ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие является продолжением [17]. Оно создано на базе хорошо известных учебных пособий по математическому анализу [1–16]. В его основу положены лекции В. В. Жука, которые неоднократно читались им в первом семестре на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета и в ряде других университетов для специальностей с повышенной математической подготовкой.

Пособие содержит полное, замкнутое в себе, изложение лекционного материала, который, по мнению авторов, соответствует второму семестру. Изложение носит, вообще говоря, несколько сухой характер, что связано с тем, что в него не вошли многочисленные неформальные разъяснения и отступления, сопровождающие реальное чтение лекций.

Особо отметим, что авторы не претендуют на оригинальность. Они просто надеются, что данное пособие будет способствовать лучшему усвоению студентами курса лекций и поможет им при подготовке к экзамену.

ЛЕКЦИЯ 1

§9. Формула Ньютона—Лейбница. Формула замены переменной в определённом интеграле и интегрирование по частям

1

Теорема 9.1 (формула Ньютона—Лейбница). *Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Если функция Φ является её первообразной на $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{9.1}$$

► Положим $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$. Функция F является первообразной для f на $[a, b]$. Так как F и Φ две первообразные одной и той же функции f на $[a, b]$, то $F(x) = \Phi(x) + C$ при $a \leqslant x \leqslant b$, где $C = const$ и, следовательно,

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) + C.$$

Отсюда при $x = a$ получаем, что $C = -\Phi(a)$. Следовательно,

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Полагая здесь $x = b$, получаем (9.1). ◄

Для краткости записи часто употребляются следующие обозначения

$$\Phi(x)\big|_a^b := \Phi(b) - \Phi(a)$$

или

$$\left[\Phi(x)\right]_a^b := \Phi(b) - \Phi(a).$$

Теорема 9.2. *Пусть f непрерывна на отрезке X с концами a и b; функция φ определена и непрерывна вместе с φ' на отрезке Y с концами α и β, причем $\varphi(Y) \subset X, \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \tag{9.2}$$

Эта формула называется формулой замены переменной в определённом интеграле или формулой интегрирования подстановкой.

► Пусть Φ — первообразная f на X. Тогда при $t \in Y$ имеет смысл сложная функция $\Phi(\varphi(t))$, которая является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \Phi(\varphi(\beta)) - \Phi(\varphi(\alpha)) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Отсюда и следует формула (9.2). ◄

Теорема 9.3 (интегрирование по частям). *Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывны вместе со своими производными на $[a, b]$, то*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx \tag{9.3}$$

или коротко

$$\int_a^b u\,dv = uv\big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

► Имеем

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,du.$$

Все эти интегралы существуют ибо подинтегральные функции непрерывны. По формуле Ньютона—Лейбница

$$\int_a^b (uv)'dx = uv\big|_a^b.$$

Отсюда получаем

$$uv\big|_a^b = \int_a^b u\,dv + \int_a^b v\,dv.$$

◄

§10. Неравенства Чебышева и Иенсена

1

Теорема 10.1 (неравенство Чебышева). *Пусть f и g заданы на $[a, b]$, причём f возрастает, а g убывает на $[a, b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx. \tag{10.1}$$

► Положим

$$A = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$
$$c = \sup\{x \in [a,b] : f(x) \leqslant A\}.$$

Неравенство (10.1) равносильно неравенству

$$0 \leqslant \int\limits_a^b (A - f(x))g(x)\,dx.$$

Так как при $x \in [a,c)$ справедливы неравенства

$$A - f(x) \geqslant 0, \quad g(x) \geqslant g(c),$$

а при $x \in (c,b]$ неравенства

$$A - f(x) \leqslant 0, \quad g(x) \leqslant g(c),$$

то

$$\int\limits_a^b (A - f(x))g(x)\,dx = \int\limits_a^c (A - f(x))g(x)\,dx + \int\limits_c^b (A - f(x))g(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_a^c (A - f(x))g(c)\,dx + \int\limits_c^b (A - f(x))g(c)\,dx = g(c)\int\limits_a^b (A - f(x))\,dx = 0.$$

◄

2

Пусть E — промежуток в $\mathbb{R}$. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется выпуклой вниз на E, если для любых $x, y \in E,\ \alpha \in (0,1)$ выполняется неравенство

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Геометрически это означает, что для любой пары точек $P_1,\ P_2$ кривой $y = f(x)$ точки дуги P_1P_2 расположены ниже хорды P_1P_2, стягивающей эту дугу.

Множество всех функций выпуклых вниз на E обозначают $K_+(E)$. Если $-f \in K_+(E)$, то f называется выпуклой вверх на E. Множество таких функций обозначаем $K_-(E)$.

Теорема 10.2 (неравенство Иенсена для сумм)**.** *Если* $f \in K_+(E),\ x_k \in E,\ p_k \geqslant 0, (k = \overline{1,n}), S_n = \sum\limits_{k=1}^n p_k > 0,$ *то*

$$f\left(\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^n p_k x_k\right) \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^n p_k f(x_k). \tag{10.2}$$

▶ Можно считать, что все $p_k > 0$. При $n = 1$ и $n = 2$ неравенство (10.2) тривиально. Допустив, что (10.2) верно при некотором натуральном $n \geqslant 2$, покажем, что оно верно и при $n + 1$. Положив $\alpha = \frac{S_n}{S_{n+1}}$ и пользуясь определением выпуклости, имеем

$$f\left(\frac{1}{S_{n+1}}\sum_{k=1}^{n+1} p_k x_k\right) = f\left(\alpha\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} p_k x_k + (1-\alpha)x_{n+1}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha f\left(\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) + (1-\alpha)f(x_{n+1}) = \frac{S_n}{S_{n+1}} f\left(\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} p_k x_k\right) + \frac{p_{n+1}}{S_{n+1}} f(x_{n+1}).$$

Осталось воспользоваться индукционным предположением. ◀

Теорема 10.3 (неравенство Иенсена для интегралов)**.** *Пусть функции $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $p : [a, b] \to R$ непрерывны на $[a, b]$, $p(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, $\int\limits_a^b p(x)\,dx > 0$. Функция Φ непрерывна и выпукла вниз на $f([a, b])$. Тогда*

$$\Phi\left(\frac{\int\limits_a^b f(x)p(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}\right) \leqslant \frac{\int\limits_a^b \Phi(f(x))p(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,dx}. \tag{10.3}$$

▶ Положим

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

В силу (10.2) имеем

$$\Phi\left(\frac{f(x_0)p(x_0) + \ldots + f(x_{n-1})p(x_{n-1})}{p(x_0) + \ldots + p(x_{n-2})}\right) \leqslant \frac{\Phi(f(x_0))p(x_0) + \ldots + \Phi(f(x_{n-1}))p(x_{n-2})}{p(x_0) + \ldots + p(x_{n-1})}.$$

Отсюда

$$\Phi\left(\frac{\sum f(x_k)p(x_k)\Delta x_k}{\sum p(x_k)\Delta x_k}\right) \leqslant \frac{\sum \Phi(f(x_k))p(x_k)\Delta x_k}{\sum p(x_k)\Delta x_k}$$

и (10.3) получается предельным переходом при $n \to \infty$. ◀

§11. Интегрируемость суперпозиции функций

Лемма 11.1. *Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Для существования $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ необходимо и достаточно, чтобы по заданным числам $\varepsilon > 0$ и $\sigma > 0$ можно было найти $\delta > 0$ такое, что если все $\Delta x_k < \delta$, то $\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'}$ длин всех промежутков, которым отвечают колебания функции $\omega_{k'} \geqslant \varepsilon$, была меньше σ.*

▶ Необходимость ясна из неравенств

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k \geqslant \sum_{k'} \omega_{k'}\Delta x_{k'} \geqslant \varepsilon \sum_{k'} \Delta x_{k'}.$$

Если за счёт выбора δ сделать первую сумму меньше $\varepsilon\sigma$, то и получится, что

$$\sum_{k'} \Delta x_{k'} < \sigma.$$

Достаточность вытекает из оценок

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k = \sum_{k'} \omega_{k'} \Delta x_{k'} + \sum_{k''} \omega_{k''} \Delta x_{k''} \leqslant \Omega \sum_{k'} \Delta x_{k'} + \varepsilon \sum_{k''} \Delta x_{k''} \leqslant \Omega\sigma + \varepsilon(b-a).$$

Здесь Ω — колебание функции на всём рассматриеваемом отрезке, k'' отвечает частичным промежуткам, в которых колебание $\omega_{k''} < \varepsilon$. ◀

Теорема 11.1. *Если функция f интегрируема на $[a, b]$ и её значения не выходят за пределы отрезка $[c, d]$, в котором непрерывна функция $\varphi(y)$, то сложная функция $\varphi(f(x))$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

▶ Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$ и $\sigma > 0$. В силу непрерывности функции $\varphi(y)$ найдется такое $\eta > 0$, что в любом промежутке значений y с длиной меньшей η колебание функции φ будет меньше ε. Ввиду интегрируемости функции f по числам η и σ найдется такое $\delta > 0$, что если отрезок $[a, b]$ разбит на части с длинами $\Delta x_k < \delta$, то сумма $\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'}$ длин тех из них, для которых колебание функции $\omega_{k'}(f) \geqslant \eta$ станет меньше σ. Для прочих отрезков имеем $\omega_{k''}(f) < \eta$, а, следовательно, по самому выбору чисел η будет $\omega_{k''}(\varphi(f)) < \varepsilon$. Таким образом, для функции $\varphi(f(x))$ колебание может оказаться $\geqslant \varepsilon$ лишь в некоторых промежутках первой группы, сумма длин которых заведомо меньше σ. Применяя к сложной функции лемму 11.1, убеждаемся в её интегрируемости. ◀

Следствие 11.1. *Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, $\alpha \geqslant 0$, то функция $|f|^\alpha$ также интегрируема на отрезке $[a, b]$.*

ЛЕКЦИЯ 2

§12. Неравенства Гёльдера и Минковского

1

Лемма 12.1 (неравенство Юнга)**.** *Пусть* $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{12.1}$$

► Можно считать, что a и b положительны. Функция $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}} - \frac{t}{p}$ принимает наибольшее значение на $(0, \infty)$ в точке $t = 1$. Следовательно, $\varphi(t) \leqslant \varphi(1)$ при $t > 0$, т. е.

$$t^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{t}{p} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{t}{p} + \frac{1}{q}.$$

Подставляя сюда $t = a^p b^{-q}$ и умножая обе части получившегося неравенства на b^q, приходим к соотношению (12.1). ◄

Теорема 12.1 (неравенство Гёльдера для сумм)**.** *Пусть* $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; a_k *и* b_k *(*$k = \overline{1, n}$*) — произвольные числа. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{12.2}$$

► Допустим, что обе суммы $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p$ и $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q$ положительны. В неравенстве (12.1) положим

$$a = \left(\frac{1}{S_1}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad b = \left(\frac{1}{S_2}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда из (12.1) следует, что

$$|a_k b_k| \leqslant S_1^{\frac{1}{p}} S_2^{\frac{1}{q}} \left(\frac{|a_k|^p}{pS_1} + \frac{|b_k|^q}{qS_2}\right). \tag{12.3}$$

Отсюда получаем

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant S_1^{\frac{1}{p}} S_2^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = S_1^{\frac{1}{p}} S_2^{\frac{1}{q}},$$

т. е неравенство (12.2). Если S_1 (или S_2) равны нулю, то тогда все $a_k = 0$ ($b_k = 0$), следовательно $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = 0$, т. е. неравенство (12.2) очевидно. ◄

Теорема 12.2 (неравенство Гёльдера для интегралов)**.** *Пусть* $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *функции* f *и* g *интегрируемы на* $[a, b]$. *Тогда*

$$\left| \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q\,dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{12.4}$$

► Пусть $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$, $f(x_k) = a_k$, $g(x_k) = b_k$. По теореме 12.1

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k (x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p (x_k - x_{k-1}) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q (x_k - x_{k-1}) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и учитывая, что функции fg, $|f|^p$, $|g|^q$ интегрируемы на $[a, b]$, приходим к 12.4. ◄

Теорема 12.3 (неравенство Минковского для интегралов)**.** *Пусть функции* f *и* g *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$, $p \geqslant 1$. *Тогда*

$$\left(\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{12.5}$$

► При $p = 1$ неравенство (12.5) очевидно. Пусть $p > 1$. Положим

$$J_1 = \int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx, \quad J_2 = \int\limits_a^b |g(x)|^p\,dx, \quad J = \int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx.$$

Надо доказать, что

$$J^{\frac{1}{p}} \leqslant J_1^{\frac{1}{p}} + J_2^{\frac{1}{p}}.$$

Если $J = 0$, то (12.5) очевидно. Пусть $J \neq 0$. Положим $q = \frac{p}{p-1}$. Ясно, что

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant (|f(x)| + |g(x)|)\left(|f(x) + g(x)|^{p-1}\right). \tag{12.6}$$

Применяя интегральное неравенство Гёльдера к произведению $|f||f+g|^{p-1}$ и учитывая, что $(p-1)q = p$, получаем

$$\int\limits_a^b |f(x)||f(x) + g(x)|^{p-1}\,dx \leqslant \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{q}} = J_1^{\frac{1}{p}} J^{\frac{1}{q}}.$$

Аналогично

$$\int\limits_a^b |g(x)||f(x) + g(x)|^{p-1} \leqslant J_2^{\frac{1}{p}} J^{\frac{1}{q}}.$$

Тогда из неравенства (12.6) вытекает, что

$$J \leqslant \left(J_1^{\frac{1}{p}} + J_2^{\frac{1}{p}} \right) J^{\frac{1}{q}},$$

а это приводит к неравенству (12.5). ◄

Теорема 12.4 (неравенство Минковского для сумм)**.** *Пусть* $p \geqslant 1, a_k,\ b_k\ (k = \overline{1,n})$ *— произвольные вещественные числа. Тогда*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство предоставляется читателю.

§13. Формула Валлиса

Лемма 13.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$,

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx.$$

Тогда

$$J_m = \begin{cases} \frac{(m-1)!!}{m!!}\frac{\pi}{2} & \text{при } m \text{ четном}, \\ \frac{(m-1)!!}{m!!} & \text{при } m \text{ нечетном}. \end{cases}$$

Символ $m!!$ *означает произведение натуральных чисел не превосходящих* m *и одной с ним четности.*

▶ Интегрируя по частям, находим

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\, d(-\cos x) = -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx.$$

Отсюда

$$J_m = (m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x\, dx.$$

Значит,

$$J_m = (m-1)J_{m-2} - (m-1)J_m.$$

Таким образом,

$$J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$$

и J_m сводится к J_0 или J_1. При $m = 2n$ имеем

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

при $m = 2n+1$

$$J_{2n+1} = \frac{2n(2n-2)\ldots 4\cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3\cdot 1}\cdot 1.$$

◀

Теорема 13.1 (формула Валлиса)**.** *Справедливо равенство*

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1}.$$

► Полагая $0 < x < \frac{\pi}{2}$, имеем

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x.$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x\,dx.$$

В силу леммы 13.1

$$\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 \frac{1}{2n}.$$

Так как разность между двумя крайними членами равная

$$\frac{1}{(2n+1)2n}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2n}$$

стремится к нулю, то $\frac{\pi}{2}$ является пределом обоих крайних членов. ◄

ЛЕКЦИЯ 3

§14. Формула Тейлора с интегральным остаточным членом

Теорема 14.1. *Пусть функция f определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до порядка $n+1$ включительно на интервале (x_0-h, x_0+h), где $h > 0$. Пусть далее*

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{14.1}$$

Тогда остаточный член формулы Тейлора $r_n(x)$ при всех $x \in (x_0-h, x_0+h)$ можно записать в следующих трех видах

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt, \tag{14.2}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{14.3}$$

где γ принадлежит интервалу с концами в точках x_0 и x, и

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \tag{14.4}$$

где $0 < \theta < 1$.

