правой части равенства (3.3.8).

Следовательно, функция $V(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных t,x в указанном множестве.

- Докажем вторую часть первого утверждения теоремы:

«Функция $V(t,x)$*, непрерывно дифференцируема по* x *при любом фиксированном* t *из интервала* I_t *в области задания правых частей системы* (3.3.1)*».*

Вычислим частную производную по x_i, $i=\overline{1,n}$, от подынтегральной функции $W(t,x)$. Такая частная производная существует, так как функция $\frac{1}{y} = W(t,z)$ непрерывно дифференцируема по z_i, $i=\overline{1,n}$, и функция $z_i = y x_i$ непрерывно дифференцируема по x_i.

В результате вычислений, с учетом обозначения $z = yx$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{W(t,z)}{y}\right) = \frac{1}{y}\frac{\partial W}{\partial z_i}\frac{\partial z_i}{\partial x_i} = \frac{1}{y}\frac{\partial W}{\partial z_i}\, y = \frac{\partial W}{\partial z_i}, \qquad i=\overline{1,n}\,.$$

Поскольку $W(t,z)$ непрерывно дифференцируема по z, то $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{W(t,z)}{y}\right)$ будет непрерывной по x.

А тогда из теоремы Лейбница о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра, можем сделать следующие выводы:

– частная производная по x_i от интеграла $\int_0^1 \frac{W(t,xy)}{y}dy$ существует;

– справедливо правило Лейбница для вычисления производной, согласно которому

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_0^1 \frac{W(t,xy)}{y}dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{W(t,z)}{y}\right)dy\,;$$

– интеграл, стоящий справа в этом выражении, будет непрерывен по x при любом фиксированном t из интервала I_t.

Поскольку, согласно (3.3.8),

$$\int_0^1 \frac{W(t,xy)}{y}dy = V(t,x),$$

то из указанных выводов следует:

а) частная производная $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ существует для всех $i=\overline{1,n}$;

б) эта частная производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{W(t,yx)}{y}\right)dy = \int_0^1 \frac{\partial W(t,z)}{\partial z_i}\bigg|_{z=yx} dy;$$

в) производная $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ непрерывна по переменным x при любом фиксированном $t \in I_t$, поскольку интеграл непрерывен по x при любом фиксированном t.

Этим полностью завершили доказательство первого утверждения теоремы Зубова.

2. *Установим справедливость второго утверждения теоремы:*
«Функция $V(t,x)$ *является решением уравнения*

$$x * grad_x V(t,x) = W(t,x), \tag{3.3.3}$$

причем $V(t,0) \equiv 0$*».*

- Покажем сначала, что $V(t,0) \equiv 0$.

Полагая в формуле (3.3.8) $x=0$, приходим к нужному результату:

$$V(t,0) = \int_0^1 x * f(t,yx)\big|_{x=0} dy \equiv 0.$$

- Покажем теперь, что функция $V(t,x)$ является решением уравнения (3.3.3).

При доказательстве первого утверждения теоремы установили, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{W(t,yx)}{y}\right)dy = \int_0^1 \frac{\partial W(t,z)}{\partial z_i}\bigg|_{z=yx} dy,\ i=\overline{1,n}. \tag{3.3.9}$$

Вычислим производную $\dfrac{dW(t,z)}{dy}$, рассматривая t и x_i, $i=\overline{1,n}$, как параметры. Будем иметь

$$\frac{dW(t,z)}{dy} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t,z)}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial W(t,z)}{\partial z_i}. \tag{3.3.10}$$

Умножим (3.3.9) на x_i и просуммируем по i от 1 до n. Получим

$$x * grad_x V(t,x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial W(t,z)}{\partial z_i}\bigg|_{z=yx} dy.$$

Отсюда, учитывая соотношения (3.3.10), находим

$$x * grad_x V(t,x) = \int_0^1 \frac{dW(t,z)}{dy}\bigg|_{z=yx} dy = \int_{y=0}^{y=1} dW(t,z) = W(t,yx)\Big|_{y=0}^{y=1} = W(t,x) - W(t,0) = W(t,x). \tag{3.3.11}$$

Утверждение 2 теоремы доказано.

