

Глава 3. Аналитическая структура силовых полей

§1. Диссипативные силы. Диссипативная функция

1°. Диссипативные системы. Закон изменения обобщенной энергии диссипативных систем

Как было показано в §3, п.2° главы 1, изменение обобщенной энергии $h(t, q, \dot{q})$ механической системы при ее движении подчиняется закону

$$\frac{dh(t, q, \dot{q})}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + N_q,$$

где $L(t, q, \dot{q})$ — кинетический потенциал, $N_q(t, q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j$ — виртуальная (обобщенная) мощность непотенциальных сил, действующих на механическую систему.

Если кинетический потенциал L не зависит явно от t , то данный закон приобретает вид

$$\frac{dh}{dt} = N_q. \quad (3.1.1)$$

Обобщенная энергия h в таком случае так же, как и кинетический потенциал L , не будет зависеть явно от времени t .

Определение 1.

Если виртуальная мощность $N_q(t, q, \dot{q})$ всех непотенциальных сил, действующих на голономную механическую систему, удовлетворяет неравенствам

$$N_q(t, q, \dot{q}) \leq 0 \text{ и } N_q(t, q, \dot{q}) \neq 0$$

*при всех t, q, \dot{q} , где заданы эти силы, то такая механическая система называется **диссипативной системой**, а непотенциальные силы — **диссипативными силами**.*

Из закона (3.1.1) следует, что на движениях диссипативной системы обобщенная энергия не возрастает, ибо скорость ее изменения является неположительной функцией;

$$\frac{dh}{dt} = N_q \leq 0.$$

О таких системах говорят, что при их движении происходит рассеивание энергии. На основе этого свойства дано и название сил, при действии которых происходит рассеивание энергии:

диссипативные силы — это силы, рассеивающие энергию.

Определение 2.

*Рассеивание энергии в процессе движения называется **диссипацией**.*

*Если функция $N_q(t, q, \dot{q})$ при любых t и q является определенно отрицательной относительно переменных \dot{q} , то **диссипация называется полной**.*

*Если функция $N_q(t, q, \dot{q})$ при любых t и q является знакопостоянной отрицательной по переменным \dot{q} , то **диссипация называется неполной**.*

Замечание.

К диссипативным системам относятся, в частности, стационарные голономные системы, осуществляющие свое движение в стационарном потенциальном поле и в поле диссипативных сил.

В таких системах обобщенная энергия $h(t, q, \dot{q})$ совпадает с полной механической энергией $E(q, \dot{q}) = T_2(q, \dot{q}) + \Pi(q)$, и закон (3.1.1) принимает вид:

$$\frac{dE}{dt} = N_q \leq 0.$$

2°. Диссипативная функция. Диссипативная функция сил вязкого трения.

Определение 3.

Функция $\Phi(t, q, \dot{q})$ называется **диссипативной функцией**, если она обладает следующими свойствами:

- 1) задается при всех t, q, \dot{q} , где определены движения механической системы,
- 2) является вещественной функцией, дифференцируемой по обобщенным скоростям \dot{q} и непрерывной по остальным переменным в указанной области;
- 3) принимает неотрицательные значения в области задания;
- 4) обобщенные силы Q_j , $j = \overline{1, n}$, связаны с функцией $\Phi(t, q, \dot{q})$ зависимостями

$$Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3.1.2)$$

Диссипативная функция впервые была введена в классическом труде Релея «Теория звука» для сил сопротивления движению, пропорциональных первой степени скорости.

Поэтому **диссипативную функцию** иначе называют **функцией Релея**, распространив данное название и на другие зависимости диссипативных сил от скоростей.

Диссипативная функция Φ возникает, например, когда в системе действуют силы сопротивления движению, подчиняющиеся следующим законам, называемым **законами сил вязкого трения**:

- 1) сила вязкого трения направлена против скорости движения материальной точки относительно той среды, в которой происходит движение;
- 2) величина силы вязкого трения зависит от величины относительной скорости материальной точки, т.е. от величины скорости ее движения относительно этой среды.

Покажем, как функция Релея $\Phi(t, q, \dot{q})$ связана с силами сопротивления, подчиняющимися законам 1) и 2).

Рассмотрим эту связь на примере сил сопротивления \vec{F}_ν , действующих на точки P_ν , $\nu = \overline{1, N}$, механической системы по законам, представленным в виде:

$$\vec{F}_\nu = -k_\nu f_\nu(V_\nu) \frac{\vec{V}_\nu}{V_\nu}, \quad \nu = \overline{1, N}. \quad (3.1.3)$$

С такими законами встречаемся, когда на движения механических систем оказывают влияния силы трения и (или) аэродинамические силы, а также при движении механических систем в жидких и газообразных средах.

В соотношениях (3.1.3):

- \vec{V}_ν — вектор скорости точки P_ν относительно внешней среды;
- $V_\nu = |\vec{V}_\nu|$ — модуль (величина) скорости;
- $k_\nu = k_\nu(t, q) \geq 0$ — коэффициент трения или сопротивления внешней среды; неотрицательная величина, зависящая от положений точек системы и, быть может, времени; эти коэффициенты зависят также от конструктивных параметров системы и параметров окружающей среды; они определяются и задаются, как правило, на основе наблюдений и в результате обработки экспериментальных данных;
- $f_\nu(V_\nu) \geq 0$ — закон изменения величины силы сопротивления в зависимости от скорости точки P_ν ; неотрицательная функция.

Вычислим обобщенные силы, соответствующие системе сил $\{\vec{F}_\nu\}_{\nu=\overline{1, N}}$, задаваемых формулами (3.1.3).

По определению обобщенной силы Q_j , $\nu = \overline{1, N}$, имеем

$$Q_j = \sum_{\nu=1}^N (\vec{F}_\nu, \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}).$$

Подставляя (3.1.3)

$$\vec{F}_\nu = -k_\nu f_\nu(V_\nu) \frac{\vec{V}_\nu}{V_\nu}, \quad \nu = \overline{1, N}, \quad (3.1.3)$$

и учитывая соотношение $\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{V}_\nu}{\partial \dot{q}_j}$ из кинематической леммы Лагранжа, получим:

$$Q_j = -\sum_{\nu=1}^N k_\nu f_\nu(V_\nu) \left(\frac{\vec{V}_\nu}{V_\nu}, \frac{\partial \vec{V}_\nu}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} k_\nu \frac{f_\nu(V_\nu)}{V_\nu} \frac{\partial \vec{V}_\nu^2}{\partial \dot{q}_j}.$$

Отсюда приходим к следующему выражению обобщенной силы Q_j :

$$Q_j = -\sum_{\nu=1}^N k_\nu f_\nu(V_\nu) \frac{\partial V_\nu}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{\nu=1}^N k_\nu \int_0^{V_\nu} f_\nu(u) du. \quad (3.1.4)$$

Обозначим

$$\Phi(t, q, \dot{q}) = \sum_{\nu=1}^N k_\nu(t, q) \int_0^{V_\nu} f_\nu(u) du. \quad (3.1.5)$$

Легко видеть, что функция $\Phi(t, q, \dot{q})$ является неотрицательной при любых значениях t, q, \dot{q} .