Формула (14.2) называется остаточным числом формулы Тейлора в интегральной форме, формулы (14.3) и (14.4), как уже отмечалось ранее, в форме Лагранжа и форме Коши, соответственно.

► В силу формулы Ньютона—Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\ dt = f(x) - \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t).$$

Проинтегрировав по частям интеграл в правой части, получим

$$f(x) = f(x) + [-f'(t)(x-t)]_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Пусть для некоторого $m \leqslant n$ уже доказано, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt. \tag{14.5}$$

Проинтегрируем по частям последний член еще раз

$$\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-1}\,dt = -\frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m)}(t)\,d(x-t)^m =$$
$$= -\left.\frac{f^{(m)}(t)(x-t)^m}{m!}\right|_{x_0}^{x} + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt =$$
$$= \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt,$$

и подставим это выражение в (14.5). Тогда имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{m!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^m\,dt. \tag{14.6}$$

В результате получаем формулу (14.5), в которой m заменена на $m+1$. Таким образом, формула (14.6) доказана методом индукции для всех $m \leqslant n$. При $m = n$ ее остаточный член имеет вид (14.2).

Применим теперь обобщенную теорему о среднем к интегралу (14.2), вынося за знак интеграла «среднее значение» производной $f^{(n+1)}$

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где γ лежит на интервале с концами x_0 и x. Формула (14.3) доказана.

Если же применить теорему о среднем к интегралу (14.2), вынося за знак интеграла «среднее значение» всей подынтегральной функции, то получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{n!}(x-\gamma)^n(x-x_0), \tag{14.7}$$

где γ, как и выше, лежит на интервале с концами в точках x_0 и x, т. е.

$$\gamma = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отсюда

$$x - \gamma = x - x_0 - \theta(x-x_0) = (x-x_0)(1-\theta).$$

Подставив это выражение в (14.7), получим формулу (14.4). ◀

§15. Несобственные интегралы

1

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.

Пусть функция f определена на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, c] \subset [a, +\infty)$.

Определение 15.1. Если существует (конечный) предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx, \tag{15.1}$$

то его называют несобственным интегралом и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{15.2}$$

Таким образом,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Говорят также, что несобственный интеграл (15.2) сходится на промежутке $[a, +\infty)$, а функция $f(x)$ называется интегрируемой (в несобственном смысле) на промежутке $[a, +\infty)$. Если же предел (конечный) (15.1) не существует, то говорят, что интеграл (15.2) расходится.

Замечание 15.1. Если $a_1 > a$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ и $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно. При этом в случае сходимости

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{a_1} f(x)\, dx + \int_{a_1}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{15.3}$$

► В самом деле, так как

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{a_1} f(x)\, dx + \int_{a_1}^b f(x)\, dx, \tag{15.4}$$

то пределы $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx$ и $\lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_{a_1}^b f(x)\, dx$ существуют или не существуют одновременно. Из (15.4) также очевидным образом вытекает (15.3) ◄

Если функция f непрерывна на промежутке $[a, +\infty)$, F — ее первообразная на $[a, +\infty)$, то $\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ и

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \to +\infty} (F(b) - F(a)) = F(+\infty) - F(a),$$

где
$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b).$$

Аналогично определяются несобственные интегралы
$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$$
и
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{15.5}$$
где c — произвольная точка промежутка $(-\infty, +\infty)$.

Если хоть один из интегралов, стоящих в правой части (15.5) расходится, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ считается расходящимся и ему не предписывается никакого значения. Легко убедиться, что определение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, данное равенством (15.5) не зависит от выбора точки c.

2

Для определенности будем рассматривать несобственные интегралы в виде (15.2).

Теорема 15.1. *Для того, чтобы несобственный интеграл (15.2) был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\Delta \geqslant a$ такое, что при любых $b', b'' \geqslant \Delta$ выполняется неравенство*
$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

► Сходимость (15.2) равносильна существованию (конечного) предела функции
$$F(b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{15.6}$$
при $b \to +\infty$. В силу критерия Коши, для существования предела $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\Delta \geqslant a$ такое, что при любых b', $b'' \geqslant \Delta$ выполнялось неравенство $|F(b'') - F(b')| < \varepsilon$. В силу (15.6) последнее неравенство можно записать в виде
$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| = \left|\int\limits_{a}^{b''} f(x)\,dx - \int\limits_{a}^{b'} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$
◄

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируемы по Риману на любом отрезке $[a, b] \subset [a, +\infty)$.

Теорема 15.2 (признак сравнения)**.** *Пусть* $|f(x)| \leqslant g(x)$ *при* $x \geqslant a$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится. Тогда сходится и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

► По условию теоремы несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. В силу теоремы 15.1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta \geqslant a$, что при любых $b', b'' \geqslant \Delta$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Так как $|f(x)| \leqslant g(x)$, то

$$\left|\int\limits_{b'}^{b''} f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{b'}^{b''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Отсюда в силу теоремы 15.1 следует,что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. ◄

ЛЕКЦИЯ 4

3

Определение 15.2. Несобственный интеграл (15.2) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{15.7}$$

Если интеграл (15.2) сходится, а интеграл (15.7) расходится, то говорят, что (15.2) условно сходится.

Из теоремы 15.2 следует, что если интеграл (15.2) абсолютно сходится, то он сходится (в качестве функции $g(x)$ нужно взять $|f(x)|$).

Теорема 15.3. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant a$. Тогда для сходимости (15.2) необходимо и достаточно, чтобы существовало такое $M > 0$, чтобы для всех $b \geqslant a$ имело место неравенство*

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx \leqslant M. \tag{15.8}$$

► Функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ возрастает при $b \geqslant a$, так как по условию теоремы $f(x) \geqslant 0$. Поэтому для сходимости интеграла (15.2) необходимо и достаточно, чтобы $F(b)$ была ограничена сверху. Это значит что существует такое $M > 0$, что при $b \geqslant a$ выполняется неравенство $F(b) \leqslant M$. Таким образом, при $b \geqslant a$, имеет место неравенство (15.8). ◄

Докажим один достаточный признак сходимости интегралов, обычно называемый признаком Дирихле.

Теорема 15.4 (признак Дирихле)**.** *Пусть*

1) Функция f непрерывна и имеет ограниченную первообразную F при $x \geqslant a$;

2) Функция g непрерывно дифференцируема и убывает при $x \geqslant a$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Тогда

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\, dx \tag{15.9}$$

сходится.

► В силу сделанных предположений функция fg непрерывна, а значит и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b]$, где $a < b < +\infty$. Поэтому имеет смысл говорить о несобственном интеграле (15.9). Проинтегрировав по частям произведение $f(x)g(x)$ на отрезке $[a, b]$, получим

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dF(x) = g(x)F(x)\big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \tag{15.10}$$

Исследуем поведение обоих слагаемых правой части при $b \to +\infty$. В силу ограниченности функции F имеем $M = \sup |F(x)| < +\infty$. Поэтому $|g(b)F(b)| \leqslant Mg(b)$. В силу условия 3 теоремы $\lim\limits_{b\to+\infty} g(b)F(b) = 0$. Далее из убывания функции g следует, что $g'(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant a$ и поэтому

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant M\int_a^b |g'(x)|\,dx = -M\int_a^b g'(x)\,dx = M\,(g(a) - g(b)) \leqslant Mg(a),$$

ибо из условий 2 и 3 следует, что $g(x) \geqslant 0$, в частности, что $g(b) \geqslant 0$. Таким образом,

$$\int_a^b |F(x)g'(x)|\,dx \leqslant Mg(a)$$

при всех $b \geqslant a$ и значит $\int\limits_a^\infty F(x)g'(x)\,dx$ абсолютно, а, следовательно и просто сходится, т. е. существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b F(x)g'(x)\,dx$. Мы доказали, что в правой части (15.10) оба слагаемых при $b \to +\infty$ имеют конечный предел, значит предел левой части при $b \to +\infty$ конечен, что означает сходимость интеграла (15.9). ◀

Пример 15.1. Интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$$

сходится при $s > 1$ и расходится при $s \leqslant 1$. Действительно

$$\int_1^b \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-s}}{1-s}\right|_1^b & \text{при} \quad s \neq 1, \\ \ln x\big|_1^b & \text{при} \quad s = 1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{b^{1-s}}{1-s} & \text{при} \quad s \neq 1, \\ \ln b & \text{при} \quad s = 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^s} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^s} = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{при} \quad s > 1, \\ +\infty & \text{при} \quad s \leqslant 1. \end{cases}$$

Пример 15.2. Применим признак Дирихле к исследованию сходимости интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx, \quad \alpha > 0. \tag{15.11}$$

Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а непрерывно дифференцируемая функция $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ при $\alpha > 0$ монотонно убывает и стремится к нулю при $x \to +\infty$. Все условия теоремы 15.4 выполнены, поэтому интеграл (15.11) сходится.

4

<u>Несобственные интегралы от неограниченных функций.</u>

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, b)$, неограничена на промежутке и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, b)$.

Определение 15.3. Если существует конечный предел

$$\lim_{\eta \to b-0} \int_a^{\eta} f(x)\, dx, \tag{15.12}$$

то его называют несобственным интегралом и обозначают $\int_a^b f(x)\, dx$.

Говорят также, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ сходится на $[a, b]$, а функция $f(x)$ называется интегрируемой в несобственном смысле на отрезке $[a, b]$. Точка b называется особой точкой для $\int_a^b f(x)\, dx$.

Если же предел (15.12) не существует, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)\, dx$ расходится. Формула

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\eta \to b-0} \int_a^{\eta} f(x)\, dx \tag{15.13}$$

имеет место и в том случае, когда функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, так как функция $F(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)\, dx$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поэтому для несобственных интегралов используют те же обозначения, что и для интегралов Римана.

Если $a < a_1 < b$ то интегралы $\int_a^b f(x)\, dx$ и $\int_{a_1}^b f(x)\, dx$ сходятся или расходятся одновременно. В самом деле, так как

$$\int_a^{\eta} f(x)\, dx = \int_a^{a_1} f(x)\, dx + \int_{a_1}^{\eta} f(x)\, dx,$$

пределы $\lim\limits_{\eta \to b-0} \int_a^{\eta} f(x)\, dx$ и $\lim\limits_{\eta \to b-0} \int_{a_1}^{\eta} f(x)\, dx$ существуют или не существуют одновременно.

Формулу (15.13) иногда удобнее записывать в следующем виде:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\, dx.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b)$ и $F(x)$ — её первообразная, то

$$\int_a^{\eta} f(x)\, dx = F(\eta) - F(a)$$

и
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to b-0}(F(\eta)-F(a)) = F(b-0)-F(a),$$
где
$$F(b-0) = \lim_{\eta\to b-0} F(\eta).$$

Аналогично определяется несобственный $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в случае, когда $f(x)$ определена и неограничена на промежутке $(a,b]$ и интегрируема на любом отрезке $[\eta,b]\subset(a,b]$. Тогда полагают
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\eta\to a+0}\int\limits_\eta^b f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ определена на (a,b) и обе точки a и b оказываются особыми, то полагают по определению
$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx,$$
где c — произвольная точка (a,b).

Для определенности будем рассматривать интеграл, определенный формулой (15.13).

Определение 15.4. Несобственный интеграл (15.13) называется абсолютно сходящимся, если сходится несобственный интеграл
$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx. \tag{15.14}$$
Если (15.13) сходится, а (15.14) расходится, то говорят, что (15.13) сходится условно.

5

Следующие теоремы доказываются аналогично соответствующим теоремам для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

Теорема 15.5 (критерий Коши)**.** *Для того, чтобы несобственный интеграл* (15.13) *был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало* $\delta>0$ *такое, что при любых* η' *и* $\eta''\in[a,b)\,, b-\delta<\eta'<b, b-\delta<\eta''<b$ *выполнялось неравенство*
$$\left|\int\limits_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx<\varepsilon\right|.$$

Теорема 15.6 (признак сравнения)**.** *Пусть* $|f(x)|\leqslant g(x)$ *при* $a\leqslant x<b$ *и несобственный интеграл* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *сходится. Тогда сходится и интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Из этой теоремы непосредственно следует, что если (15.13) сходится абсолютно, то он сходится.

Теорема 15.7. *Пусть* $f(x) \geqslant 0$ *при* $a \leqslant x < b$. *Тогда для сходимости* (15.13) *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое* $M > 0$, *что при* $a < \eta < b$ *имело место неравенство*

$$\int\limits_a^\eta f(x)\,dx \leqslant M.$$

Пример 15.3. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^s}.$$

Из равенств

$$\int\limits_a^\eta \frac{dx}{(b-x)^s} = \begin{cases} -\frac{(b-x)^{1-s}}{1-s}\Big|_a^\eta, & \text{если} \quad s \neq 1, \\ -\ln(b-x)|_a^\eta, & \text{если} \quad s = 1, \end{cases}$$

следует, что рассматриваемый интеграл существует как интеграл Римана при $s \leqslant 0$, сходится при $0 < s < 1$ и расходится при $s \geqslant 1$.

Определение 15.5. Если $f(x)$ интегрируема в несобственном смысле на каждом из промежутков $(-\infty, a_1]$, $[a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$, $[a_n, +\infty)$, то по определению полагаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a_1} f(x)\,dx + \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,dx + \ldots + \int\limits_{a_n}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

ЛЕКЦИЯ 5

6

Понятие главного значения несобственного интеграла.

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, b] \subset (\infty, +\infty)$. Если существует предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx,$$

то его называют главным значением несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ и обозначают

$$\text{v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ кроме, быть может, точки $c \in (a, b)$ и интегрируема по Риману на любом отрезке $[a, \eta] \subset [a, c)$ и на любом отрезке $[\gamma, b] \subset (c, b]$. Если существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx \right)$$

то его называют главным значением несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx$ и обозначают

$$\text{v. p.} \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

ГЛАВА 10. Числовые ряды

§1. Определение ряда и его сходимость

1

Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ — числовая последовательность. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots \qquad (1.1)$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \qquad (1.1)$$

называется числовым рядом, а u_k — его k-м членом.