3. *Установим справедливость третьего утверждения теоремы:*
«Правые части системы (3.3.1) через функцию $V(t,x)$ *представимы в виде*

$$f(t,x) = grad_x V + H(t,x), \tag{3.3.4}$$

где вектор-функция $H(t,x)$ *определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания правых частей системы (3.3.1) и в этой области удовлетворяет тождествам по переменным* t, x:

$$x^*H(t,x) \equiv 0\,,\quad H(t,0) \equiv 0\,. \qquad (3.3.5)$$

- Покажем справедливость первой части этого утверждения, а именно:

«Справедливость формулы (3.3.4)*:*

$$f(t,x) = grad_x V + H(t,x)\,,$$

и вектор-функция $H(t,x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания вектор-функции $f(t,x)$».

Действительно, определим функцию $H(t,x)$ следующей формулой

$$H(t,x) = f(t,x) - grad_x V(t,x)\,. \qquad (3.3.12)$$

Поскольку функция $grad_x V(t,x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания вектор-функции $f(t,x)$, и вектор-функция $f(t,x)$ также непрерывная в этой области, то из (3.3.12) следует, что вектор-функция $H(t,x)$ обладает этим свойством – свойством, указанным в первой части третьего утверждения теоремы.

Справедливость формулы (3.3.4)

$$f(t,x) = grad_x V + H(t,x)\,, \qquad (3.3.4)$$

также следует из определения функции $H(t,x)$ по формуле (3.3.12).

- Покажем справедливость второй части третьего утверждения теоремы, а именно:

«Вектор-функция $H(t,x)$ удовлетворяет тождествам

$$x^*H(t,x) \equiv 0\,,\qquad H(t,0) \equiv 0\,. \qquad (3.3.5)$$

по переменным t, x в области своего задания».

1). Покажем, что в указанной области выполняется первое тождество (3.3.5)

$$x^*H(t,x) \equiv 0\,. \qquad (3.3.13)$$

Пусть x — любая точка из области G. Тогда, умножая (3.3.12) на x^* слева, будем иметь

$$x^*H(t,x) = x^*f(t,x) - x^*grad_x V(t,x)\,. \qquad (3.3.14)$$

Равенство справедливо при всех t, x из области задания вектор-функции $f(t,x)$.

Согласно определению функции $W(t,x)$ (см.(3.3.2))

$$W(t,x) = x^*f(t,x)\,. \qquad (3.3.2)$$

Поэтому первый член в правой части (3.3.14) можем заменить на $W(t,x)$.

Произведение $x^*grad_x V(t,x)$, согласно определению функции $V(t,x)$ (см.(3.3.11))

$$x^*grad_x V(t,x) = W(t,x)\,. \qquad (3.3.11)$$

можем также заменить на $W(t,x)$.

Следовательно, правая часть соотношения (3.3.14) обращается в тождественный нуль в области задания функции $W(t,x)$. Но эта область совпадает с областью задания вектор-функции $f(t,x)$. А тогда для левой части соотношения (3.3.14) справедливо тождество (3.3.13)

$$x^*H(t,x) \equiv 0\,. \qquad (3.3.13)$$

в той же области. Что и требовалось доказать.

2). Покажем, что в указанной области выполняется второе тождество (3.3.5):

$$H(t,0) \equiv 0\,. \qquad (3.3.15)$$

Оно очевидно в том случае, когда $f(t,x) = grad_x V$, ибо в такой ситуации, согласно определению функции $H(t,x)$ по формуле (3.3.12)

$$H(t,x) = f(t,x) - grad_x V(t,x)\,. \qquad (3.3.12)$$

будет выполняться тождество

$$H(t,x) \equiv 0$$

при всех t, x из области задания функции $f(t,x)$, а значит и при $x = 0$.

А потому, пусть $H(t,x) \not\equiv 0$.

Поскольку функция $H(t,x)$ непрерывна по совокупности аргументов, и для нее выполняется тождество (3.3.13)

$$x^* H(t,x) \equiv 0, \tag{3.3.13}$$

то применительно к функции $H(t,x)$ справедливы условия леммы 1, доказанной в пункте 1° §2**.**

Из утверждения леммы 1 следует, что

$$H(t,0) \equiv 0.$$

Таким образом, утверждение 3 теоремы доказано полностью.

4. Установим справедливость четвертого утверждения теоремы:
«Если $H(t,x)$ $\not\equiv 0$, то вектор-функция $H(t,x)$ представима в виде

$$H(t,x) = \Gamma(t,x)x. \tag{3.3.6}$$

Матрица $\Gamma(t,x)$ — кососимметрическая. Для нее справедливо соотношение

$$\Gamma(t,x) = -\Gamma^*(t,x). \tag{3.3.7}$$

Она имеет размерность $(n \times n)$».