Обобщенная сила (3.1.4) через функцию $\Phi(t, q, \dot{q})$, задаваемую формулой (3.1.5), будет вычисляться дифференцированием по координате \dot{q}_j :

$$Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_j}.$$

Следовательно, функция (3.1.5) является функцией Релея для системы сил сопротивления, задаваемых законами (3.1.3).

Эта функция Φ в общем случае зависит от времени t , обобщенных координат q и величин скоростей V_ν точек P_ν , $\nu = \overline{1, N}$, механической системы.

В выражении (3.1.5) явная зависимость функции Φ от переменных \dot{q} не указывается. Эта зависимость проявляется через скорости V_ν .

В свою очередь, зависимость Φ от скоростей V_ν реализуется через функции

$$\varphi_\nu(V_\nu) = \int_0^{V_\nu} f_\nu(u) du,$$

причем, функции $\varphi_\nu(V_\nu)$ входят в функцию $\Phi(t, q, \dot{q})$ аддитивно.

Запишем выражения для функции Релея Φ в некоторых частных случаях. Пусть

$$f_\nu = V_\nu^m, \quad (3.1.6)$$

где $m \geq 0$ — целое число.

В частности, если $m = 0$, то $f_\nu(V_\nu) = 1$. В этом случае

$$\vec{F}_\nu = -k_\nu f_\nu(V_\nu) \frac{\vec{V}_\nu}{V_\nu}. \quad (3.1.7)$$

Такая сила называется силой сухого трения или силой кулонова трения.

Сила сухого трения не зависит от величины скорости. От скорости зависит только направление действия этой силы. Оно противоположно направлению скорости движения.

Если $m = 1$, то $f_\nu(V_\nu) = V_\nu$. В этом случае

$$\vec{F}_\nu = -k_\nu \vec{V}_\nu. \quad (3.1.8)$$

Эта сила называется *силой вязкого трения*, пропорциональной первой степени скорости. Как отмечалось выше, для таких сил впервые Релеем была введена диссипативная функция.

Формула (3.1.5) позволяет построить *диссипативную функцию для сил* (3.1.6) при любом значении $m \geq 0$, в том числе и в указанных частных случаях (3.1.7) и (3.1.8).

Согласно (3.1.5)

$$\Phi(t, q, \dot{q}) = \sum_{\nu=1}^N k_{\nu}(t, q) \int_0^{V_{\nu}} f_{\nu}(u) du. \quad (3.1.5)$$

при любом целом $m \geq 0$ функция Φ определяется по формуле

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^N k_{\nu} V_{\nu}^{m+1}. \quad (3.1.9)$$

Из формулы (3.1.9) заключаем, что Φ является однородной функцией степени $m+1$ относительно модулей V_{ν} скоростей \vec{V}_{ν} точек механической системы и обращается в нуль только тогда, когда скорости всех точек принимают значения, равные нулю.

Найдем зависимость функции Φ от обобщенных скоростей \dot{q} .

Поскольку $\vec{V}_{\nu} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t}$, то для модуля V_{ν} скорости \vec{V}_{ν} можем записать:

$$V_{\nu} = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \right| = \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Подставляя в (3.1.9), получим

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^N k_{\nu} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \right|^{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^N k_{\nu} \left[\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial t} \right)^2 \right]^{(m+1)/2}. \end{aligned}$$

Построенная формула показывает явную зависимость функции Φ от обобщенных скоростей \dot{q} .

Из нее видим, что в общем случае (когда связи не стационарны), функция Φ не является однородной функцией относительно обобщенных скоростей \dot{q} .

Если связи стационарны, и обобщенные координаты q выбраны так, что их связь с $\vec{r}_{\nu} = \vec{r}_{\nu}(q)$, $\nu = \overline{1, N}$, не содержит явной зависимости от времени t , то функция Φ примет вид:

$$\Phi = \frac{1}{m+1} \sum_{\nu=1}^N k_{\nu} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^{\nu} \dot{q}_i \dot{q}_j \right]^{(m+1)/2}, \quad (3.1.10)$$

где

$$a_{ij}^{\nu} = \left(\frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_i}, \frac{\partial \vec{r}_{\nu}}{\partial q_j} \right), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Из (3.1.10) следует, что при стационарных связях функция Релея Φ является однородной формой степени $m+1$ относительно обобщенных скоростей \dot{q} .

При этом если коэффициенты $k_{\nu}(t, q) > 0$ для всех $\nu = \overline{1, N}$, то функция Φ обращается в нуль только тогда, когда все скорости $V_{\nu} = 0$.

Так же, как и при доказательстве определенной положительности по переменным \dot{q} при любых значениях q и t квадратичной формы T_2 , входящей в выражение для кинетической энергии, легко устанавливается, что $\vec{V}_{\nu} = 0$, $\nu = \overline{1, N}$, тогда и только тогда, когда $\dot{q} = 0$.

А это значит, что функция Φ является определенно положительной по отношению к переменным \dot{q} при любых значениях q и t .

Примечание.

Поскольку обобщенная сила Q_j связана с функцией Φ соотношением $Q_j = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_j}$, а функция Φ зависит от модуля скорости V_v , то при определении Q_j возникает необходимость вычислить частные производные от модуля скорости V_v или от функции $|\dot{q}_j|$.

При этом вычислении следует иметь в виду, что

$$\frac{\partial|\dot{q}_j|}{\partial\dot{q}_j} = \text{sign } \dot{q}_j = \begin{cases} 1 & \text{при } \dot{q}_j > 0, \\ -1 & \text{при } \dot{q}_j < 0. \end{cases}$$

Например, при $n = 1$ формула (3.1.10) задает функцию $\Phi = \frac{k}{m+1}|\dot{q}|^{m+1}$, где

$$k = \sum_{v=1}^N k_v \left(\frac{\partial\vec{r}_v}{\partial q}, \frac{\partial\vec{r}_v}{\partial q} \right)^{(m+1)/2}.$$

А тогда обобщенная сила Q , построенная по ней, представляется в форме:

$$Q = -\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial|\dot{q}|} \cdot \frac{\partial|\dot{q}|}{\partial\dot{q}} = -k|\dot{q}|^m \text{sign } \dot{q}.$$

3°. Закон изменения обобщенной энергии при движении в силовых полях, задаваемых однородной функцией Релея.

Пусть функция Релея $\Phi(t, q, \dot{q})$ является однородной функцией степени m ($m \geq 1$) относительно обобщенных скоростей \dot{q} .

Вычислим виртуальную мощность обобщенных сил Q_j , $j = \overline{1, n}$, задаваемых этой функцией $\Phi(t, q, \dot{q})$:

$$N_q = \sum_{j=1}^n Q_j \dot{q}_j = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_j} \dot{q}_j.$$

Согласно теореме Эйлера для функции Φ , однородной степени m по переменным \dot{q} , можем записать:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{q}_j} \dot{q}_j = m\Phi(t, q, \dot{q}).$$

Поэтому

$$N_q = -m\Phi(t, q, \dot{q}).$$

А тогда закон изменения обобщенной энергии для механических систем с кинетическим потенциалом L , который не зависит от t явно, примет вид:

$$\frac{dh}{dt} = -m\Phi(t, q, \dot{q}).$$

Если голономная система имеет стационарные связи, и потенциальная энергия не зависит от t , то обобщенная энергия равна полной энергии E механической системы:

$$h(q, \dot{q}) = E(q, \dot{q}) = T_2(q, \dot{q}) + \Pi(q),$$

Следовательно, закон изменения полной энергии в этом случае имеет вид:

$$\frac{dE}{dt} = -m\Phi(t, q, \dot{q}) \leq 0.$$

Поскольку $\Phi(t, q, \dot{q})$ — определенно положительная функция относительно обобщенных скоростей \dot{q} при всех t и q , то равенство нулю возможно только при $\dot{q} = 0$.