Составим последовательность:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \ldots, S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \ldots$$

Величина S_n называется n-ой частичной (частной) суммой ряда (1.1).

Определение 1.1. Ряд (1.1) называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$. Предел S последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ называется суммой ряда (1.1). При этом пишут

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ расходится, то говорят, что ряд (1.1) расходится. Если $\lim S_n = \infty, \lim S_n = +\infty, \lim S_n = -\infty$, то соответственно пишут

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty\ (+\infty,\ -\infty).$$

Вопрос сходимости ряда (1.1) по определению равносилен вопросу существования конечного предела у последовательности $\{S_n\}$. Обратно, какую бы последовательность $\{a_n\}$ ни взять, вопрос о наличии у неё конечного предела может быть сведен к вопросу о сходимости ряда

$$a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) + \ldots,$$

для которого частной суммой n-го порядка будет a_n.

Ряд, членами которого являются члены ряда (1.1), начиная с $n+1$-го, взятые в том же порядке, что и в ряде (1.1), называется n-м остатком ряда (1.1) и обозначается

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \quad \text{или} \quad u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots.$$

Если n-й остаток ряда (1.1) сходится, то его сумму будем обозначать через r_n:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

и называть просто остатком ряда. Всякую сумму конечного числа слагаемых $S_{n_0} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_0}$ можно рассматривать как ряд, добавив к ней члены u_{n_0+1}, u_{n_0+2} и т. д., равные нулю. Сумма получившегося ряда будет, очевидно, совпадать с заданной суммой.

Пример 1.1. Рассмотрим ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \tag{1.2}$$

где $x \in \mathbb{R}$. Частичные суммы вычисляются по формуле суммы геометрической прогрессии

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Если $|x| < 1$, то при $n \to \infty$ будет $x^n \to 0$, отсюда следует, что

$$S_n \to S = \frac{1}{1-x}. \tag{1.3}$$

Таким образом, при $|x| < 1$ ряд (1.2) сходится и его сумма равна $\dfrac{1}{1-x}$. Если $x = 1$, то $S_n = n$ и следовательно, ряд (1.2) расходится. При $x = -1$ имеем $S_{2k} = 0$, $S_{2k+1} = 1$. Таким образом, последовательность S_n не имеет предела и ряд (1.2) расходится. При $|x| > 1$ будет $|S_n| \to +\infty$ и, следовательно, ряд (1.2) также расходится.

2

Критерий Коши сходимости ряда.

Применяя к последовательности S_n критерий Коши и учитывая, что при $m < n$ имеем $S_n - S_m = u_{m+1} + \ldots + u_n$, получаем критерий Коши для сходимости ряда.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал номер n_ε, такой что при любом $n \geqslant n_\varepsilon$ и любом $p \in \mathbb{Z}_+$ выполнялось неравенство*

$$|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

В частности, если ряд (1.1) сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует n_ε такой, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ будет $|u_n| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Таким образом, у сходящегося ряда последовательность его членов u_n стремится к нулю. Соотношение $u_n \to 0$ является необходимым условием сходимости ряда (1.1). Кратко свойство

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{1.5}$$

выражают, говоря, что общий член сходящегося ряда стремится к 0.

Пример 1.2. Рассмотрим гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Здесь n-й член $u_n = \frac{1}{n} \to 0$, но ряд расходится.

Действительно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

т. е. для любого n при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = n-1$ неравенство (1.4) не выполняется. Таким образом, из критерия Коши следует, что гармонический ряд расходится. Этот пример показывает, что условие (1.5) не является достаточным.

Теорема 1.2. *Пусть $c \in \mathbb{R}$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$, называемый произведением данного ряда на число c, также сходится и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \tag{1.6}$$

► Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} cu_k$, тогда $S'_n = cS_n$. По условию $\lim S_n$ существует. Тогда $\lim S'_n$ также существует, причем $\lim S'_n = c \lim S_n$. ◄

Теорема 1.3. *Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$, называемый суммой данных рядов, также сходится, причем*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \tag{1.7}$$

► Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k, \sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k + v_k)$. Тогда $\sigma_n = S_n + S'_n$ и так как существуют $\lim S_n$ и $\lim S'_n$, то существует и $\lim \sigma_n$, причём

$$\lim \sigma_n = \lim(S_n + S'_n) = \lim S_n + \lim S'_n. \tag{1.8}$$

Это равенство эквивалентно равенству (1.7). ◄

Теорема 1.4. *Если ряд (1.1) сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо остаток сходится, то сам ряд тоже сходится. При этом, если*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \ \ S_m = \sum_{k=1}^{m} u_k, \ \ r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k,$$

то

$$S = S_m + r_m. \tag{1.9}$$

► Пусть $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ — частные суммы ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, а $S_k^{(m)} = u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+k}$ — частные суммы m-го остатка ряда $u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots$ Очевидно, что при $n = m + k$

$$S_n = S_m + S_k^{(m)}. \tag{1.10}$$

Отсюда при фиксированном m следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{k\to\infty} S_k^{(m)}$. Иначе говоря, ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится его некоторый остаток. Так как натуральное число m было произвольно, то первая часть теоремы доказана. Переходя в (1.10) к пределу при $k \to \infty$ и фиксированном m, имеем $S = S_m + r_m$. ◄

Из теоремы 1.4 следует, что отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. Из формулы (1.9) очевидно, что если ряд сходится, то его остаток при $m \to \infty$ стремится к нулю $\left(\lim\limits_{m\to\infty} r_m = \lim\limits_{m\to\infty} (S - S_m) = 0\right)$.

§2. Числовые ряды с неотрицательными членами

У всякого сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{2.1}$$

последовательность его частичных сумм S_n ограничена. Это условие является необходимым для сходимости ряда, но не является достаточным. Например, последовательность частичных сумм ряда $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \ldots$ ограничена, однако, он не сходится. Сейчас займемся изучением рядов, члены которых неотрицательны. Такие ряды иногда называются знаконеотрицательными, или просто положительными. У положительных рядов суммы $S_1, \ S_2, \ldots$ образуют возрастающую последовательность, поэтому, если последовательность $\{S_n\}$ ограничена, то этот ряд является сходящимся.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы ряд (2.1) с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$ была ограничена сверху. При этом, если S — сумма ряда, то*

$$S = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n. \tag{2.2}$$

Если положительный ряд (2.1) расходится, то его сумма $S = +\infty$ и равенство (2.2) остается справедливым.

Все признаки сходимости положительных рядов основаны на теореме 2.1, однако непосредственное её применение часто бывает затруднительно.

Теорема 2.2 (теорема сравнения)**.** *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.3}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{2.4}$$

Если хотя бы с некоторого места, например для $n > N$, выполняется неравенство $a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда (2.4) вытекает сходимость ряда (2.3), а из расходимости ряда (2.3) следует расходимость ряда (2.4).

► Так как отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его сходимости или расходимости, то можно, не уменьшая общности считать, что $a_n \leqslant b_n$ для любого n. Обозначив частичные суммы рядов соответственно A_n и B_n, получим $A_n \leqslant B_n$ Пусть ряд (2.4) сходится. Тогда последовательность B_n ограничена. В силу предыдущего неравенства последовательность A_n также ограничена, а это влечет за собой сходимость (2.3). ◄

Теорема 2.3. *Пусть даны два положительных ряда (2.3) и (2.4), причем $b_n \neq 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Если существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K \quad (0 \leqslant K \leqslant +\infty),$$

то из сходимости ряда (2.4) при $K < +\infty$ вытекает сходимость ряда (2.3), а из расходимости ряда (2.4) при $K > 0$ вытекает расходимость ряда (2.3).

► Пусть ряд (2.4) сходится и $K < +\infty$. Взяв $\varepsilon > 0$, по определению предела для достаточно больших n ($n \geqslant N_\varepsilon$) получим $\dfrac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon$. Откуда $a_n < (K+\varepsilon)b_n$. В силу теоремы 2.1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(K+\varepsilon)b_n$ сходится, отсюда по теореме 2.2 вытекает сходимость ряда (2.3). Если ряд (2.4) расходится и $K > 0$, то в этом случае последовательность $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ имеет конечный предел и ряд (2.3) должен расходиться, ибо, если бы он сходился, то по только что доказанному сходился бы и ряд (2.4). ◄

Теорема 2.4. *Пусть даны два положительных ряда* (2.3) *и* (2.4), *причем* $a_n > 0$, $b_n > 0$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$. *Если, хотя бы начиная с некоторого места, например для* $n > N$, *выполняется неравенство*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}, \tag{2.5}$$

то из сходимости ряда (2.4) *следует сходимость ряда* (2.3).

► Не уменьшая общности, можно считать, что (2.5) справедливо при любом $n \in \mathbb{N}$. В таком случае имеем

$$\frac{a_2}{a_1} \leqslant \frac{b_2}{b_1},\ \frac{a_3}{a_2} \leqslant \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим: $\dfrac{a_n}{a_1} \leqslant \dfrac{b_n}{b_1}$ или $a_n \leqslant \dfrac{a_1}{b_1}b_n$. Пусть ряд (2.4) сходится. Вместе с ним сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_1}{b_1}b_n$, а следовательно (по теореме 2.2) сходится и ряд (2.3). ◄

ЛЕКЦИЯ 6

§3. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с неотрицательными членами

Теорема 3.1 (признак Даламбера). *Пусть дан ряд с положительными членами*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

($a_n > 0$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$). *Тогда*

1) *Если существует число* $q \in (0,1)$ *и номер* n_0 *такие, что при всех* $n \geqslant n_0$ *справедливо неравенство* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$, *то ряд* (3.1) *сходится.*

2) *Если существует номер* n_0 *такой, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ *при любом* $n \geqslant n_0$, *то ряд* (3.1) *расходится.*

► Первое утверждение теоремы следует из теоремы 2.4 и примера 1.1. Докажем второе утверждение. Имеем $a_{n_0+1} \geqslant a_{n_0}$, $a_{n_0+2} \geqslant a_{n_0+1} \geqslant a_{n_0}$ и так как $a_{n_0} > 0$, то n-ный член ряда, будучи ограниченным снизу положительной константой, не стремится к нулю. Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда. ◄

Следствие 3.1. *Пусть дан ряд* (3.1) *с положительными членами и существует (конечный или бесконечный)* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Тогда, если* $l < 1$, *то ряд* (3.1) *сходится, если* $l > 1$, *то ряд* (3.1) *расходится.*

Теорема 3.2 (признак Коши). *Пусть дан положительный ряд* (3.1). *Тогда:*

1) *Если существует число* $q \in (0,1)$ *и номер* n_0 *такие, что для всех* $n \geqslant n_0$ *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, *то ряд* (3.1) *сходится.*

2) *Если существует номер* n_0 *такой, что* $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ *при* $n \geqslant n_0$, *то ряд* (3.1) *расходится.*

► Докажем первое утверждение. При $n \geqslant n_0$ имеем $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$, т. е. $a_n \leqslant q^n$ и по теореме сравнения (теорема 2.2) ряд (3.1) сходится, так как сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$. Докажем второе утверждение. Имеем $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ при $n \geqslant n_0$, т. е. $a_n \geqslant 1$. Отсюда следует, что n-ный член ряда не стремится к нулю. ◄

Следствие 3.2. *Пусть дан положительный ряд* (3.1) *и существует (конечный или бесконечный) предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. *Тогда, если* $l < 1$, *то ряд* (3.1) *сходится, если* $l > 1$, *то ряд* (3.1) *расходится.*

Доказательство следствий 3.1 и 3.2 предоставляется читателю.

Теорема 3.3 (Коши). *Если* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится или расходится вместе с рядом*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}. \tag{3.2}$$

► Рассмотрим сумму $\sum\limits_{n=1}^{m} a_n$ и возьмем k так, чтобы было $2^k > m$. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_m \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{2^k-1} = \\ = a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k-1}) \leqslant \\ \leqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^{k-1}}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Если ряд (3.2) сходится, то правая часть неравенства (3.3) не превосходит суммы этого ряда. Следовательно, последовательность частных сумм ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена и значит он сходится. С другой стороны, если k таково, что $2^k < m$, то имеем

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_m \geqslant a_1 + \ldots + a_{2^k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}) \end{aligned}$$

и из расходимости (3.2) следует расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ◄

Пример 3.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \tag{3.4}$$

сходится, когда $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.

► Если $p < 0$, то общий член ряда (3.4) не стремится к нулю и тем самым не выполнено необходимое условие сходимости ряда. При $p \geqslant 0$ члены ряда (3.4) убывают и можно применить теорему 3.3. Соответстствующий ряд (3.2) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{kp}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-p)} = \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

где $q = 2^{1-p}$. Учитывая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится при $q < 1$ и расходится при $q \geqslant 1$, и применяя теорему 3.3, получим требуемое. ◄

Пример 3.2. Ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log_a^p n} \quad (a > 1) \tag{3.5}$$

сходится при $p > 1$, и расходится при $0 \leqslant p \leqslant 1$.

► Здесь в силу возрастания логарифма также можно применить теорему 3.3. Соответственно ряд (3.2) имеет вид

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k}{2^k k^p \log_a^p 2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p \log_a^p 2} = \frac{1}{\log_a^p 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

и вопрос сходимости ряда (3.5) сводится к примеру 3.1. ◄

Замечание 3.1. Если о ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n > 0$ известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ или $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, то ничего определенного о его сходимости сказать нельзя. Например, оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ удовлетворяют приведенным условиям, однако первый из них расходится, а второй сходится.

§4. Интегральный признак сходимости ряда

Теорема 4.1. *Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна, неотрицательна и убывает при $x \geqslant 1$. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{4.1}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{4.2}$$

► Если $k \leqslant x \leqslant k+1$, то в силу убывания функции $f(x)$

$$f(k) \geqslant f(x) \geqslant f(k+1) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Поэтому, интегрируя по отрезку $[k, k+1]$, будем иметь

$$f(k) \geqslant \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \geqslant f(k+1) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Суммируя эти неравенства, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \geqslant \sum_{k=1}^{n} f(k+1). \tag{4.3}$$

Полагая $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, перепишем неравенство (4.3) в виде

$$S_n \geqslant \int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx \geqslant S_{n+1} - f(1) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{4.4}$$

Если интеграл (4.2) сходится, то при любом n,

$$\int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Отсюда и второго из неравенств (4.4) следует, что

$$S_{n+1} \leqslant f(1) + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т. е. последовательность частичных сумм (возрастающая) ряда (4.1) ограничена сверху и, следовательно, ряд (4.1) сходится.