Действительно, если $H(t,x) \not\equiv 0$, то из непрерывности вектор-функции $H(t,x)$ и выполнения тождества (3.3.13)

$$x^* H(t,x) \equiv 0, \tag{3.3.13}$$

вытекает, что вектор $H(t,x)$ является гироскопическим.

А тогда согласно утверждению теоремы о каноническом разложении гироскопических сил данная вектор-функция $H(t,x)$ представима в виде (3.3.6), (3.3.7).

Теорема доказана полностью.

Замечание.

При доказательстве четвертого утверждения теоремы применили теорему о каноническом разложении гироскопических сил.

Для того чтобы ее применение было обоснованным, введем обозначения:

$$\dot{q} = x, \qquad Q(t,q,\dot{q}) = H(t,x).$$

В этих обозначениях компоненты вектора x трактуются как обобщенные скорости, а вектор-функция $H(t,x)$ — как вектор обобщенных сил $Q(t,\dot{q})$. Все обобщенные силы не зависят от обобщенных координат.

Аналитические свойства обобщенных сил $Q(t,\dot{q})$ в их зависимости от переменных $t,\dot{q}$ полностью совпадают с аналитическими свойствами вектор-функции $H(t,x)$ в ее зависимости от переменных t,x.

Легко видеть, что перенос всех свойств функции $H(t,x)$ на обобщенные силы $Q(t,\dot{q})$ позволяет сделать вывод о том, что эти силы являются гироскопическими, и применить к ним теорему о разложении гироскопических сил. Обратная замена в утверждениях теоремы переменных $\dot{q}$ на x и вектора $Q(t,\dot{q})$ на функцию $H(t,x)$ приводит к равенствам (3.3.6) и (3.3.7):

$$H(t,x) = \Gamma(t,x)x, \tag{3.3.6}$$

$$\Gamma(t,x) = -\Gamma^*(t,x). \tag{3.3.7}$$

2°. Каноническое разложение силовых полей.

Вернемся к рассмотрению голономных систем.

Пусть $Q(t,q,\dot{q})$, $j = \overline{1,n}$, — непотенциальные обобщенные силы, действующие на механическую систему. Обозначим через Q — вектор обобщенных сил $Q = (Q_1,\dots,Q_n)^*$, причем, хотя бы одна из его компонент отлична от тождественного нуля.

Вектор $Q(t,q,\dot{q})$ задан и непрерывен при $t\in I_t$, $q\in G$, $\dot{q}\in G_1$, где I_t — конечный или бесконечный интервал изменения времени t, а G и G_1 — области изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Относительно G_1 считаем, что она содержит точку $\dot{q}=0$ и вместе с ней точки

$$\tilde{\dot{q}} = y\dot{q}\,, \qquad \forall y\in\ [0,1],$$

т.е. содержит точки $\tilde{\dot{q}}$ всего отрезка, соединяющего любую точку $\dot{q}\in G_1$ с точкой $\dot{q}=0$.

Справедлива следующая теорема Зубова о каноническом разложении силовых полей.

Теорема Зубова (о каноническом разложении силовых полей).

Если выполнены условия, накладываемые на вектор обобщенных сил $Q(t,q,\dot{q})$*, сформулированные выше, и виртуальная мощность* $N_q(t,q,\dot{q})=\dot{q}^*Q(t,q,\dot{q})$ *является непрерывно дифференцируемой функцией по переменным* $\dot{q}$*, то:*

1) *существует непрерывно дифференцируемая функция* $V(t,q,\dot{q})$*, являющаяся решением уравнения*

$$\dot{q}^*grad_{\dot{q}}V=N_q(t,q,\dot{q}),$$

и принимающая значение $V(t,q,0)\equiv 0$*;*

2) *существует непрерывный по совокупности переменных вектор* $H(t,q,\dot{q})$ *такой, что вектор* Q *представим в виде*

$$Q=grad_{\dot{q}}V+H(t,q,\dot{q});$$

3) *если* $H(t,q,\dot{q})$ *в этом представлении не является тождественным нулем, то*

$$H(t,q,\dot{q})=\Gamma(t,q,\dot{q})\ \dot{q},$$

где $\Gamma(t,q,\dot{q})$ *— кососимметрическая матрица, т.е.* $\Gamma^*=-\Gamma$.

Доказательство очевидно, поскольку к вектору Q можно применить теорему о каноническом представлении поля направлений, считая, что в вектор-функции $Q(t,q,\dot{q})$ аргументы t, q — это параметры, а аргумент $\dot{q}$ является переменным, т.е. $\dot{q}=x$.