Таким образом, приходим к следующему заключению:

При движении диссипативных систем со стационарными связями скорость рассеивания полной механической энергии равна функции Релея, увеличенной в m раз, и эта скорость всегда отрицательна.

§2. Гироскопические силы

1°. Общие свойства гироскопических сил.

Пусть $Q = (Q_1, \dots, Q_n)^*$ — вектор обобщенных сил. В общем случае он зависит от t, q, \dot{q} , т.е. можем записать $Q = Q(t, q, \dot{q})$. Будем считать, что вектор-функция $Q(t, q, \dot{q})$ определена при всех $t, q \in E^n, \dot{q} \in E^n$, непрерывна по совокупности аргументов и в области задания не является тождественным нулем

$$Q(t, q, \dot{q}) \neq 0. \quad (3.2.1)$$

Определение 1.

Вектор $Q(t, q, \dot{q})$ будем называть гироскопическим (соответственно, обобщенные силы Q_1, \dots, Q_n будем называть гироскопическими), если виртуальная мощность $N_q(t, q, \dot{q})$ обобщенных сил, задаваемая формулой

$$N_q(t, q, \dot{q}) = \dot{q}^* Q = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j Q_j(t, q, \dot{q}),$$

тождественно равна нулю. Иначе говоря, для любых t, q, \dot{q} из области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$ имеем тождество

$$Q^* \dot{q} \equiv 0. \quad (3.2.2)$$

Запишем закон изменения обобщенной энергии при действии гироскопических сил в совокупности с потенциальными силами.

Поскольку согласно этому закону

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + N_q, \quad (3.2.3)$$

где $h = h(t, q, \dot{q}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = -L(t, q, \dot{q}) = L_2 - L_0$ — обобщенная энергия, то из условия (3.2.2)

следует, что гироскопические силы не влияют на изменение обобщенной энергии, а также и полной механической энергии, ибо при $N_q \equiv 0$ закон (3.2.3) принимает вид:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Установим теперь, какими аналитическими свойствами обладают гироскопические силы.

Свойство 1.

Пусть n' — это количество обобщенных сил, для которых выполняются условия (3.2.1), (3.2.2). Тогда $n \geq n' \geq 2$ (т.е. количество обобщенных сил должно быть не меньше двух).

Доказательство. Доказательство проводим от противного.

Пусть $n' = 1$. Это значит, что имеется всего одна обобщенная сила Q_j , такая, что для нее выполняется

$$Q_j(t, q, \dot{q}) \neq 0, \quad (3.2.4)$$

$$Q_j(t, q, \dot{q}) \dot{q}_j \equiv 0, \quad (3.2.5)$$

а все остальные обобщенные силы $Q_i(t, q, \dot{q})$ при $i \neq j, i = \overline{1, n}$ тождественно равны нулю.

Тогда в тождестве (3.2.5) полагаем $\dot{q}_j \neq 0$. Поскольку оно справедливо для любых \dot{q}_j , то при $\dot{q}_j \neq 0$ из него следует, что

$$Q_j(t, q, \dot{q}) \Big|_{\dot{q}_j \neq 0} \equiv 0.$$

А это значит, что неравенство (3.2.4) может выполняться только при $\dot{q}_j = 0$.

Пусть оно выполняется при некотором значении $t = \bar{t}$, $q = \bar{q}$.

Тогда в силу непрерывности функции $Q_j(\bar{t}, \bar{q}, \dot{q})$ по \dot{q}_j неравенство нулю должно выполняться не только при $\dot{q}_j = 0$, но и в некоторой окрестности точки $\dot{q}_j = 0$, т.е. в точках $\dot{q}_j \neq 0$ из этой окрестности. Получили противоречие с выводом о том, что при $\dot{q}_j \neq 0$ выполняется тождество $Q_j(t, q, \dot{q})|_{\dot{q}_j \neq 0} \equiv 0$ при всех $\dot{q}_j \neq 0$ и любых t, q из области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$. Что и требовалось доказать.

Свойство 2.

Если вектор $Q(t, q, \dot{q})$ — гироскопический, то каждая из обобщенных сил $Q_j(t, q, \dot{q}) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, явно зависит от \dot{q} .

Доказательство (от противного).

Пусть $Q(t, q, \dot{q})$ — гироскопический вектор, но обобщенная сила с номером j , не являющаяся тождественным нулем, не зависит от \dot{q} , т.е. имеем

$$Q_j = Q_j(t, q) \neq 0. \quad (3.2.6)$$

Поскольку для Q справедливо тождество (3.2.2), то полагаем в нем $\dot{q}_i = 0$ для $i \neq j$, $i = \overline{1, n}$, и $\dot{q}_j \neq 0$. Получим из тождества (3.2.2)

$$Q_j(t, q) \dot{q}_j \equiv 0 \text{ при } \dot{q}_j \neq 0.$$

Отсюда следует, что $Q_j(t, q) \equiv 0$. А это противоречит условию (3.2.6). Что и требовалось доказать.

Введем следующее обозначение. Положим в обобщенной силе $Q_j(t, q, \dot{q})$, для которой выполняется неравенство (3.2.4),

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dots = \dot{q}_{j-1} = \dot{q}_{j+1} = \dots = \dot{q}_n = 0,$$

а \dot{q}_j будем считать переменной величиной.

Обозначим получившуюся функцию Q_j через $\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j)$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Свойство 3.

При любом $j = \overline{1, n}$, для которого выполняется

$$Q_j(t, q, \dot{q}) \neq 0, \quad (3.2.7)$$

справедливы тождества

$$\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \equiv 0. \quad (3.2.8)$$

Иначе говоря, во все ненулевые компоненты Q_j вектора Q координата \dot{q}_j вектора \dot{q} с тем же номером, что и компонента Q_j , не входит свободно.

Доказательство (от противного).

Пусть $\dot{q}_j \neq 0$, $\dot{q}_i = 0$ для $i = \overline{1, n}$, $i \neq j$, и $\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \neq 0$. Тогда из тождества (3.2.2) следует, что

$$\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \dot{q}_j \equiv 0.$$

Но поскольку $\dot{q}_j \neq 0$, то отсюда получаем, что

$$\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \equiv 0 \text{ при всех } \dot{q}_j \neq 0. \quad (3.2.9)$$

Если предположить, что

$$\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j) \Big|_{\dot{q}_j=0} \neq 0 \quad (3.2.10)$$

(т.е. нарушается тождество (3.2.8)), то неравенство (3.2.10) в силу непрерывности функции $\widehat{Q}_j(t, q, \dot{q}_j)$ по \dot{q}_j при любых фиксированных t, q будет выполняться и в некоторой окрестности точки $\dot{q}_j = 0$, что противоречит тождеству (3.2.9).

Свойство 4.

Справедливо тождество $Q(t, q, \dot{q}) \Big|_{\dot{q}=0} \equiv 0$.

Это утверждение является следствием из свойства 3.