Если же ряд (4.1) сходится и его сумма равна S, то $S_n \leqslant S$ при всех n, а значит в силу первого из неравенств (4.4)

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S.$$

Если теперь $b \geqslant 1$, то, выбирая n так, чтобы было $n \geqslant b$, получим в силу неотрицательности функции f

$$\int\limits_1^{b} f(x)\,dx \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant S.$$

Итак, при любом $b \geqslant 1$ имеет место неравенство

$$\int\limits_1^{b} f(x)\,dx \leqslant S, \tag{4.5}$$

а поэтому интеграл (4.2) сходится. ◀

§5. Знакочередующиеся ряды. Начальные сведения об абсолютно сходящихся рядах

1

Рассмотрим так называемые знакочередующиеся ряды, т. е. ряды члены которых поочередно, то положительны, то отрицательны.

Теорема 5.1 (Лейбница). *Если*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{5.1}$$

и

$$a_n \geqslant a_{n+1} > 0, \quad (n = 1,\ 2,\ 3\ldots), \tag{5.2}$$

то знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \tag{5.3}$$

сходится. При этом любая частичная сумма S_n ряда (5.3) отличается от его суммы S на величину, не превосходящую следующего члена a_{n+1}, иначе говоря, абсолютная величина остатка ряда r_n в этом случае не превосходит абсолютной величины его первого члена, т. е. $|r_n| = |S - S_n| \leqslant a_{n+1}$.

► Рассмотрим частичные суммы четного порядка ряда (5.3)

$$S_{2k} = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} a_n.$$

Их можно записать в виде

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2k-1} - a_{2k}).$$

В силу условия (5.2) выражение в круглых скобках неотрицательно и поэтому $S_{2k} \leqslant S_{2k+2}$, т. е. последовательность частичных сумм четного порядка ряда (5.3) возрастает. Замечая, что частичную сумму S_{2k} можно записать также и в виде

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} \quad (k = 1,\ 2, \ldots)$$

и что выражения в круглых скобках в силу условия (5.2) неотрицательны, а $a_{2k} > 0$, получаем, что $S_{2k} < a_1$. Таким образом, последовательность S_{2k} ограничена сверху. Из возрастания и ограниченности сверху последовательности S_{2k} следует, что она сходится

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k} = S. \tag{5.4}$$

Покажем, что и частичные суммы нечетного порядка ряда (5.3) стремятся к тому же пределу. Действительно,

$$S_{2k+1} = S_{2k} + a_{2k+1}, \quad (k = 1,\ 2, \ldots) \tag{5.5}$$

и, так как, согласно (5.1), $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$, то в силу (5.4) и (5.5) имеем

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = S. \tag{5.6}$$

Из (5.4) и (5.6) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$.

Теперь отметим, что для ряда (5.3) справедливо неравенство

$$S_{2k} \leqslant S \leqslant S_{2k-1}, \quad (k = 1,\ 2, \ldots). \tag{5.7}$$

Действительно, с одной стороны, S является пределом возрастающей последовательности S_{2k}. Поэтому $S_{2k} \leqslant S$. С другой стороны,

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k+1}) \leqslant S_{2k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

т. е. последовательность S_{2k-1} убывает. Поскольку S является пределом последовательности S_{2k-1} то $S \leqslant S_{2k-1}$. Из неравенства (5.7) следует, что

$$\begin{gathered} S - S_{2k} \leqslant S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1}, \\ S_{2k-1} - S \leqslant S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k} \end{gathered}$$

при $k \in \mathbb{N}$, а это и означает, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|S - S_n| \leqslant a_{n+1}.$$

◀

2

Теорема 5.2. *Если ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{5.8}$$

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5.9}$$

также сходится.

ЛЕКЦИЯ 7

ГЛАВА 11. Функциональные последовательности и ряды

§1. Общие свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов

1

Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, каждая из которых определена на некотором подмножестве $X \subset \mathbb{R}$. В этом случае говорят, что на множестве X задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$.

Аналогично, если задан ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, каждый член которого является функцией, определенной на множестве X, то говорят, что на множестве X задан функциональный ряд.

Определение 1.1. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся на множестве X к функции $f(x)$, если в каждой точке $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$.

Определение 1.2. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется сходящимся на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ сходится к $S(x)$ на множестве X.

Определение 1.3. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ и при любом $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

В этом случае пишут $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X.

Определение 1.4. Говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $S_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$ на множестве X.

Сравним между собой два введенных типа сходимости. Для этого сформулируем «с помощью ε», что означает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на множестве X : для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in X$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon, x)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon, x)$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В отличие от этого, в определении равномерной сходимости требуется,чтобы по заданному $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер $N = N(\varepsilon)$, зависящий только от ε, что неравенство (1.1) выполняется для всех $x \in X$.

Таким образом, если последовательность (ряд) равномерно сходится на множестве X, то эта последовательность (этот ряд) просто сходится на множестве X.

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Пример 1.1. Рассмотрим на полуинтервале $[0,1)$ последовательность $\{f_n(x)\} = x^n$. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, т. е. последовательность $f_n(x) \to 0$ на полуинтервале $[0,1)$. Однако, эта сходимость не будет равномерной. В самом деле, в противном случае для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ нашелся бы такой номер N, что при всех $n \geqslant N$ и любом $x \in [0,1)$ выполнялось бы неравенство

$$|x^n - 0| < \frac{1}{2},$$

что невозможно, так как при x, достаточно близких к 1 ($x \in [0,1)$), будет $|x^n| > \frac{1}{2}$ (поскольку $\lim\limits_{x\to 1-0} x^n = 1$). Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{x^n\}$ сходится на полуинтервале $[0,1)$, но не равномерно.

Теорема 1.1 (критерий Коши равномерной сходимости)**.** *Для того, чтобы последовательностьть $\{f_n(x)\}$ равномерно сходилась на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ и любых $x \in X$ выполнялось неравенство*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{1.2}$$

Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и натуральных p и любом $x \in X$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x)\right| < \varepsilon.$$

► Доказательство достаточно провести лишь для последовательностей. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X. По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любом $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $n, m \geqslant N$, тогда при любом $x \in X$ имеем

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Тем самым необходимость условия теоремы доказана.

Докажем достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n, m \geqslant N$ и любом $x \in X$ имеет место неравенство (1.2). Это означает, что при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $f_n(x)$ фундаментальна и, следовательно, сходится. Положим $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Теперь, переходя в неравенстве (1.2) к пределу, при $m \to \infty$, получаем, что при $n \geqslant N$ и любом $x \in X$ выполнено неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Но это означает, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X. ◄

Определение 1.5. Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется абсолютно сходящимся на множестве X, если на этом множестве сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$.

Теорема 1.2 (Вейерштрасс). *Пусть при всех $k \geqslant n_0$ и всех $x \in X$ выполнено неравенство $|u_k(x)| \leqslant a_k$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно и абсолютно на множестве X.*

► То, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_k(x)|$ сходится на множестве X сразу следует из теоремы сравнения для положительных рядов (теорема 2.2 главы 10). Докажем равномерность сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ на множестве X. В силу критерия Коши из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при любом $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любом натуральном p выполняется неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Поэтому при $n \geqslant \max\{N(\varepsilon), n_0\}, p \geqslant 1$ и любом $x \in X$ имеем

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon.$$

Осталось воспользоваться теоремой 1.1. ◄

Замечание 1.1. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, фигурирующий в теореме 1.2, часто называется мажорантой для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$.

Теорема 1.3. *Пусть X — промежуток, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда*

1) Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на множестве $X \setminus \{x_0\}$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$, то последовательность a_n сходится и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n; \tag{1.3}$$

2) Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится к функции $S(x)$ на множестве $X\setminus\{x_0\}$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} u_k(x) = b_k$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится и

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{1.4}$$

► Доказательство достаточно привести для последовательностей. Докажем, что последовательность $\{a_n\}$ сходится. Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $Y = X \setminus \{x_0\}$, то в силу критерия Коши для любого $\varepsilon > 0$

найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ и любом $x \in Y$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $x \to x_0$, получим (так как $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$):

$$|a_n - a_m| \leqslant \varepsilon$$

при $n, m \geqslant N(\varepsilon)$. Отсюда следует, что последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна и, следовательно, сходится. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$.

Переходим к доказательству равенства (1.3). Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$ на множестве Y найдется такой номер $N_1 = N_1(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N_1(\varepsilon)$ и при любом $x \in Y$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.5}$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$, найдется такой номер $N_2 = N_2(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant N_2(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.6}$$

Фиксируем некоторое $n \geqslant \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Тогда для выбранного n имеют место неравенства (1.5) и (1.6). Так как $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = a_n$, то существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $x \in Y \cap S(x_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - a_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.7}$$

В силу (1.5)–(1.7) при $x \in Y \cap S(x_0, \delta)$ имеем

$$|f(x) - A| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - a_n| + |a_n - A| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

◄

ЛЕКЦИЯ 8

Замечание 1.2. Поскольку $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $a_n = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, равенство (1.3) можно переписать так
$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

Таким образом, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве Y и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$, то предельные переходы $\lim\limits_{x\to x_0}$, $\lim\limits_{n\to\infty}$ перестановочны.

Аналогичным образом равенство (1.4) можно записать так
$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} u_k(x).$$
Таким образом, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве Y и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} u_k(x)$, то операции предельного перехода и суммирования перестановочны.

Следствие 1.1. *Пусть X — промежуток, функции $f_n(x)$ $(n = \overline{1,\infty})$ непрерывны в точке $x_0 \in X$ и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in X$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0.*

► В силу теоремы 1.3 и непрерывности функций $f_n(x)$ в точке x_0 $(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = f_n(x_0))$ имеем
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$
◄

Следствие 1.2. *Пусть X — промежуток, функции $u_k(x)$ $(k = \overline{1,\infty})$ — непрерывны в точке $x_0 \in X$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходится на X. Тогда его сумма $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ также непрерывна в точке x_0.*

§2. Почленное интегрирование и дифференцирование рядов

1

Теорема 2.1. *Пусть функции $u_n(x)$ $(n = \overline{1,\infty})$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и ряд*
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.1}$$
равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда какова бы не была точка $c \in [a,b]$, ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x u_n(t)\,dt \tag{2.2}$$

также равномерно сходится на $[a,b]$ *и, если*

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(x\right), \tag{2.3}$$

то

$$\int\limits_c^x s(t)\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^x u_n(t)\,dt \tag{2.4}$$

при $x\in[a,b]$. *Если формулу* (2.4) *переписать в виде*

$$\int\limits_c^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^x u_n(t)\,dt,$$

то видно, что она означает законность в условиях теоремы 2.1 почленного интегрирования ряда.

▶ В силу равномерной сходимости ряда (2.1) согласно следствию 1.2 функция $s(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и поэтому интегрируема на любом отрезке с концами в точках $c\in[a,b]$ и $x\in[a,b]$. Покажем, что ряд (2.2) равномерно на отрезке $[a,b]$ сходится к функции

$$\sigma(x)=\int\limits_c^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\right)dt=\int\limits_c^x s(t)\,dt. \tag{2.5}$$

Пусть

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\quad\text{и}\quad r_n(x)=s(x)-s_n(x).$$

Тогда для любого $x\in[a,b]$ имеем

$$\begin{aligned}&\left|\sigma(x)-\sum_{k=1}^{n}\int\limits_c^x u_k(t)\,dt\right|=\left|\int\limits_c^x s(t)\,dt-\int\limits_c^x\left(\sum_{k=1}^{n}u_k(t)\right)dt\right|=\\&=\left|\int\limits_c^x s(t)\,dt-\int\limits_c^x s_n(t)dt\right|\leqslant\left|\int\limits_c^x|s(t)-s_n(t)|\,dt\right|=\\&=\left|\int\limits_c^x|r_n(t)|\,dt\right|\leqslant\sup_{[a,b]}|r_n(t)|\left|\int\limits_c^x dt\right|\leqslant|x-c|\sup_{[a,b]}|r_n(t)|\leqslant\\&\leqslant|b-a|\sup_{[a,b]}|r_n(t)|\,.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Последовательность $\alpha_n=\sup\limits_{[a,b]}|r_n(x)|$ $(n=\overline{1,\infty})$ является числовой последовательностью. В силу равномерной сходимости ряда (2.1) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ и, следовательно, для $\varepsilon>0$ существует такой номер n_ε, что при $n\geqslant n_\varepsilon$ будет $\alpha_n<\frac{\varepsilon}{b-a}$. Поэтому из неравенства (2.6) следует, что последовательность частичных сумм ряда (2.2) равномерно сходится к функции (2.5) на $[a,b]$, а это и означает равномерную сходимость ряда (2.2) к функции (2.5). Теорема и, в частности, формула (2.4) доказаны. ◀

Переформулируем полученный результат для последовательностей функций.

Теорема 2.1′. *Пусть последовательность непрерывных на $[a,b]$ функций $f_n(x)$ ($n = \overline{1,\infty}$) равномерно на этом отрезке сходится к функции $f(x)$. Тогда какова бы ни была точка $c \in [a,b]$*

$$\int\limits_c^x f_n(t)\,dt \rightrightarrows \int\limits_c^x f(t)\,dt$$

на $[a,b]$. В частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_c^x f_n(t)\,dt = \int\limits_c^x \left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right)\,dt.$$

Замечание 2.1. Если

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n & \text{при} \quad x = \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

и $f_n(x)$ линейна на отрезках $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$ и $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$, то $f_n(x) \to 0$ на $[0,1]$, а

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)\,dt = 1.$$

2

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцировании функциональных рядов и последовательностей.

Теорема 2.2. *Пусть функции $u_n(x)$ ($n = \overline{1,\infty}$) непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$ и ряд, составленный из их производных,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \tag{2.7}$$

равномерно сходится на отрезке $[a,b]$. Тогда если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится хотя бы в одной точке $c \in [a,b]$, то он сходится равномерно на всем $[a,b]$, его сумма

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.8}$$

непрерывно дифференцируема и

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{2.9}$$

Если формулу (2.9) переписать в виде

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x),$$

то видно, что она означает законность при сделанных предположениях почленного дифференцирования ряда.

► Пусть

$$\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x). \tag{2.10}$$

В силу равномерной сходимости этого ряда его сумма является непрерывной функцией и его можно почленно интегрировать

$$\int_c^x \sigma(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^x u_n'(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(c)\right); \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{2.11}$$

По теореме 2.1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(c)) \tag{2.12}$$

равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Сходится по условию теоремы и числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(c), \tag{2.13}$$

а поэтому и сумма рядов (2.12) и (2.13), т. е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.14}$$

сходится равномерно на $[a, b]$. Таким образом, (2.11) можно переписать в виде

$$\int_c^x \sigma(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(c)$$

или, что то же (см. (2.8)), в виде

$$\int_c^x \sigma(t)dt = s(x) - s(c). \tag{2.15}$$

Функция, стоящая в левой части, имеет производную по x, значит и функция $s(x)$ имеет производную. Дифференцируя равенство (2.15), получим

$$s'(x) = \sigma(x), \tag{2.16}$$

где функция $\sigma(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Подставляя (2.10) в (2.16) получаем искомую формулу (2.9). ◄

Итак, если сходящийся ряд непрерывно дифференцируемых функции таков, что ряд, составленный из их производных, равномерно сходится, то сумма исходного ряда непрерывно дифференцируема и её производная равна сумме производных членов данного ряда (т. е. ряд можно почленно дифференцировать).

Перефразируем теорему 2.2 для последовательностей.

Теорема 2.2$'$. *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций*

$$f_n(x) \quad (n=\overline{1,\infty}) \tag{2.17}$$

сходится хотя бы в одной точке $c \in [a,b]$, а последовательность их производных $\{f_n'(x)\}$ равномерно сходится на $[a,b]$. Тогда последовательность (2.17) равномерно сходится на $[a,b]$, её предел является непрерывно дифференцируемой на этом отрезке функцией и

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)', \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

ЛЕКЦИЯ 9

ГЛАВА 12. Степенные ряды

§1. Радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда

Функциональные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{1.1}$$

где a_n, x, x_0 — вещественные числа, называются степенными рядами. Числа a_n называются коэффициентами степенного ряда (1.1). Если в ряде (1.1) сделать замену переменного, положив $\alpha = x - x_0$, то получится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n. \tag{1.2}$$

Очевидно, что исследование сходимости ряда (1.1) эквивалентно исследованию сходимости ряда (1.2), поэтому в дальнейшем будем рассматривать ряды вида (1.2).

Теорема 1.1 (Абель). *Если степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1.3}$$

сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при любом x, для которого $|x| < |x_0|$.

► Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \tag{1.4}$$

сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$ и потому последовательность $\{a_n x_0^n\}$ ограничена, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что $|a_n x_0^n| \leqslant M$ $(n = \overline{0, \infty})$. В силу этого для n-го члена ряда (1.3) имеем

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqslant M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Если $|x| < |x_0|$, то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

являясь суммой геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right|^n < 1$, сходится.

Поэтому, по признаку сравнения сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$, а это и означает абсолютную сходимость ряда (1.3) при $|x| < |x_0|$. ◄

Следствие 1.1. *Если степенной ряд (1.3) расходится или сходится не абсолютно при $x = x_0$, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_0|$.*

► Действительно, если $|x| > |x_0|$ и ряд (1.4) расходится или сходится не абсолютно, то расходится и ряд (1.3), так как если бы он сходился, то по теореме 1.1 абсолютно сходился бы и ряд (1.4). ◄

Рассмотрим вопрос об области сходимости степенного ряда. Заметим, что в точке $x = 0$ каждый степенной ряд (1.3) сходится и его сумма равна a_0. Возможны три случая:

1) Степенной ряд (1.3) может сходиться только в одной точке $x = 0$. Например, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ сходится только при $x = 0$, так как, если $x \neq 0$, то последовательность $\{n^n x^n\} = \{(nx)^n\}$ не стремится к нулю ($n|x| > 1$, начиная с некоторого n).

2) Степенной ряд (1.3) может сходиться при любом значении x, то есть на всей вещественной прямой. Например, возьмем ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Так как
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|\, n!}{(n+1)!\, |x|^n} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$
то по признаку Даламбера (следствие 3.1 главы 10) ряд (1.3) абсолютно сходится при любом x.

3) Степенной ряд (1.3) может иметь точку сходимости отличную от нуля и точку расходимости. Например, ряд геометрической прогрессии
$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \tag{1.5}$$
сходится при $x = \frac{1}{2}$ и расходится при $x = 2$.

Последний случай рассмотрим более подробно. Пусть ряд (1.3) имеет точку сходимости отличную от нуля и точку расходимости. Следовательно, по теореме Абеля и следствию 1.1 существует бесконечное множество точек сходимости и точек расходимости. Возьмем какую-нибудь положительную точку сходимости r_1 и положительную точку расходимости R_1. Ясно, что $r_1 < R_1$. Если $\frac{r_1+R_1}{2}$ является точкой сходимости, то положим $r_2 = \frac{r_1+R_1}{2}$ и $R_2 = R_1$, Если же $\frac{r_1+R_1}{2}$ — точка расходимости, то положим $r_2 = r_1$ и $R_2 = \frac{r_1+R_1}{2}$. Аналогично введем точки r_3, R_3 и т. д. В результате получаем две монотонные последовательности $r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \ldots$ и $R_1 \geqslant R_2 \geqslant R_3 \geqslant \ldots$ Первая последовательность является последовательностью точек сходимости ряда, вторая — последовательностью точек расходимости. Эти последовательности сходятся как монотонные и ограниченные. При этом они имеют общий предел, т. к.
$$R_n - r_n = \frac{R_1 - r_1}{2^{n-1}} \to 0.$$
Обозначим через $R = \lim r_n = \lim R_n$ и докажем, что в интервале $|x| < R$ ряд сходится и при том абсолютно, а вне этого интервала, т. е. при $|x| > R$ ряд расходится.

Действительно, пусть точка x лежит внутри интервала $|x| < R$. Тогда при достаточно большом n выполняется неравенство $|x| < r_n$. Если учесть, что r_n — точка сходимости ряда, то по теореме Абеля ряд абсолютно сходится в точке x. Если же точка x лежит вне интервала, т. е. $|x| > R$, то при достаточно большом n имеет место неравенство $|x| > R_n$. Так как в точке R_n ряд расходится, то по следствию 1.1 ряд расходится в точке x.

Таким образом, ряд абсолютно сходится внутри интервала радиуса R с центром в точке $x = 0$ и расходится при $|x| > R$. Этот интервал называется интервалом сходимости степенного ряда. Радиус R интервала сходимости называется радиусом сходимости степенного ряда.

О сходимости степенного ряда при $|x| = R$ (на границе интервала сходимости) в общем случае ничего сказать нельзя. Здесь, в зависимости от ряда, могут представиться различные случаи.

Таким образом, областью сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является интервал с центром в точке $x = 0$ и, быть может, одна или обе граничные точки интервала.

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится только в одной точке $x = 0$, то полагают, что $R = 0$. Если же степенной ряд сходится в любой точке x, то полагают, что $R = +\infty$ и говорят, что в первом случае область сходимости вырождается в точку, а во втором случае — является всей вещественной прямой.

§2. Характер сходимости степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенного ряда

1

Теорема 2.1. *Степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.1}$$

сходится равномерно на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости.

► Пусть отрезок $[a, b]$ лежит внутри интервала сходимости $(-R, R)$ ряда (2.1). Тогда найдется такое число $r \in (0, R)$, что отрезок $[-r, r]$, будет содержать отрезок $[a, b]$. Ряд (2.1) абсолютно сходится при $x = r$, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \, r^n$, но для всех $x \in [-r, r]$ выполняется неравенство $|a_n x^n| \leqslant |a_n| \, r^n$ и потому ряд (2.1) на отрезке $[-r, r]$ мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| \, r^n$. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд (2.1) равномерно сходится на этом отрезке, в частности, он равномерно сходится и на отрезке $[a, b]$. ◄

Отметим, что сходимость ряда (2.1) на его интервале сходимости $(-R, R)$ может быть неравномерной. Так, например, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ на интервале $(-1, 1)$ сходится неравномерно. Как следствие доказанной теоремы и следствия 1.2 главы 11 (утверждение о непрерывности сумм равномерно сходящегося ряда) получаем теорему 2.2.

Теорема 2.2. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости.*

► Пусть x_0 — точка интервала сходимости ряда (2.1). Рассмотрим какой-либо отрезок $[a, b]$, принадлежащий интервалу сходимости, внутри которого находится точка x_0. Ряд равномерно сходится на $[a, b]$. Следовательно, сумма ряда есть непрерывная функция на $[a, b]$. В частности сумма ряда непрерывна в точке x_0. В силу произвольного выбора точки x_0 из интервала сходимости получаем, что сумма ряда является непрерывной функцией на интервале сходимости. ◄

Теорема 2.3. *Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку* $[a, b]$, *принадлежащему интервалу сходимости. В частности, ряд можно почленно интегрировать в пределах от* 0 *до* x, *где* $|x| < R$.

► Степенной ряд равномерно сходится на любом отрезке $[a, b]$, принадлежащих интервалу сходимости ряда. Заключение теоремы 2.3 следует сразу из теоремы 2.1 главы 11 об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов. ◄

В качестве примеров на интегрирование степенных рядов рассмотрим разложение в степенные ряды функций $\operatorname{arctg} x$ и $\ln(1+x)$ Имеем

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Как известно,

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \tag{2.2}$$

при $|t| < 1$. Подставляя в это равенство $-t^2$ вместо t, получим

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k},$$

справедливое при $|-t^2| < 1$ или, что тоже, при $|t| < 1$.

Если почленно проинтегрировать этот ряд в пределах от 0 до $x, |x| < 1$, то получим

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},$$

т. е.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \ldots \tag{2.3}$$

при $|x| < 1$.

Аналогично получим разложение в степенной ряд функции $\ln(1+x)$. Имеем

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$

Подставляя $-t$ вместо t в равенство (2.2), получим

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k$$

при $|t| < 1$. Интегрируя последнее равенство в пределах от 0 до x, $|x| < 1$, находим

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1},$$

т. е.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + \ldots \tag{2.4}$$

при $|x| < 1$.

2

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости степенных рядов. Пусть степенной ряд (2.1) сходится в интервале $(-R, R)$, а ряд

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \tag{2.5}$$

получен из ряда (2.1) дифференцированием его членов.

Лемма 2.1. *Ряд (2.5) имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (2.1).*

► Пусть x_0 — произвольная точка интервала сходимости ряда (2.1), т. е. $|x_0| < R$. Возьмем число r, удовлетворяющее условию $|x_0| < r < R$. Оценим модуль общего члена ряда (2.5) в рассматриваемой точке x_0. Ясно, что

$$\left|n a_n {x_0}^{n-1}\right| = |a_n r^n| \frac{n|x_0|^{n-1}}{r^n}.$$

Ряд (2.1) абсолютно сходится в точке r, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n|\, r^n = 0$. Значит, последовательность $\{|a_n|\, r^n\}$ ограничена, т. е. $|a_n|\, r^n < M$ при $n \in \mathbb{N}$, где M — некоторое число. Учитывая это, находим

$$\left|n a_n x_0^{n-1}\right| < M \frac{n\left|x_0^{n-1}\right|}{r^n}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\left|x_0^{n-1}\right|}{r^n}$ сходится (на основании следствия 3.1 главы 10), так как

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)\,|x_0|}{nr} = \frac{|x_0|}{r} < 1.$$

Используя теорему сравнения (теорему 2.1 главы 10), получаем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|n a_n x_0^{n-1}\right|$$

или, что то же, абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ в точке x_0. В силу произвольности выбора точки x_0 из интервала $(-R, R)$ заключаем, что ряд (2.5) имеет интервал сходимости не меньше интервала сходимости ряда (2.1). Докажем, что интервал сходимости ряда (2.5) не больше интервала сходимости ряда (2.1). Допустим противное, а именно, что ряд (2.5) сходится в интервале $(-R_1, R_1)$, где $R_1 > R$. Тогда, так как ряд (2.5) степенной, его можно почленно интегрировать в пределах от 0 до x, где $|x| < R_1$. Ряд, полученный в результате интегрирования, сходится в интервале $(-R_1, R_1)$. Он отличается от ряда (2.1) только на постоянное слагаемое. Следовательно, и ряд (2.1) сходится в интервале $(-R_1, R_1)$, что противоречит допущению $R_1 > R$. ◄

ЛЕКЦИЯ 10

Теорема 2.4. *Степенной ряд в интервале сходимости можно почленно дифференцировать, т. е. если*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2.6}$$

в интервале $(-R, R)$, *то*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \tag{2.7}$$

в том же интервале.

► Пусть $x_0 \in (-R, R)$. Возьмем произвольный отрезок $[a, b]$, внутри которого находится точка x_0. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится к $f(x)$ на $[a, b]$. Ряд из производных его членов равномерно сходится на этом отрезке, так как это степенной ряд с интервалом сходимости $(-R, R)$. Тогда по теореме о дифференцировании функциональных рядов сумма ряда из производных равна $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, а следовательно, и в точке x_0. Ввиду произвольности выбора точки x_0 из интервала $(-R, R)$ теорема доказана. ◄

§3. Ряд Тейлора

1

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда по степеням разности $x - x_0$, сходящегося в некотором интервале

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Тогда в интервале сходимости, который, как известно, симметричен относительно точки x_0, ряд можно почленно дифференцировать любое число раз. Дифференцируя, получим

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 1a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots\\
&f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + 4 \cdot a_5(x - x_0)^3 + \ldots\\
&f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(n - n_0)^{n-3} + \ldots,\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \ldots na_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots (n+1)a_{n+1}(x - x_0) + \ldots
\end{aligned}$$

Полагая в этих равенствах $x = x_0$, получим

$$f(x_0) = a_0,\ f'(x_0) = 1 \cdot a_1,\ f''(x_0) = 2!a_2,\ f'''(x_0) = 3!a_3, \ldots, f^{(n)}(x_0) = n!a_n, \ldots$$

Отсюда находим

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots$$

Подставляя полученные выражения в ряд для $f(x)$, запишем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Определение 3.1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков, тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{3.1}$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.

Приведенными ранее рассуждениями была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 является суммой степенного ряда по степеням $(x-x_0)$, то этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0.*

Следствие 3.1 (теорема единственности)**.** *Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 разложена в степенной ряд по степеням $(x-x_0)$, т. е. функция $f(x)$ является суммой сходящегося в некоторой окрестности точки x_0 ряда по степеням $(x-x_0)$, то такое разложение единственно, или иначе, не может быть двух различных степенных рядов по степеням $(x-x_0)$, сходящихся к одной и той же функции.*

Для доказательства следствия 3.1 достаточно учесть, что коэффициенты ряда выражаются через значения функции $f(x)$ и её производных в точке x_0.

2

Отметим, что существуют функции бесконечно дифференцируемые, но не представимые своим рядом Тейлора.

Пример 3.1. Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

бесконечно дифференцируема на всей числовой оси, при этом все её производные в точке ноль равны нулю.

Доказательство сформулированных утверждений предоставляется читателю.

Следовательно, функции $f(x)$ соответствует ряд Тейлора по степеням x, все коэффициенты которого равны нулю

$$f(x) \sim 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n + \ldots$$

Его сумма при всех x тождественно равно нулю и, следовательно, равна функции $f(x)$ только в одной точке $x = 0$.

3

Возникает вопрос, когда ряд Тейлора (3.1) на указанном промежутке сходится к функции $f(x)$.

Чтобы исследовать этот вопрос, напишем формулу Тейлора для функции f:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x), \tag{3.3}$$

которая справедлива для любого $n \in \mathbb{N}$. В этой формуле $r_n(x)$ означает остаточный член в формуле Тейлора. Полагая

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k, \tag{3.4}$$

перепишем (3.3) в виде

$$f(x) = s_n(x) + r_n(x), \tag{3.5}$$

где $s_n(x)$ — n-я частная сумма ряда Тейлора.