Свойства 2 и 4 объединим и сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 1.

Если вектор-функция $Q(t, q, \dot{q})$ в области задания обладает следующими свойствами:

- *непрерывна по совокупности аргументов;*
- *$Q(t, q, \dot{q}) \neq 0$ (Q не является тождественным нулем);*
- *$\dot{q}^* Q(t, q, \dot{q}) \equiv 0$ (Q является гироскопической).*

Тогда каждая компонента вектор-функции $Q(t, q, \dot{q})$ явно зависит от \dot{q} , и $Q(t, q, 0) \equiv 0$ при всех значениях t и q в области задания.

2°. Теорема Зубова о каноническом разложении гироскопических сил

Пусть вектор обобщенных координат q имеет размерность $n \geq 2$. Будем рассматривать вектор-функцию $Q(t, q, \dot{q})$ той же размерности, что и вектор \dot{q} . Пусть $Q(t, q, \dot{q})$ обладает следующими свойствами:

- 1) $Q(t, q, \dot{q})$ — вещественная и непрерывная по совокупности аргументов при $t \in \langle t_0, t_1 \rangle, q \in G, \dot{q} \in G_1$; область G_1 содержит точку $\dot{q} = 0$;
- 2) в области задания выполняется неравенство

$$Q(t, q, \dot{q}) \neq 0 \quad (3.2.11)$$

Функция $Q(t, q, \dot{q})$ может быть или не быть гироскопической.

Лемма 2.

Если выполнено условие

$$Q(t, q, 0) \equiv 0, \quad (3.2.12)$$

то вектор-функцию $Q(t, q, \dot{q})$ можно представить в виде

$$Q(t, q, \dot{q}) = H_1(t, q, \dot{q}) + H(t, q, \dot{q}), \quad (3.2.13)$$

где вектор-функции $H(t, q, \dot{q})$ и $H_1(t, q, \dot{q})$ обладают следующими свойствами:

- а) $H(t, q, \dot{q})$ и $H_1(t, q, \dot{q})$ вещественные и непрерывные в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$;
- б) $H(t, q, 0) \equiv 0, H_1(t, q, 0) \equiv 0$;
- в) функция $H_1(t, q, \dot{q})$ через вектор-функцию $Q(t, q, \dot{q})$ вычисляется по формуле

$$H_1(t, q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^* Q}{\dot{q}^2} \dot{q}; \quad (3.2.14)$$

г) функция $H(t, q, \dot{q})$ представима в виде

$$H(t, q, \dot{q}) = \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q}, \quad (3.2.15)$$

где $\Gamma(t, q, \dot{q})$ — кососимметрическая матрица, т.е. $\Gamma^(t, q, \dot{q}) = -\Gamma(t, q, \dot{q})$;*

д) *хотя бы одна из вектор-функций $H(t, q, \dot{q})$ и $H_1(t, q, \dot{q})$ не является тождественным нулем в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$.*

Примечание 1.

При выполнении условий 1) и 2), накладываемых на вектор-функцию $Q(t, q, \dot{q})$, и тождества (3.2.12) легко показать, что $Q(t, q, \dot{q})$ явно зависит от \dot{q} , и в области задания вектор-функции $Q(t, q, \dot{q})$ найдется хотя бы одна такая точка $(\bar{t}, \bar{q}, \bar{\dot{q}}) \neq 0$, в которой $\bar{\dot{q}} \neq 0$ и $Q(\bar{t}, \bar{q}, \bar{\dot{q}}) \neq 0$.

Действительно, если бы было $Q = Q(t, q)$, т.е. функция Q не зависела бы от \dot{q} , то из условия (3.2.12) следовало бы $Q(t, q) \equiv 0$, что противоречит неравенству (3.2.11). Следовательно, $Q(t, q, \dot{q})$ зависит явно от \dot{q} .

Наличие точки $(\bar{t}, \bar{q}, \bar{\dot{q}})$ в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$, для которой выполняется $Q(\bar{t}, \bar{q}, \bar{\dot{q}}) \neq 0$, вытекает из неравенства (3.2.11).

Поскольку при $\dot{q} = 0$ справедливо тождество (3.2.12), то, очевидно, что $\bar{\dot{q}}$ не может быть равно нулю.

Примечание 2.

Легко видеть, что вектор $H_1(t, q, \dot{q})$ коллинеарен вектору \dot{q} при любых t, q, \dot{q} из области задания вектор-функции $Q(t, q, \dot{q})$, а вектор $H(t, q, \dot{q})$ в этой области ортогонален вектору \dot{q} , т.е. для $H(t, q, \dot{q})$ справедливо тождество

$$\dot{q} * H(t, q, \dot{q}) \equiv 0.$$

Действительно, согласно (3.2.15) имеем

$$\dot{q} * H(t, q, \dot{q}) = \dot{q} * \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q} \equiv 0,$$

ибо квадратичная форма с кососимметрической матрицей является тождественным нулем.

Доказательство леммы 2.

Пусть вектор $Q(t, q, \dot{q})$ удовлетворяет условиям 1,2 и тождеству (3.2.12). Тогда в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$ при $\dot{q} \neq 0$ будем вычислять функцию $H_1(t, q, \dot{q})$ по формуле (3.2.14):

$$H_1(t, q, \dot{q}) = \frac{\dot{q} * Q}{\|\dot{q}\|^2} \dot{q}.$$

Очевидно, $H_1(t, q, \dot{q})$ определена и непрерывна по переменным t, q, \dot{q} при $\dot{q} \neq 0$. Это следует из непрерывности $Q(t, q, \dot{q})$. Доопределим ее при $\dot{q} = 0$. Для этого воспользуемся следующей оценкой функции $H_1(t, q, \dot{q})$, справедливой при всех $\dot{q} \neq 0$.

$$\|H_1\| = \left| \frac{\dot{q} * Q}{\|\dot{q}\|} \right| \cdot \left\| \frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|} \right\| \leq \|Q\| \left\| \frac{\dot{q}}{\|\dot{q}\|} \right\|^2 \leq \|Q\|.$$

Из данной оценки функции $H_1(t, q, \dot{q})$, непрерывности $Q(t, q, \dot{q})$ и тождества (3.2.12) следует, что

$$\|H_1(t, q, \dot{q})\| \rightarrow 0 \text{ при } \|\dot{q}\| \rightarrow 0, \text{ ибо } \|Q(t, q, \dot{q})\| \rightarrow 0 \text{ при } \|\dot{q}\| \rightarrow 0.$$

Поэтому доопределим вектор-функцию $H_1(t, q, \dot{q})$ при $\dot{q} = 0$, положив (по непрерывности):

$$H_1(t, q, 0) \equiv 0. \tag{3.2.16}$$

Таким образом, вектор-функция $H_1(t, q, \dot{q})$, задаваемая формулами (3.2.14), (3.2.16), будет определена и непрерывна в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$, и будет удовлетворять условию б). Иначе говоря, для нее справедливы первые три утверждения леммы 2.

Положим теперь (по определению)

$$H(t, q, \dot{q}) = Q(t, q, \dot{q}) - H_1(t, q, \dot{q}) \tag{3.2.17}$$

и покажем, что функция $H(t, q, \dot{q})$ удовлетворяет утверждениям леммы 2.

Во-первых, она определена и непрерывна в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$, поскольку является разностью функций Q и H_1 , обладающих этими свойствами (т.е. утверждение а) справедливо).

Во-вторых, поскольку $Q(t, q, \dot{q})|_{\dot{q}=0} \equiv 0$ согласно условию (3.2.12), а для $H_1(t, q, \dot{q})$ при $\dot{q} = 0$ справедливо тождество (3.2.16), то для функции $H(t, q, \dot{q})$ будем иметь:

$$H(t, q, \dot{q})|_{\dot{q}=0} = Q(t, q, \dot{q})|_{\dot{q}=0} - H_1(t, q, \dot{q})|_{\dot{q}=0} \equiv 0.$$

Таким образом доказали выполнение второго условия (условия б)) для функции $H(t, q, \dot{q})$. Покажем теперь справедливость четвертого утверждения (условия г)). Подставим в (3.2.17) формулу (3.2.14), справедливую для вектор-функции $H_1(t, q, \dot{q})$. Получим

$$H(t, q, \dot{q}) = Q - \frac{\dot{q}^* Q}{\dot{q}^2} \dot{q} = Q \frac{\dot{q}^* \dot{q}}{\dot{q}^2} - \dot{q} \frac{\dot{q}^* Q}{\dot{q}^2} = \frac{Q \dot{q}^*}{\dot{q}^2} \dot{q} - \dot{q} \frac{Q^* \dot{q}}{\dot{q}^2} = \frac{Q \dot{q}^* - \dot{q} Q^*}{\dot{q}^2} \dot{q} = \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q}. \quad (3.2.18)$$

Здесь ввели обозначение

$$\Gamma(t, q, \dot{q}) = \frac{Q \dot{q}^* - \dot{q} Q^*}{\dot{q}^2}. \quad (3.2.19)$$

Матрица $\Gamma(t, q, \dot{q})$, очевидно, определена при всех t, q, \dot{q} в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$, кроме точек, где $\dot{q} = 0$. Однако при $\dot{q} = 0$ функция $H(t, q, \dot{q})$ удовлетворяет тождеству $H(t, q, 0) \equiv 0$. И поэтому формула (3.2.18) останется справедливой, если в ней положить $\Gamma(t, q, 0) \equiv 0$.

Доопределим матрицу $\Gamma(t, q, \dot{q})$, считая, что при $\dot{q} = 0$ и $\forall t \in \langle t_0, t_1 \rangle, \forall q \in G$ она обращается в тождественный нуль.

Поскольку $\Gamma(t, q, \dot{q})$ — кососимметрическая матрица (в данном факте легко убедиться, если вычислим $\Gamma^*(t, q, \dot{q})$, учитывая формулу (3.2.19)), то все сказанное о функции $H(t, q, \dot{q})$ подтверждает, что условие г) леммы 2 выполняется.

Утверждение д) также выполняется. Действительно, представление (3.2.13) вектор-функции $Q(t, q, \dot{q})$ в области ее задания в виде суммы вектор-функций $H_1(t, q, \dot{q})$ и $H(t, q, \dot{q})$, задаваемых формулами (3.2.14), (3.2.15), (3.2.19), — справедливо. А тогда, поскольку $Q(t, q, \dot{q}) \neq 0$, хотя бы одно из слагаемых в правой части (3.2.13) не будет тождественным нулем. Лемма 2 доказана полностью.

Докажем теперь [теорему Зубова о каноническом разложении гироскопических сил](#).

Теорема Зубова (о каноническом разложении гироскопических сил).

Для того чтобы вектор-функция $Q(t, q, \dot{q})$, не являющаяся тождественным нулем, заданная, вещественная и непрерывная по совокупности аргументов t, q, \dot{q} в области $t \in I, q \in G, \dot{q} \in G_1$, была гироскопической, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$Q(t, q, \dot{q}) = \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q}, \quad (3.2.20)$$

где $\Gamma(t, q, \dot{q})$ — вещественная кососимметрическая матрица, определенная в области задания функции $Q(t, q, \dot{q})$, т.е. для нее выполняется тождество

$$\Gamma^*(t, q, \dot{q}) \equiv -\Gamma(t, q, \dot{q}).$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть

$$Q(t, q, \dot{q}) \neq 0, \quad (3.2.21)$$

$Q(t, q, \dot{q})$ — непрерывная вектор-функция в области задания и являющаяся гироскопической, т.е. для нее (согласно определению гироскопического вектора) справедливо тождество

$$\dot{q}^* Q(t, q, \dot{q}) \equiv 0. \quad (3.2.22)$$

Докажем, что вектор-функция $Q(t, q, \dot{q})$ представима в виде (3.2.20).

1. Поскольку $Q(t, q, \dot{q})$ — гироскопический вектор, то из леммы 1 следует

$$Q(t, q, 0) \equiv 0. \quad (3.2.23)$$

2. Так как вектор-функция $Q(t, q, \dot{q})$ непрерывна по совокупности аргументов, и для нее выполняются соотношения (3.2.21) и (3.2.23), то согласно лемме 2 она представима в виде

$$Q(t, q, \dot{q}) = \frac{\dot{q}^* Q}{\dot{q}^2} \dot{q} + \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q}, \quad (3.2.24)$$

где $\Gamma(t, q, \dot{q})$ — вещественная кососимметрическая матрица, определенная в области задания вектор-функции $Q(t, q, \dot{q})$.

3. Поскольку выполнено тождество (3.2.22), то при подстановке его в разложение (3.2.24) получаем формулу (3.2.20). Необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть выполнены условия:

- 1) $Q(t, q, \dot{q}) \not\equiv 0$ и $Q(t, q, \dot{q})$ — непрерывная вектор-функция по совокупности аргументов в области задания;
- 2) вектор-функция $Q(t, q, \dot{q})$ представима в виде $Q(t, q, \dot{q}) = \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q}$, где $\Gamma(t, q, \dot{q})$ — кососимметрическая матрица.

Надо доказать, что $Q(t, q, \dot{q})$ — гироскопический вектор, т.е. $\dot{q}^* Q(t, q, \dot{q}) \equiv 0$. Утверждение будет доказано, если показать справедливость тождества (3.2.22).

Действительно, оно справедливо, поскольку

$$\dot{q}^* Q = \dot{q}^* \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q},$$

и правая часть этого равенства тождественно равна нулю, ибо она является квадратичной формой с кососимметрической матрицей коэффициентов. Теорема доказана.

Определение 2.

Представление гироскопических сил в виде (3.2.20), где матрица $\Gamma(t, q, \dot{q})$ удовлетворяет условиям теоремы Зубова, называется каноническим разложением гироскопических сил, а матрица $\Gamma(t, q, \dot{q})$ называется канонической для заданного вектора $Q(t, q, \dot{q})$ гироскопических сил.

Замечание.