Отсюда видно, что для того, чтобы функция f равнялась сумме своего ряда Тейлора на рассматриваемом промежутке, необходимо и достаточно, чтобы для любого x из этого промежутка

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{3.6}$$

Укажем одно достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

Теорема 3.2. *Пусть E — промежуток с концами $x_0 - h$ и $x_0 + h$, где $h > 0$, функция f и все её производные ограничены в совокупности на E, т. е. существует такая постоянная $M > 0$, что для всех $x \in E$ и всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ выполняется неравенство*

$$|f^{(n)}(x)| < M. \tag{3.7}$$

Тогда в промежутке E функция f разлагается в ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \quad x \in E. \tag{3.8}$$

► Прежде всего заметим, что при любом $a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0. \tag{3.9}$$

Это равенство следует непосредственно из того,что выражение $\frac{a^n}{n!}$ является общим членом сходящегося ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$. Для того, чтобы доказать формулу (3.8), достаточно убедиться (см. (3.5)), что

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0, \tag{3.10}$$

где $r_n(x)$ — остаточный член в формуле Тейлора функции f. Возьмем $r_n(x)$ в форме Лагранжа. Из неравенства (3.7) следует, что

$$|r_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right| \leqslant M \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \right|,$$

где $\gamma \in E$. Поскольку в силу (3.9)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)} = 0,$$

то при $x \in E$ выполнено условие (3.10). ◄

§4. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

1

Разложение в ряд функции $f(x) = e^x$.

Так как $f^{(n)}(x) = e^x$, то для любого фиксированного $h > 0$, при всех $x \in (-h, h)$ и всех $n = 0, 1, \dots$

$$0 < f^{(n)}(x) < e^h.$$

Таким образом, условие теоремы 3.2 выполнены для $E = (-h, h)$. Поэтому функция e^x раскладывается в ряд Тейлора (при $x_0 = 0$) на любом конечном интервале, а значит и на всей вещественной оси. Поскольку в данном случае $f^{(n)}(0) = 1$, то это разложение имеет вид

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.1}$$

2

Разложение в ряд $\sin x$ и $\cos x$.

Если $f(x) = \sin x$, то $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$. Поэтому $\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 3.2 отсюда следует, что функция $\sin x$ раскладывается в степенной ряд на всей вещественной оси. Таким образом,

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{4.2}$$

Рассуждая аналогично, находим

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

3

Разложение в ряд функции $\ln(1 + x)$.

Формула Тейлора для $\ln(1 + x)$ имеет вид

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + r_n(x).$$

Запишем остаточный член $r_n(x)$ в форме Лагранжа. Заметив, что

$$(\ln(1 + x))^{(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(1 + x)^{n+1}},$$

получим

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(1 + \theta x)^{n+1}(n + 1)},$$

где $0 < \theta < 1$. Если $x \in [0, 1]$, то

$$0 < \frac{1}{1 + \theta x} < 1$$

ЛЕКЦИЯ 11

4

Разложение в ряд Тейлора бинома $(1+x)^\alpha$.

Формула Тейлора для биномиальной функции имеет вид

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + r_n(x). \tag{4.5}$$

Рассмотрим соответствующий ряд (называемый биноминальным рядом с показателем α)

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{4.6}$$

Если α неотрицательное целое, то ряд (4.6) содержит лишь конечное число членов отличных от нуля, и, следовательно, сходится при всех x.

Рассмотрим теперь случай, когда α не является неотрицательным целым. В этом случае в ряде (4.6) все члены, отличны от нуля при $x \neq 0$.

Для исследования абсолютной сходимости ряда (4.6) используем признак Даламбера. Положим

$$a_n = \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \right| |x^n|.$$

Замечая, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\alpha-n}{n+1}x \right| = |x|,$$

получаем, что ряд (4.6) абсолютно, а значит и просто сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Однако, из одного лишь факта сходимости биноминального ряда (4.6) при $|x| < 1$ нельзя еще сделать заключение о том, что его сумма равна $(1+x)^\alpha$. Для этого надо доказать, что в формуле (4.5) $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$. Замечая, что

$$((1+x)^\alpha)^{(n+1)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

запишем остаточный член $r_n(x)$ формулы (4.5) в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},$$

где $0 < \theta < 1$ (θ зависит от x и от n). Положим

$$A_n(x) = \frac{(\alpha-1)\ldots[(\alpha-1)-(n-1)]}{n!}x^n,$$

$$B_n(x) = \alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}, \quad C_n(x) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Очевидно, $A_n(x)$ является общим членом биномиального ряда с показателем $\alpha - 1$ и, следовательно, в силу доказанной выше сходимости биномиального ряда при $|x| < 1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x) = 0$$

при $|x| < 1$. Далее, из того, что

$$1 - |x| < 1 + \theta x < 1 + |x|$$

следует, что значение $|B_n(x)|$ заключено между величинами

$$|\alpha x| \, (1 - |x|)^{\alpha - 1} \quad \text{и} \quad |\alpha x| \, (1 + |x|)^{\alpha - 1},$$

не зависящими от θ, т. е. последовательность $\{B_n(x)\}$ при фиксированном $x \in (-1, 1)$ ограничена. Наконец,

$$|C_n(x)| = \left| \frac{1 - \theta}{1 + \theta x} \right|^n \leqslant \left| \frac{1 - \theta}{1 - \theta \, |x|} \right|^n < 1.$$

Из установленных свойств $A_n(x),\ B_n(x),\ C_n(x)$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$ при $|x| < 1$.

Таким образом, для любого $x \in (-1, 1)$, справедливо равенство

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - 1)....(\alpha - n + 1)}{n!} x^n.$$

Замечание 4.1. Можно доказать, что

1) В точке $x = 1$ при $\alpha > -1$ биноминальный ряд сходится, а при $\alpha \leqslant -1$ расходится.

2) В точке $x = -1$ при $\alpha \geqslant 0$ биномиальный ряд абсолютно сходится, а при $\alpha < 0$ расходится. При этом каждый раз, когда биноминальный ряд (4.6) сходится, его сумма равна $(1 + x)^\alpha$.

§5. Формула Стирлинга

Формула Стирлинга может быть записана в виде

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi} n^{n + \frac{1}{2}}}{e^n}, \quad n \to \infty, \tag{5.1}$$

что означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi} n^{n + \frac{1}{2}} e^{-n}} = 1.$$

► Из разложения

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leqslant 1,$$

следует, что

$$\ln \frac{1 + x}{1 - x} = \ln(1 + x) - \ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x^n}{n} \right) = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k + 1}$$

при $x \in (-1,1)$. Полагая здесь $x = \frac{1}{2n+1}$, получаем

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{2}{2n+1}\left\{1+\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right\} >$$
$$> \frac{2}{2n+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}.$$

Откуда

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$$

или, потенцируя и принимая во внимание, что функция $\ln x$ возрастающая,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > e. \tag{5.2}$$

Положим

$$x_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{5.3}$$

Так как согласно (5.2)

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} > 1,$$

то $x_n > x_{n+1}$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ убывает и, кроме того, ограничена снизу ($x_n \geqslant 0$). Следовательно, существует предел $\lim x_n = a$. Поэтому

$$x_n = a + \gamma_n, \tag{5.4}$$

где $\lim \gamma_n = 0$. Покажем, что $a \neq 0$. Так как

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots+ < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^4}+\ldots\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = \frac{1}{12n(n+1)},$$

то

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1+\frac{1}{12n(n+1)}$$

и, следовательно,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

Поэтому

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}},$$

т. е.

$$x_n e^{-\frac{1}{12n}} < x_{n+1}e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Таким образом, последовательность

$$y_n = x_n e^{-\frac{1}{12n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ЛЕКЦИЯ 12

ГЛАВА 13. Метрические и нормированные пространства

§1. Метрические пространства

1

Непустое множество X элементов произвольной природы называется метрическим пространством, если каждой паре элементов $x, y \in X$ соотнесено вещественное число $\rho(x, y)$ — расстояние между элементами x, y удовлетворяещее условиям:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0,\ \rho(x, x) = 0$ и, если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Эти условия называются аксиомами метрического пространства. Элементы множества X называются также точками данного метрического пространства.

Наличие расстояния позволяет естественным образом ввести в метрическом пространстве предельные соотношения, понятия сходимости и другие, с ним связанные.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X сходится (к точке x_0 того же пространства), если $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

Для любых четырех точек x, y, z, u из X справедливо неравенство

$$|\rho(x, y) - \rho(z, u)| \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u). \tag{1.1}$$

► Из неравенства треугольника следует, что

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, u) + \rho(u, y),$$

откуда

$$\rho(x, y) - \rho(z, u) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u). \tag{1.2}$$

Меняя в этом неравенстве x и y местами с z и u (соответственно), имеем

$$\rho(z, u) - \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, u). \tag{1.3}$$

Так как для любого числа a имеет место или $|a| = a$ или $|a| = -a$, то из неравенств (1.2) и (1.3) и вытекает (1.1). ◄

Из (1.1) следует, что расстояние $\rho(x, y)$ — непрерывная функция от x и y в том смысле, что если $x_n \to x, y_n \to y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.

Действительно с помощью (1.1) имеем

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0.$$

Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ может иметь только один предел, т. е. из $x_n \to x$ и $x_n \to y$ вытекает $x = y$.

2

Приведем определения некоторых понятий, относящихся к метрическому пространству.

Открытым шаром в метрическом пространстве X называется множество $S(a, r)$ всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию

$$\rho(x, a) < r. \tag{1.4}$$

Точка $a \in X$ называется центром шара, а число $r > 0$ его радиусом. Если в (1.4) допускается знак равенства, то говорят о замкнутом шаре $S^*(a, r)$.

Понятие шара позволяет дать следующую характеристику предела сходящейся последовательности точек: для того чтобы $x = \lim x_n$, необходимо и достаточно, чтобы каков бы ни был шар S (открытый или замкнутый) с центром в точке x, существовало такое N, что $x_n \in S$ при $n \geqslant N$.

ε-окрестностью точки $a \in X$ называется шар $S(a, \varepsilon)$. Сферической (шаровой) окрестностью точки $a \in X$ называется любой открытый шар с центром в точке a.

Множество $G \subset X$ называется открытым, если каждая его точка внутренняя, т. е. содержится в G вместе с некоторой окрестностью, иначе говоря, если для любой точки $a \in G$ при некотором $\varepsilon > 0$ будет $S(a, \varepsilon) \subset G$.

Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если какова бы ни была сходящаяся к пределу последовательность точек $x_n \in F$, её предел тоже входит в F.

Всё множество X — открытое множество, пустое множество также причисляется к открытым. Покажем, что в любом метрическом пространстве всякий открытый шар $S(a, r)$ — открытое множество. Действительно, пусть $x \in S(a, r)$. Это значит, что $\rho(x, a) < r$. Положим $\varepsilon = r - \rho(x, a)$. Если $y \in S(x, \varepsilon)$, т. е. если $\rho(y, x) < \varepsilon$, то $\rho(y, a) \leqslant \rho(y, x) + \rho(x, a) < r$, откуда $y \in S(a, r)$. Таким образом, весь шар $S(x, \varepsilon) \subset S(a, r)$, т. е. x — внутренняя точка множества $S(a, r)$.

Из определения замкнутого множества следует, что множество X замкнуто, пустое множество тоже считается замкнутым, так как из него вообще нельзя выделить никакой последовательности точек. Конечное множество $F = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ замкнуто, так как если последовательность $\{x_n\}$ состоит из точек этого множества, то по крайней мере одна из точек, пусть это будет y_i повторяется среди x_n бесконечное множество раз. А тогда и предел (если он существует) должен совпасть с y_i.

Покажем, что в любом метрическом пространстве замкнутый шар $S^*(a, r)$ всегда представляет замкнутое множество. Действительно, пусть $x_n \in S^*(a, r)$, тогда $\rho(x_n, a) \leqslant r$. Если при этом $x_n \to x$, то по непрерывности расстояния

$$\rho(x, a) = \lim \rho(x_n, a) \leqslant r,$$

следовательно, и $x \in S^*(a, r)$.

С понятием замкнутого множества тесно связано понятие предельной точки. Именно, пусть E — произвольное множество точек из X, точка $x \in X$ называется предельной точкой множества E, если существует такая последовательность точек $\{x_n\} \in E$, среди которых имеется бесконечное множество различных точек, что $x = \lim x_n$.

Ясно, что замкнутое множество содержит все свои предельные точки. Однако в определении замкнутого множества говорилось о любых сходящихся последовательностях, в которых допускаются какие угодно повторения точек. Нетрудно проверить, что получится равносильное определение, если замкнутым называть множество, содержащее все свои предельные точки.

Теорема 1.1. *Объединение конечного числа замкнутых множеств — замкнутое множество.*

▶ Так как объединение любого конечного числа множеств можно образовать последовательным прибавлением по одному множеству, то достаточно доказать теорему для объединения двух множеств.

Пусть $F_1,\ F_2$ — замкнутые множества $F = F_1 \cup F_2,\ x_n \in F\ (n = 1, 2, \ldots),\ x_n \to x$. В последовательности $\{x_n\}$, существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, состоящая целиком из точек одного из данных множеств, например, $x_{n_k} \in F_1$. Но x_{n_k} тоже стремится к x, и так как F_1 замкнуто, то $x \in F_1$, а потому $x \in F$. ◀

Теорема 1.2. *Пересечение любого множества замкнутых множеств — замкнуто.*

▶ Пусть $F = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ и все F_α замкнуты. Если $x_n \to x$ и $x_n \in F\ (n = 1, 2, \ldots)$, то все $x_n \in F_\alpha$ при любом α, а потому и $x \in F_\alpha$ при любом α. Следовательно, $x \in F$ и F замкнуто. ◀

Множество $\overline{E}$, получающееся присоединением к E всех его предельных точек, называется замыканием множества E. Таким образом, всегда $E \subset \overline{E}$. Из определения замыкания сразу следует, что множество E замкнуто тогда и только тогда, когда $E = \overline{E}$.

Лемма 1.1. *Всякая точка $x \in \overline{E}$ представима в виде $x = \lim x_n$, где $x_n \in E$.*

▶ Если $x \in E$, то можно положить $x_n = x$ при всех n. Если же $x \notin E$, то, по определению, включение $x \in \overline{E}$ означает, что $x = \lim x_n$, где $x_n \in E$. ◀

Лемма 1.2. *Для того чтобы $x \in \overline{E}$, необходимо и достаточно, чтобы каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существовала такая точка $x' \in E$, что расстояние $\rho(x', x) < \varepsilon$.*

▶ Необходимость условия доказана в предыдущей лемме. Если, наоборот, условие выполнено, то при каждом n существует такая точка $x_n \in E$, что $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$; тогда $x = \lim x_n$ и $x \in \overline{E}$. ◀

Теорема 1.3. *Замыкание любого множества замкнуто.*

▶ Пусть $x_n \in \overline{E}$ и $x_n \to x$. Согласно лемме 1.2 для каждого n можно подобрать $y_n \in E$ так, что $\rho(y_n, x_n) < \frac{1}{n}$. Тогда

$$\rho(y_n, x) \leqslant \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x) < \frac{1}{n} + \rho(x_n, x) \to 0.$$

Следовательно $y_n \to x$. Таким образом, $x \in \overline{E}$ и $\overline{E}$ замкнуто. ◀

Замечание 1.1. Замыкание $\overline{E}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащее E.