В каноническом разложении гироскопических сил матрица $\Gamma(t, q, \dot{q})$ не является единственной. Очевидно, если матрица $\Gamma_1(t, q, \dot{q})$ является канонической, то любая матрица Γ , определяемая по формуле

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2(t, q, \dot{q}),$$

где $\Gamma_2(t, q, \dot{q})$ — кососимметрическая матрица и такая, что

$$\Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q} \equiv 0, \quad (3.2.25)$$

будет также давать каноническое разложение вектора Q . А это значит, что матрица Γ будет также канонической. Действительно, пусть

$$Q(t, q, \dot{q}) \equiv \Gamma_1(t, q, \dot{q}) \dot{q}. \quad (3.2.26)$$

Тогда

$$(\Gamma_1(t, q, \dot{q}) + \Gamma_2(t, q, \dot{q})) \dot{q} \equiv \Gamma_1(t, q, \dot{q}) \dot{q} + \Gamma_2(t, q, \dot{q}) \dot{q}$$

Учитывая тождества (3.2.25) и (3.2.26), получим

$$(\Gamma_1(t, q, \dot{q}) + \Gamma_2(t, q, \dot{q})) \dot{q} \equiv Q(t, q, \dot{q}). \quad (3.2.27)$$

Поскольку Γ_1 и Γ_2 — кососимметрические матрицы, то матрица $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ будет также кососимметрической. Поэтому (3.2.27) является каноническим разложением вектора Q , и матрица Γ является канонической.

Справедлива следующая теорема.

Теорема.

Если матрица $\Gamma_1(t, q, \dot{q})$ является канонической для заданного вектора $Q(t, q, \dot{q})$ гироскопических сил, то все семейство канонических матриц $\Gamma(t, q, \dot{q})$, задающих разложение вектора $Q(t, q, \dot{q})$, описывается формулой

$$\Gamma(t, q, \dot{q}) = \Gamma_1(t, q, \dot{q}) + \Gamma_2(t, q, \dot{q}), \tag{3.2.28}$$

где $\Gamma_2(t, q, \dot{q})$ — произвольная кососимметрическая матрица, удовлетворяющая тождеству (3.2.25).

Доказательство.

Выше показано, что любая матрица Γ , задаваемая формулой (3.2.28), является канонической для вектора Q . Покажем теперь, что любую каноническую для вектора Q матрицу $\bar{\Gamma}(t, q, \dot{q})$ можно представить в виде (3.2.28). Для этого сначала покажем, что если Γ_0 и Γ_1 — две канонические матрицы для вектора Q , то выполняется тождество

$$(\Gamma_0 - \Gamma_1)\dot{q} \equiv 0. \tag{3.2.29}$$

Действительно, поскольку Γ_0 и Γ_1 — канонические матрицы вектора Q , то будем иметь

$$Q(t, q, \dot{q}) \equiv \Gamma_0(t, q, \dot{q})\dot{q}, \quad Q(t, q, \dot{q}) \equiv \Gamma_1(t, q, \dot{q})\dot{q}.$$

Вычитая одно тождество из другого, получим

$$0 \equiv Q(t, q, \dot{q}) - Q(t, q, \dot{q}) \equiv \Gamma_0(t, q, \dot{q})\dot{q} - \Gamma_1(t, q, \dot{q})\dot{q} = (\Gamma_0(t, q, \dot{q}) - \Gamma_1(t, q, \dot{q}))\dot{q}$$

Это значит, что матрица $\Gamma_0 - \Gamma_1$ удовлетворяет тождеству (3.2.29), или, что то же самое, тождеству (3.2.25). А тогда любую каноническую для вектора Q матрицу $\bar{\Gamma}(t, q, \dot{q})$ можно представить в виде

$$\bar{\Gamma}(t, q, \dot{q}) = \Gamma_1(t, q, \dot{q}) + (\bar{\Gamma}(t, q, \dot{q}) - \Gamma_1(t, q, \dot{q})),$$

где $\Gamma_1(t, q, \dot{q})$ — матрица, о которой говорится в теореме.

По доказанному, матрица

$$\Gamma_2(t, q, \dot{q}) = \bar{\Gamma}(t, q, \dot{q}) - \Gamma_1(t, q, \dot{q})$$

удовлетворяет тождеству (3.2.25). Следовательно, матрица $\bar{\Gamma}(t, q, \dot{q})$ принадлежит семейству (3.2.28). Теорема доказана.

Замечание.

Согласно доказанной теореме, в формуле (3.2.28) в качестве матрицы Γ_1 можно взять любую каноническую матрицу вектора Q . В частности, такой матрицей может служить кососимметрическая матрица Γ_1 , построенная через вектор Q по формуле (3.2.19).

§3. Каноническая структура силовых полей

1°. Теорема Зубова о каноническом разложении поля направлений в системах обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{3.3.1}$$

В этой системе x — вектор размерности $[n \times 1]$, $f(t, x)$ — вещественная вектор-функция размерности $[n \times 1]$, непрерывная при всех t из некоторого интервала I_t на вещественной оси (в частности, I_t может совпадать со всей осью или полуосью) и при всех x из области G n -мерного пространства E^n .

Область G содержит точку $x = 0$, а вместе с ней и отрезки, соединяющие точку $x = 0$ с любой точкой \bar{x} из области G .

Определение 1.

*Множество векторов $f = f(t, x)$ в пространстве E^n , образованное при изменении x в области G и t в интервале I_t , называется **полем направлений системы уравнений** (3.3.1).*

Вектор $f = f(t, x)$ из поля направлений задает скорость и направление изменения положения x в момент времени t на движении системы (3.3.1).

Введем функцию

$$W(t, x) = x^* f(t, x). \quad (3.3.2)$$

Она определена и непрерывна в области задания вектор-функции $f(t, x)$. Наложим на эту функцию дополнительное условие.

Будем считать, что функция $W(t, x)$ непрерывно дифференцируема по x при любом фиксированном t .

Иначе говоря, $\text{grad}_x W(t, x)$ является непрерывной вектор-функцией по совокупности аргументов.

Замечание.

Безусловно, указанное требование к функции $W(t, x)$ накладывает дополнительное условие на вектор-функцию $f(t, x)$.

Например, оно будет выполняться в том случае, если потребуем, чтобы вектор-функция $f(t, x)$ была непрерывно дифференцируема по x при любом фиксированном t .

Однако можно привести примеры, когда $f(t, x)$ не является непрерывно дифференцируемой по x , а функция $W(t, x)$, задаваемая формулой (3.3.2), тем не менее, будет непрерывно дифференцируемой.

Поэтому условие непрерывной дифференцируемости функции $W(t, x)$ предъявляет более слабые требования к вектор-функции $f(t, x)$.

Теорема Зубова (о каноническом представлении поля направлений).

Если выполнены условия, накладываемые на вектор-функцию $f(t, x)$ и функцию $W(t, x)$, сформулированные выше, то справедливы следующие утверждения.

1. *Существует функция $V(t, x)$ вещественная, непрерывная по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемая по x при любом фиксированном t в области задания правых частей системы (3.3.1).*
2. *Функция $V(t, x)$ является решением уравнения*

$$x^* \text{grad}_x V(t, x) = W(t, x), \quad (3.3.3)$$

причем $V(t, 0) \equiv 0$. В этом уравнении через $\text{grad}_x V(t, x)$ обозначен вектор

$$\text{grad}_x V(t, x) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^*.$$

3. *Правые части системы (3.3.1) через функцию $V(t, x)$ представимы в виде*

$$f(t, x) = \text{grad}_x V + H(t, x), \quad (3.3.4)$$

где вектор-функция $H(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания правых частей системы (3.3.1) и в этой области удовлетворяет тождествам по переменным t, x :

$$x^* H(t, x) \equiv 0, \quad H(t, 0) \equiv 0. \quad (3.3.5)$$

4. *Если $H(t, x) \neq 0$, то вектор-функция $H(t, x)$ представима в виде*

$$H(t, x) = \Gamma(t, x)x, \quad (3.3.6)$$

где $\Gamma(t, x)$ — кососимметрическая матрица размерности $(n \times n)$, т.е. для нее справедливо соотношение

$$\Gamma(t, x) = -\Gamma^*(t, x). \quad (3.3.7)$$

Доказательство.