▶ Всякое замкнутое множество F, содержащее E, должно содержать и предел всех сходящихся последовательностей точек из E. Следовательно, $\overline{E} \subset F$. Но так как само $\overline{E}$ замкнуто, то оно и есть наименьшее из всех замкнутых $F \supset E$. ◀

Теорема 1.4. *Для того, чтобы множество $G \subset X$ было открытым необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $F = X \setminus G$ было замкнутым.*

► Необходимость. Пусть G открыто, а $x_n \in F$ $(n = 1,\ 2, \ldots)$ и $x_n \to x$. Если бы $x \in G$, то и некоторый шар $S(x, \varepsilon)$ входил бы в G и не содержал точек из F, что невозможно для предела последовательности точек $x_n \in F$. Следовательно, $x \in F$ и F замкнуто.

Достаточность. Пусть F замкнуто, а $x \in G$. Тогда существует $\varepsilon > 0$, при котором шар $S(x, \varepsilon)$ не содержит ни одной точки множества F. В противном случае по лемме 1.2, x входило бы в $\overline{F}$, а так как $\overline{F} = F$, то x входило бы и в F. Таким образом, весь шар $S(x, \varepsilon) \subset G$, x — внутренняя точка множества G и G — открыто. ◄

Теорема 1.5. *Объединение любого множества открытых множеств и пересечение конечного числа открытых множеств — также открытые множества.*

► Пусть $G = \bigcap\limits_{\alpha} G_\alpha$ и все G_α открыты. Тогда $F_\alpha = X \setminus G_\alpha$ замкнуты. А по свойству дополнений $X \setminus G_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$. Следовательно, по теореме 1.2 $X \setminus G$ замкнуто, а по теореме 1.4 G открыто.

Аналогично, пусть $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ и G_i открыты. Тогда $F_i = F \setminus G_i$ замкнуты и $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ тоже замкнуто по теореме 1.1. Но по свойству дополнений $G = X \setminus F$, следовательно, G открыто. ◄

4

Для любых двух непустых множеств E_1 и E_2, содержащихся в X, определяется расстояние $\rho(E_1, E_2)$ между ними по формуле

$$\rho(E_1, E_2) := \inf_{\substack{x \in E_1, \\ y \in E_2}} \rho(x, y).$$

В частности, если E_1 состоит из одной точки x, то $\rho(E_1, E_2) = \rho(x, E_2)$ называется расстоянием от точки x до множества E_2. Нетрудно видеть, что $\rho(x_0, E) = 0$ равносильно тому, что $x_0 \in \overline{E}$.

Пусть X_0 — множество в метрическом пространстве X. Поскольку расстояние определено для каждой пары элементов множества X, то тем самым оно определено и в X_0. Ясно, что при этом выполнены аксиомы 1)–3) метрического пространства, так что X_0 естественным образом оказывается метрическим пространством. Говорят, что метрика в X_0 индуцирована метрикой X. Если X_0, кроме того, замкнутое множество, то оно называется подпространством метрического пространства X.

Допустим, что между элементами двух метрических пространств X и Y можно установить взаимно однозначное соответствие так, что расстояние между соответствующими парами элементов пространств X и Y равны. Такие пространства называются изометрическими.

5

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется фундаментальной (или сходящейся в себе), если $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $m, n \to \infty$, т. е. если $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $m, n \geqslant N_\varepsilon$.

Метрическое пространство X называется полным, если каждая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится, т. е. существует такая точка $x_0 \in X$, что $x_n \to x_0$.

Очевидно, в любом метрическом пространстве каждая сходящаяся последовательность фундаментальна. Действительно, пусть $x_n \to x_0$, Тогда

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \underset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

Таким образом, в полном пространстве имеет место признак сходимости Коши: для того, чтобы $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

При переходе от пространства X к его подпространству X_0 свойство полноты сохраняется.

В самом деле, если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность из X_0, то в силу полноты пространства X существует $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in X$. По замкнутости множества X_0 должно быть $x_0 \in X_0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится в X_0.

Множество точек метрического пространства называется ограниченным по расстоянию (говорят и просто ограниченным), если оно содержится в каком-нибудь шаре.

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется ограниченной, если множество её значений ограничено в X.

Лемма 1.3. *Всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ ограничена.*

► Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем $N = N_\varepsilon$ так, что $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ при $m, n \geqslant N$. В частности, $\rho(x_n, x_N) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$. Теперь положим

$$r = \max\{\varepsilon, \rho(x_1, x_N), \rho(x_2, x_N), \ldots, \rho(x_{N-1}, x_N)\}.$$

Тогда уже при всех $n \in \mathbb{N}$ имеем $\rho(x_n, x_N) \leqslant r$, т. е. $x_n \in S^*(x_N, r)$. Заменяя r на $r' > r$, можно заключить все x_n и в открытый шар $S(x_N, r')$. ◄

Покажем как теорема о последовательности вложенных друг в друга отрезков переносится в любые полные метрические пространства.

Теорема 1.6. *Пусть $\{S_n\}$ — последовательность замкнутых шаров из полного метрического пространства X, причем $S_{n+1} \subset S_n$ при любом n, а радиус шара S_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда шары S_n имеют непустое пересечение, состоящее из одной точки.*

► Пусть $S_n = S^*(x_n, r_n)$. По условию $r_n \to 0$. Далее, $x_m \in S_m \subset S_n$ при $m > n$, следовательно, $\rho(x_m, x_n) \leqslant r_n$, а потому последовательность центров $\{x_n\}$ — фундаментальная. Вследствие полноты в X существует $x = \lim x_n$. Так как при любом n и при $m > n$ будет $x_m \in S_n$, то вследствие замкнутости S_n, $x \in S_n$. Таким образом, x — общая точка всех шаров S_n. Пусть точка y также входит во все шары S_n, тогда при любом n

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) = 2r_n$$

и так как $r_n \to 0$, то $\rho(x, y) = 0$, т. е. $x = y$. Таким образом $\bigcap\limits_n S_n$ состоит только из одной точки x. ◄

ЛЕКЦИЯ 13

6

Множество D метрического пространства X называется плотным в множестве $X_0 \subset X$, если для каждого $x \in X_0$ и $\varepsilon > 0$ в D найдется такая точка z, что $\rho(x,z) < \varepsilon$. Очевидно, если множество D_0 плотно в D, а D в свою очередь плотно в X_0, то D_0 плотно в X_0.

Пусть D плотно в $X_0 \subset X$ и $x \in X_0$. Возьмем последовательность $\varepsilon_k \to 0$ ($\varepsilon_k > 0$). Для каждого $k \in \mathbb{N}$ в D найдется точка z_k такая, что $\rho(x, z_k) < \varepsilon_k$ и, следовательно, $z_k \to x$. Итак, из множества D можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к наперед заданному элементу $x \in X_0$, т. е. всякий элемент $x \in X_0$ представим в виде

$$x = \lim_{n\to\infty} z_n \quad (z_n \in D).$$

Обратно, если D обладает этим свойством, то оно очевидно плотно в X_0.

Принимая это во внимание, можно утверждать, что D тогда и только тогда плотно в X_0, когда замыкание $\overline{D}$ множества D содержит X_0: $\overline{D} \supset X_0$. В частности, если $X_0 = X$, то $\overline{D} = X$ — множество D плотно в пространстве, если его замыкание есть все пространство.

Метрическое пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное или конечное плотное подмножество.

Если метрическое пространство X_0 содержится в сепарабельном метрическом пространстве X_1, то X_0 также сепарабельно.

► Пусть $X_0 \subset X$ и $D = \{x_k\}$ — счетное плотное в X подмножество. Возьмем числовую последовательность $\varepsilon_n \to 0$ ($\varepsilon_n > 0$) и для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдем в X_0 элемент z_{kn} так, что

$$\rho(x_k, z_{kn}) < \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n.$$

Пусть $x \in X_0$ и $\varepsilon > 0$; найдется элемент $x_k \in D$, такой, что $\rho(x, x_k) < \varepsilon$. Беря n настолько большим, чтобы было $\varepsilon_n < \varepsilon$, получим

$$\rho(x, z_{kn}) \leqslant \rho(x, x_k) + \rho(x_k, z_{kn}) < \varepsilon + \rho(x_k, X_0) + \varepsilon_n \leqslant \varepsilon + \rho(x_k, x) + \varepsilon_n < 3\varepsilon.$$

Отсюда и следует плотность множества $D_0 = \{z_{kn}\}$ в X_0. ◄

7

Множество E метрического пространства X называется компактным в пространстве X, если из любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества E можно выделить сходящуюся в пространстве X подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$.

В частности, если само пространство X обладает этим свойством, то оно называется компактным пространством.

Заметим, что всякое конечное множество точек метрического пространства компактно. Действительно, пусть $E = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, а $\{x_n\}$ — любая последовательность, состоящая из точек множества E. Но тогда по крайней мере одна из точек y_i повторяется среди x_n бесконечное множество раз. Например, при некотором i

$$y_i = x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_k} = \ldots$$

и подпоследовательность $x_{n_k} \to y_i$.

Теорема 1.7. *Компактное множество ограничено.*

► Пусть множество E не ограничено. Возьмем любую его точку и назовем её x_1. Положим $r_1 = 1$. Так как E неограниченно, то оно не может целиком содержаться в шаре $S(x_1, r_1)$. Возьмем любую точку из E не входящую в этот шар и назовем её x_2. Тогда $\rho(x_1, x_2) \geqslant r_1$. Положим $r_2 = \rho(x_1, x_2) + 1$. Так как E не может содержаться в $S(x_{1,}r_2)$, то можно найти некоторую его точку x_3, не входящую в этот шар: $\rho(x_1, x_3) \geqslant r_2$. Полагаем $r_3 = \rho(x_1, x_3) + 1$ и продолжаем этот процесс до бесконечности. В результате строится последовательность точек $\{x_n\} \in E$ и возрастающая последовательность чисел r_n так, что при всех $n = 2, 3, \ldots$

$$\rho(x_1, x_n) = r_n - 1 \geqslant r_{n-1}.$$

Теперь при любых $n > m \geqslant 2$

$$\rho(x_1, x_n) = r_n - 1 \geqslant r_{n-1} \geqslant r_m,$$
$$\rho(x_1, x_m) = r_m - 1.$$

Поэтому из неравенства

$$\rho(x_1, x_n) \leqslant \rho(x_1, x_m) + \rho(x_m, x_n)$$

вытекает, что

$$r_m \leqslant (r_m - 1) + \rho(x_m, x_n).$$

Откуда $\rho(x_m, x_n) \geqslant 1$. Следовательно, никакая последовательность, выделенная из $\{x_n\}$ не может быть фундаментальной и тем более не может быть сходящейся. Значит E не компактно. ◄

Свойства компактности множества не зависит от того, в каком полном пространстве рассматривается это множество.

Точнее, если множество $E \subset X_0 \subset X$, где X_0 есть подпространство X, то E одновременно компактно или нет и в X_0 или X.

Теорема 1.8. *Компактное пространство полно.*

► Пусть $\{x_n\}$ — сходящаяся в себе последовательность компактного пространства X. Согласно определению из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X,\ x_{n_k} \to x_0$. Для произвольного k имеем

$$\rho(x_k, x_0) \leqslant \rho(x_k, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0).$$

Оба слагаемых правой части стремятся к нулю при $k \to \infty$ (первое в силу фундаментальности последовательности), а потому $\rho(x_k, x_0) \to 0$, т. е. x_0 является пределом всей последовательности $\{x_k\}$ и полнота пространства X доказана. ◄

8

Данное выше определение не дает эффективного критерия компактности множества. Установим удобный признак компактности, принадлежащий Хаусдорфу.

Пусть $\varepsilon > 0$ данное положительное число, а M — множество метрического пространства X. Множество M называется ε-сетью для множества $E \subset X$, если для каждой точки $x \in E$ в M найдется такая точка z, что $\rho(x, z) < \varepsilon$.

Теорема 1.9 (Хаусдорф). *Для того, чтобы множество E метрического пространства X было компактным необходимо, а если X полное пространство, то и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ в X существовала конечная ε-сеть для E.*

► Необходимость. Пусть условие теоремы не выполнено, то есть при некотором $\varepsilon > 0$ не существует конечной ε_1-сети. Возьмем произвольную точку $x_1 \in E$. Множество, состоящее из одного элемента x_1, не образует ε_1-сети для E, поэтому найдется $x_2 \in E$, такое, что $\rho(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon_1$. Множество $\{x_2, x_1\}$ также не может быть ε_1-сетью для E, следовательно найдется $x_3 \in E$ причем

$$\rho(x_i, x_3) \geqslant \varepsilon. \qquad (i = 1, 2)$$

Рассуждая так и дальше, мы придем к последовательности $\{x_n\}$ точек из E такой, что $\rho(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon, (m \neq n), n, m = 1, 2, 3, \ldots$ Очевидно, из такой последовательности нельзя выделить никакой сходящейся подпоследовательности. Таким образом, множество E не компактно.

Достаточность. Пусть выполнены условия теоремы. Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ элементов множества E и докажем, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для этого зададимся числовой последовательностью $\varepsilon_n \to 0$ и рассмотрим существующую по условию ε_1-сеть. Если построить шары с центром в точках ε_1-сети и радиусом ε_1, то каждая точка множества E попадет по крайней мере в один из этих шаров. Так как шаров конечное число, то в одном из них окажется бесконечно много элементов рассматриваемой последовательности. Обозначим этот шар через $S(z_1, \varepsilon_1)$. Возьмем далее ε_2-сеть и рассмотрим шары радиуса ε_2 с центрами в её точках. Как и раньше, в один из таких шаров попадет бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, содержащейся в $S(z_1, \varepsilon_1)$. Пусть это будет шар $S(z_2, \varepsilon_2)$. Продолжая таким образом, получим последовательность шаров $\{S(z_n, \varepsilon_n)\}$ такую, что в пересечении любого их числа попадет бесконечное множество точек данной последовательности. Ввиду этого, мы можем выбрать $x_{n_1} \in S(z_1, \varepsilon_1)$, $x_{n_2} \in S(z_2, \varepsilon_2) \cap S(z_1, \varepsilon_1)$ $(n_2 > n_1)$ и вообще

$$x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^{k} S(z_i, \varepsilon_i). \quad (n_k > n_{k-1} > \ldots > n_1)$$

Так как оба элемента x_{n_k}, x_{n_l} принадлежат шару $S(z_k, \varepsilon_k)$ $(k \leqslant l)$, то

$$\rho(x_{n_k}, x_{n_l}) \leqslant \rho(x_{n_k}, z_k) + \rho(z_k, x_{n_k}) < 2\varepsilon_k,$$

а значит последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится в себе и, в силу полноты пространства X, сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$. Таким образом, компактность E доказана. ◄

Замечание 1.2. Для компактности множества достаточно также (в случае полноты пространства X) существование компактной ε-сети. В самом деле для компактной ε-сети будет существовать конечная ε-сеть, которая будет очевидно 2ε-сетью для исходного множества, что и устанавливает его компактность.