Пусть $W(t, x)$ — функция, о которой говорится в теореме. Построим в области задания правых частей системы (3.3.1) функцию

$$V(t, x) = \int_0^1 \frac{1}{y} W(t, yx) dy = \int_0^1 x^* f(t, yx) dy. \quad (3.3.8)$$

Здесь y — скалярная величина, принимающая значения из отрезка $[0, 1]$. Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы.

1. *Установим справедливость первого утверждения теоремы.*

- Докажем первую часть этого утверждения:

«Функция $V(t, x)$, задаваемая формулой (3.3.8), определена и непрерывна по совокупности аргументов при всех $x \in G$, $t \in I_t$ ».

Действительно, подынтегральная функция $x^* f(t, yx)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов t, x, y при всех $x \in G$, $t \in I_t$ и $y \in [0, 1]$. Поэтому интеграл в (3.3.8) существует при любых значениях аргументов $t, x, x \in G$, $t \in I_t$.

Из непрерывности подынтегральной функции по t, x следует (согласно теореме о непрерывной зависимости интеграла от параметров) непрерывность интеграла, стоящего в правой части равенства (3.3.8).

Следовательно, функция $V(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных t, x в указанном множестве.

- Докажем вторую часть первого утверждения теоремы:

«Функция $V(t, x)$, непрерывно дифференцируема по x при любом фиксированном t из интервала I_t в области задания правых частей системы (3.3.1)».

Вычислим частную производную по x_i , $i = \overline{1, n}$, от подынтегральной функции $W(t, x)$. Такая частная производная существует, так как функция $\frac{1}{y} W(t, z)$ непрерывно дифференцируема по z_i , $i = \overline{1, n}$, и функция $z_i = y x_i$ непрерывно дифференцируема по x_i .

В результате вычислений, с учетом обозначения $z = yx$, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{W(t, z)}{y} \right) = \frac{1}{y} \frac{\partial W}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial x_i} = \frac{1}{y} \frac{\partial W}{\partial z_i} y = \frac{\partial W}{\partial z_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Поскольку $W(t, z)$ непрерывно дифференцируема по z , то $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{W(t, z)}{y} \right)$ будет непрерывной по x .

А тогда из теоремы Лейбница о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра, можем сделать следующие выводы:

- частная производная по x_i от интеграла $\int_0^1 \frac{W(t, xy)}{y} dy$ существует;
- справедливо правило Лейбница для вычисления производной, согласно которому

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \frac{W(t, xy)}{y} dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{W(t, z)}{y} \right) dy;$$

- интеграл, стоящий справа в этом выражении, будет непрерывен по x при любом фиксированном t из интервала I_t .

Поскольку, согласно (3.3.8),

$$\int_0^1 \frac{W(t, xy)}{y} dy = V(t, x),$$

то из указанных выводов следует:

а) частная производная $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ существует для всех $i = \overline{1, n}$;

б) эта частная производная вычисляется по формуле

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{W(t, yx)}{y} \right) dy = \int_0^1 \frac{\partial W(t, z)}{\partial z_i} \Big|_{z=yx} dy;$$

в) производная $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ непрерывна по переменным x при любом фиксированном $t \in I_t$,

поскольку интеграл непрерывен по x при любом фиксированном t .

Этим полностью завершили доказательство первого утверждения теоремы Зубова.

2. Установим справедливость второго утверждения теоремы:

«Функция $V(t, x)$ является решением уравнения

$$x^* \text{grad}_x V(t, x) = W(t, x), \tag{3.3.3}$$

причем $V(t, 0) \equiv 0$ ».

- Покажем сначала, что $V(t, 0) \equiv 0$.

Полагая в формуле (3.3.8) $x = 0$, приходим к нужному результату:

$$V(t, 0) = \int_0^1 x^* f(t, yx) \Big|_{x=0} dy \equiv 0.$$

- Покажем теперь, что функция $V(t, x)$ является решением уравнения (3.3.3).

При доказательстве первого утверждения теоремы установили, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{W(t, yx)}{y} \right) dy = \int_0^1 \frac{\partial W(t, z)}{\partial z_i} \Big|_{z=yx} dy, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.3.9}$$

Вычислим производную $\frac{dW(t, z)}{dy}$, рассматривая t и $x_i, i = \overline{1, n}$, как параметры. Будем

иметь

$$\frac{dW(t, z)}{dy} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(t, z)}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial y} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial W(t, z)}{\partial z_i}. \tag{3.3.10}$$

Умножим (3.3.9) на x_i и просуммируем по i от 1 до n . Получим

$$x^* \text{grad}_x V(t, x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial W(t, z)}{\partial z_i} \Big|_{z=yx} dy.$$

Отсюда, учитывая соотношения (3.3.10), находим

$$x^* \text{grad}_x V(t, x) = \int_0^1 \frac{dW(t, z)}{dy} \Big|_{z=yx} dy = \int_{y=0}^{y=1} dW(t, z) = W(t, yx) \Big|_{y=0}^{y=1} = W(t, x) - W(t, 0) = W(t, x). \tag{3.3.11}$$

Утверждение 2 теоремы доказано.

3. Установим справедливость третьего утверждения теоремы:

«Правые части системы (3.3.1) через функцию $V(t, x)$ представимы в виде

$$f(t, x) = \text{grad}_x V + H(t, x), \tag{3.3.4}$$

где вектор-функция $H(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания правых частей системы (3.3.1) и в этой области удовлетворяет тождествам по переменным t, x :

$$x^* H(t, x) \equiv 0, \quad H(t, 0) \equiv 0. \quad (3.3.5)$$

- Покажем справедливость первой части этого утверждения, а именно:

«Справедливость формулы (3.3.4):

$$f(t, x) = \text{grad}_x V + H(t, x),$$

и вектор-функция $H(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания вектор-функции $f(t, x)$ ».

Действительно, определим функцию $H(t, x)$ следующей формулой

$$H(t, x) = f(t, x) - \text{grad}_x V(t, x). \quad (3.3.12)$$

Поскольку функция $\text{grad}_x V(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности аргументов в области задания вектор-функции $f(t, x)$, и вектор-функция $f(t, x)$ также непрерывная в этой области, то из (3.3.12) следует, что вектор-функция $H(t, x)$ обладает этим свойством – свойством, указанным в первой части третьего утверждения теоремы.

Справедливость формулы (3.3.4)

$$f(t, x) = \text{grad}_x V + H(t, x), \quad (3.3.4)$$

также следует из определения функции $H(t, x)$ по формуле (3.3.12).

- Покажем справедливость второй части третьего утверждения теоремы, а именно:

«Вектор-функция $H(t, x)$ удовлетворяет тождествам

$$x^* H(t, x) \equiv 0, \quad H(t, 0) \equiv 0. \quad (3.3.5)$$

по переменным t, x в области своего задания».

1). Покажем, что в указанной области выполняется первое тождество (3.3.5)

$$x^* H(t, x) \equiv 0. \quad (3.3.13)$$

Пусть x — любая точка из области G . Тогда, умножая (3.3.12) на x^* слева, будем иметь

$$x^* H(t, x) = x^* f(t, x) - x^* \text{grad}_x V(t, x). \quad (3.3.14)$$

Равенство справедливо при всех t, x из области задания вектор-функции $f(t, x)$.

Согласно определению функции $W(t, x)$ (см.(3.3.2))

$$W(t, x) = x^* f(t, x). \quad (3.3.2)$$

Поэтому первый член в правой части (3.3.14) можем заменить на $W(t, x)$.

Произведение $x^* \text{grad}_x V(t, x)$, согласно определению функции $V(t, x)$ (см.(3.3.11))

$$x^* \text{grad}_x V(t, x) = W(t, x). \quad (3.3.11)$$

можем также заменить на $W(t, x)$.

Следовательно, правая часть соотношения (3.3.14) обращается в тождественный нуль в области задания функции $W(t, x)$. Но эта область совпадает с областью задания вектор-функции $f(t, x)$. А тогда для левой части соотношения (3.3.14) справедливо тождество (3.3.13)

$$x^* H(t, x) \equiv 0. \quad (3.3.13)$$

в той же области. Что и требовалось доказать.

2). Покажем, что в указанной области выполняется второе тождество (3.3.5):

$$H(t, 0) \equiv 0. \quad (3.3.15)$$

Оно очевидно в том случае, когда $f(t, x) = \text{grad}_x V$, ибо в такой ситуации, согласно определению функции $H(t, x)$ по формуле (3.3.12)

$$H(t, x) = f(t, x) - \text{grad}_x V(t, x). \quad (3.3.12)$$

будет выполняться тождество

$$H(t, x) \equiv 0$$

при всех t, x из области задания функции $f(t, x)$, а значит и при $x = 0$.

А потому, пусть $H(t, x) \neq 0$.

Поскольку функция $H(t, x)$ непрерывна по совокупности аргументов, и для нее выполняется тождество (3.3.13)

$$x^* H(t, x) \equiv 0, \quad (3.3.13)$$

то применительно к функции $H(t, x)$ справедливы условия леммы 1, доказанной в пункте 1° §2.

Из утверждения леммы 1 следует, что

$$H(t, 0) \equiv 0.$$

Таким образом, утверждение 3 теоремы доказано полностью.

4. Установим справедливость четвертого утверждения теоремы:

«Если $H(t, x) \neq 0$, то вектор-функция $H(t, x)$ представима в виде

$$H(t, x) = \Gamma(t, x)x. \quad (3.3.6)$$

Матрица $\Gamma(t, x)$ — кососимметрическая. Для нее справедливо соотношение

$$\Gamma(t, x) = -\Gamma^*(t, x). \quad (3.3.7)$$

Она имеет размерность $(n \times n)$ ».

Действительно, если $H(t, x) \neq 0$, то из непрерывности вектор-функции $H(t, x)$ и выполнения тождества (3.3.13)

$$x^* H(t, x) \equiv 0, \quad (3.3.13)$$

вытекает, что вектор $H(t, x)$ является гироскопическим.

А тогда согласно утверждению теоремы о каноническом разложении гироскопических сил данная вектор-функция $H(t, x)$ представима в виде (3.3.6), (3.3.7).

Теорема доказана полностью.

Замечание.

При доказательстве четвертого утверждения теоремы применили теорему о каноническом разложении гироскопических сил.

Для того чтобы ее применение было обоснованным, введем обозначения:

$$\dot{q} = x, \quad Q(t, q, \dot{q}) = H(t, x).$$

В этих обозначениях компоненты вектора x трактуются как обобщенные скорости, а вектор-функция $H(t, x)$ — как вектор обобщенных сил $Q(t, \dot{q})$. Все обобщенные силы не зависят от обобщенных координат.

Аналитические свойства обобщенных сил $Q(t, \dot{q})$ в их зависимости от переменных t, \dot{q} полностью совпадают с аналитическими свойствами вектор-функции $H(t, x)$ в ее зависимости от переменных t, x .

Легко видеть, что перенос всех свойств функции $H(t, x)$ на обобщенные силы $Q(t, \dot{q})$ позволяет сделать вывод о том, что эти силы являются гироскопическими, и применить к ним теорему о разложении гироскопических сил. Обратная замена в утверждениях теоремы переменных \dot{q} на x и вектора $Q(t, \dot{q})$ на функцию $H(t, x)$ приводит к равенствам (3.3.6) и (3.3.7):

$$H(t, x) = \Gamma(t, x)x, \quad (3.3.6)$$

$$\Gamma(t, x) = -\Gamma^*(t, x). \quad (3.3.7)$$

2°. Каноническое разложение силовых полей.

Вернемся к рассмотрению голономных систем.

Пусть $Q(t, q, \dot{q}), j = \overline{1, n}$, — непотенциальные обобщенные силы, действующие на механическую систему. Обозначим через Q — вектор обобщенных сил $Q = (Q_1, \dots, Q_n)^*$, причем, хотя бы одна из его компонент отлична от тождественного нуля.

Вектор $Q(t, q, \dot{q})$ задан и непрерывен при $t \in I_t$, $q \in G$, $\dot{q} \in G_1$, где I_t — конечный или бесконечный интервал изменения времени t , а G и G_1 — области изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Относительно G_1 считаем, что она содержит точку $\dot{q} = 0$ и вместе с ней точки

$$\tilde{q} = y\dot{q}, \quad \forall y \in [0, 1],$$

т.е. содержит точки \tilde{q} всего отрезка, соединяющего любую точку $\dot{q} \in G_1$ с точкой $\dot{q} = 0$.

Справедлива следующая теорема Зубова о каноническом разложении силовых полей.

Теорема Зубова (о каноническом разложении силовых полей).

Если выполнены условия, накладываемые на вектор обобщенных сил $Q(t, q, \dot{q})$, сформулированные выше, и виртуальная мощность $N_q(t, q, \dot{q}) = \dot{q}^ Q(t, q, \dot{q})$ является непрерывно дифференцируемой функцией по переменным \dot{q} , то:*

- 1) *существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t, q, \dot{q})$, являющаяся решением уравнения*

$$\dot{q}^* \text{grad}_{\dot{q}} V = N_q(t, q, \dot{q}),$$

и принимающая значение $V(t, q, 0) \equiv 0$;

- 2) *существует непрерывный по совокупности переменных вектор $H(t, q, \dot{q})$ такой, что вектор Q представим в виде*

$$Q = \text{grad}_{\dot{q}} V + H(t, q, \dot{q});$$

- 3) *если $H(t, q, \dot{q})$ в этом представлении не является тождественным нулем, то*

$$H(t, q, \dot{q}) = \Gamma(t, q, \dot{q}) \dot{q},$$

где $\Gamma(t, q, \dot{q})$ — кососимметрическая матрица, т.е. $\Gamma^ = -\Gamma$.*

Доказательство очевидно, поскольку к вектору Q можно применить теорему о каноническом представлении поля направлений, считая, что в вектор-функции $Q(t, q, \dot{q})$ аргументы t, q — это параметры, а аргумент \dot{q} является переменным, т.е. $\dot{q} = x$.