Следствие 1.1. *Компактное пространство сепарабельно.*

► Действительно, если $\varepsilon_k \to 0$, M_k — конечная ε_k-сеть, то $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ будет очевидно счетным, плотным в данном пространстве множеством. ◄

В связи с приведенным рассуждением обратим внимание на различие компактного и сепарабельного пространства. В случае сепарабельного пространства было обеспечено наличие счетного множества, элементами которого можно было безгранично приблизиться к любому элементу пространства. В случае компактного пространства мы также получаем такую возможность, строя множество M — объединение ε_k-сетей. Однако, здесь с помощью одной ε-сети — конечного числа элементов — мы можем одновременно аппроксимировать каждый элемент пространства, что в сепарабельном пространстве, вообще говоря, не имеет место.

Множество E в метрическом пространстве X называется компактом в X, если из любой последовательности точек $\{x_n\} \subset E$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству E.

Легко убедится, что компакт в метрическом пространстве есть замкнутое множество.

9

Точка a метрического пространства X называется граничной точкой множества $E \subset X$, если в любой окрестности точки a есть как точки, принадлежащие множеству E, так и точки, не принадлежащие множеству E.

Граничная точка a множества E может и не принадлежать множеству E. Совокупность всех граничных точек множества E называется границами множества E и обозначается ∂E.

Например в $\mathbb{R}$

$$\partial(a, b) = \{a, b\}, \quad \partial[a, b] = \{a, b\}.$$

ЛЕКЦИЯ 14

§2. Нормированные пространства

1

Множество X называется векторным (линейным) пространством или линейным множеством (вещественным), если для каждых двух его элементов x и y определена их сумма $x + y$ – элемент того же множества, и для любого элемента x и $\lambda \in \mathbb{R}$ определено произведение λx, являющееся также элементом X, причем эти операции удовлетворяют следующим условиям (аксиомам):

1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2) $x + y = y + x$;

3) в X существует такой элемент θ, что для любого $x \in X$ будет $0 \cdot x = \theta$;

4) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

6) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$;

7) $1 \cdot x = x$.

Отметим простейшие следствия из аксиом 1)–7).

a) $x + \theta = x$;

b) каждому x отвечает единственный элемент x' такой, что $x + x' = \theta$. Именно $x' = (-1)x$, элемент x' обозначается обычно $-x$ и называется противоположным (по отношению к x) элементом;

c) $-(\alpha x) = (-\alpha)x = \alpha(-x)$;

d) каковы бы ни были x и y, существует единственный элемент z такой, что $z+y = x$; его называют разностью элементов x и y и обозначают $z = x - y$;

e) $x = y$ эквивалентно $x - y = \theta$;

f) $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$; $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$;

g) $\lambda\theta = \theta$;

h) если $\lambda x = \theta$ и $\lambda \neq 0$, то $x = \theta$;

i) если $\lambda x = \lambda y$ и $\lambda \neq 0$ то $x = y$;

j) если $\lambda x = \theta$ и $x \neq \theta$, то $\lambda = 0$;

r) если $\lambda x = \mu x$ и $x \neq \theta$, то $\lambda = \mu$.

Если в определении линейного пространства исходить из множества комплексных чисел, то мы естественным образом придем к понятию комплексного линейного пространства. Так называется множество, для элементов которого определено сложение и умножение на комплексное число, причем, так же как и в вещественном случае, соблюдены аксиомы 1)–7).

Ясно, что все следствия из аксиом будут одинаково верны как и в вещественном, так и в комплексном случае, лишь бы при выводе их не были использованы такие свойства вещественных чисел, которыми комплексные числа не обладают, например упорядоченность. Ввиду этого нет необходимости рассматривать отдельно комплексные линейные пространства, за исключением немногочисленных случаев, предусмотренных выше.

Рассмотрим множество X_0, содержащееся в линейном пространстве X и такое, что если $x, y \in X_0$, то и линейная комбинация $\lambda x + \mu y \in X_0$. В X_0 определены, таким образом, операции сложения элементов и умножение элемента на вещественное число, приводящее к элементу из X_0. При этом для X_0, выполняется аксиома 3) линейного пространства ($\theta = 0 \cdot x + 0 \cdot y$). Остальные аксиомы соблюдены для X_0, поскольку они имеют место в X. Следовательно, X_0 естественным образом оказывается линейным пространством.

Очевидно, пересечение любой совокупности линейных пространств в X является снова линейным пространством. Поэтому, если A — некоторое множество в X, то существует наименьшее линейное множество $\mathcal{L}(A)$, содержащее A. Это будет пересечение всех линейных множеств, содержащих A. Множество $\mathcal{L}(A)$ называется линейной оболочкой множества A. Легко убедится, что $\mathcal{L}(A)$ совпадает с множеством $\widetilde{L}$ всех элементов X вида $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольный набор элементов из A, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — произвольные вещественные числа.

В самом деле $\widetilde{L}$, очевидно, линейное множество и содержит A, с другой стороны, всякое линейное множество, содержащее A, должно содержать и всевозможные линейные комбинации элементов из A, т. е. должно содержать $\widetilde{L}$. Следовательно, $\mathcal{L}(A) = \widetilde{L}$.

Элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются линейно независимыми, если соотношение вида $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \theta$ возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, в противном случае элементы $x_1, \ldots, x_n$ называются линейно зависимыми. Так, например, элементы $x, -x$ линейно зависимы, т. к. $1 \cdot x + 1 \cdot (-x) = \theta$. Если среди элементов $x_1, \ldots, x_n$ есть равный нулю, то они также линейно зависимы.

Бесконечная система элементов называется линейно независимой, если любой конечный набор различных элементов этой системы линейно независим. Если элементы $\{x_\alpha\}$ образуют линейно независимую систему, то ясно, что из равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\gamma_k} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k x_{\gamma_k}$$

вытекает равенство $\lambda_k = \mu_k$ $(k = \overline{1, n})$.

Линейно независимая система $\{x_\alpha\}$ называется алгебраическим базисом линейного пространства X, если $\mathcal{L}(\{x_\alpha\}) = X$. Таким образом, всякий элемент $x \in X$ может быть представлен в форме линейной комбинации элементов алгебраического базиса и, как это следует из сказанного выше, — единственным образом. Среди всех линейных пространств с этой точки зрения наиболее простыми являются те, которые имеют конечный алгебраический базис. Такие пространства называются конечномерными, а число элементов, образующих базис, называются размерностью данного линейного пространства. Нетрудно показать, что размерность линейного пространства является его инвариантом, т. е. не зависит от выбора того или иного алгебраического базиса.

В линейном пространстве X можно ввести понятие выпуклого множества. Так называется множество, обладающее тем свойством, что вместе с двумя элементами x и y оно содержит и всякую их линейную комбинацию $\lambda x+\mu y$, коэффициенты которой λ и μ — вещественные неотрицательные числа, удовлетворяющие условию $\lambda+\mu=1$ (множество таких линейных комбинаций называется отрезком в X с концами x и y).

Нетрудно видеть, что если A — выпуклое множество, $x_k \in A, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$ $(k=\overline{1,n})$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=1$, то $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \in A$. В самом деле, при $n=2$ это вытекает из определения выпуклого множества. Переход от n к $n+1$ осуществляется так

$$\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k=(1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k+\lambda_{n+1}x_{n+1}.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}=1,$$

то по индукциионному предположению

$$z=\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\in A$$

и по определению выпуклого множества

$$(1-\lambda_{n+1})z+\lambda_{n+1}x_{n+1}\in A.$$

Если A — произвольное множество, входящее в X, то можно говорить о выпуклой оболочке $\mathcal{K}(A)$ множества A, понимая под этим наименьшее выпуклое множество содержащее A. Очевидно, что пересечение любой совокупности выпуклых множеств в X снова является выпуклым множеством, поэтому $\mathcal{K}(A)$ есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащихся в A. Легко убедиться, что $\mathcal{K}(A)$ совпадает с множеством B всех элементов вида

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k \quad \left(x_k\in A,\ \lambda_k\in\mathbb{R}_+,\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1\right). \tag{2.1}$$

Действительно, B — выпуклое множество, ибо если $\alpha\in(0,1)$, $x,y\in B$ (т. е. $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k x_k$ $y=\sum\limits_{l=1}^{m}\mu_l y_l$, $x_k,y_l\in A$, $\lambda_k,\mu_l\in\mathbb{R}_+$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k=\sum\limits_{l=1}^{m}\mu_l=1$), то

$$\alpha x+(1-\alpha)y=\sum_{k=1}^{n}\alpha\lambda_k x_k+\sum_{l=1}^{m}(1-\alpha)\mu_l y_l,$$

причем

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha\lambda_k+\sum_{l=1}^{m}(1-\alpha)\mu_l=1.$$

Далее $B\supset A$ и, следовательно, $B\supset\mathcal{K}(A)$. С другой стороны, всякое выпуклое множество, содержащее A, должно содержать и всевозможные комбинации (2.1), т. е. B. Таким образом B должно содержаться в $\mathcal{K}(A)$. Итак, $\mathcal{K}(A)=B$.

2

Линейное пространство X называется нормированным пространством, если каждому элементу $x \in X$ сопоставлено вещественное число $\|x\| \geqslant 0$, называемое нормой элемента x, причем соблюдены условия (аксиомы нормированного пространства)

1) $\|x\| = 0$ эквивалентно $x = \theta$;
2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Положив для $x, y \in X$

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \tag{2.2}$$

мы обращаем X в метрическое пространство.

В нормированных пространствах имеют место все факты, установленные для метрических и линейных пространств. Ввиду важности нормированых пространств приведем некоторые из этих фактов, формулируя их в новых терминах.

a) Имеет место неравенство

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|. \tag{2.3}$$

► По неравенству треугольника

$$\|x\| \leqslant \|y\| + \|x - y\|.$$

Отсюда

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

Меняя x и y ролями, положим

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y - x\| = \|x - y\|$$

и, следовательно,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|.$$

◄

b) Соотношение $x_n \to x_0$ эквивалентно $\|x_n - x_0\| \to 0$.

Это вытекает из соотношения (2.2).

c) $\|x\|$ — непрерывная функция от x, т. е. если $x_n \to x_0$, то $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

► В самом деле, с помощью неравенства (2.3) получаем

$$\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \leqslant \|x_n - x_0\| \to 0.$$

◄

d) Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т. е. существует такое число K, что $\|x_n\| \leqslant K$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Справедливость этого предложения следует из c).

e) Операции $x + y$ и λx непрерывны, т. е. если $x_n \to x_0,\ y_n \to y_0,\ \lambda_n \to \lambda_0$, то $x_n + y_n \to x_0 + y_0$ и $\lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0$.

► В самом деле,

$$\|(x_n + y_n) - (x_0 + y_0)\| \leqslant \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \to 0$$

и

$$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| = \|(\lambda_n x_n - \lambda_n x_0)| + (\lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0)\| \leqslant \\ \leqslant |\lambda_n|\,\|x_n - x_0\| + |\lambda_n - \lambda_0|\,\|x_0\| \to 0.$$

◄

В нормированных пространствах имеет смысл понятие линейного пространства.

Отметим следующий факт: замыкание линейного пространства снова является линейным пространством. Это непосредственно вытекает из пункта e). Таким образом, если для данного множества $E \subset X$ образовать линейную оболочку $\mathcal{L}(E)$, а затем построить её замыкание $\overline{\mathcal{L}(E)}$, то это будет наименьшее замкнутое линейное множество, содержащее E, так как всякое замкнутое линейное множеств $\widetilde{L}$ содержащее E, должно содержать $\mathcal{L}(E)$, а значит и $\overline{\mathcal{L}(E)}$. Множество $\overline{\mathcal{L}(E)}$ называется линейным замыканием E. Учитывая строение линейной оболочки $\mathcal{L}(E)$ множества E, можно утверждать, что $\overline{\mathcal{L}(E)}$ состоит из всех элементов $x \in X$, которое допускает представление в форме

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} x_k^{(n)} \quad (x_k^{(n)} \in E,\ k = \overline{1,n},\ n = 1, 2, \ldots).$$

Система элементов $\{x_\alpha\}$ называется полной в пространстве X, если $\overline{\mathcal{L}(\{x_\alpha\})} = X$, т. е. если множество всевозможных линейных комбинаций элементов $\{x_\alpha\}$ плотно в X.

В нормированных пространствах можно рассматривать выпуклые множества. Примерами таких множеств являются открытый $S(x_0, r)$ и замкнутый $S^*(x_0, r)$ шары, т. е. множество элементов $x \in X$, для которых $\|x - x_0\| < r$ $(\leqslant r)$.

Действительно, если $x, y \in S(x_0, r),\ \lambda + \mu = 1,\ \lambda, \mu \geqslant 0$, то

$$\|(\lambda x + \mu y) - x_0\| = \|\lambda(x - x_0) + \mu(y - x_0)\| \leqslant \lambda\,\|x - x_0\| + \mu\,\|y - x_0\| < r,$$

так что $\lambda x + \mu y \in S(x_0, r)$.

Подобно тому, как это было сделано для линейного замыкания, можно ввести выпуклое замыкание, понимая под этим, множество $\overline{\mathcal{K}(E)}$, т. е. замыкание выпуклой оболочки множества E. Как выше устанавливается, что $\overline{\mathcal{K}(E)}$ есть наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее E.

ЛЕКЦИЯ 15

3

Полные нормированные пространства называются пространствами типа B или B-пространствами (по имени польского математика Стефана Банаха).

В терминах нормы сходимость в себе последовательности x_n означает, что $\|x_n - x_m\| \to 0,\ n, m \to \infty$. Поэтому условие полноты нормированного пространства X выглядит так: из того, что $\|x_n - x_m\| \to 0$ вытекает существование такого $x_0 \in X$, что $x_n \to x_0$.

В нормированном пространстве можно рассматривать бесконечные ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots \tag{2.4}$$

Ряд (2.4) называется сходящимся, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Суммой ряда называется предел S этой последовательности

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Ряд (2.4) называется абсолютно (нормально) сходящимся, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|. \tag{2.5}$$

В B-пространстве из абсолютной сходимости ряда вытекает обычная сходимость, т. е. если сходится (2.5), то сходится и ряд (2.4), причем справедлива оценка

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|. \tag{2.6}$$

► Действительно, если $m > n$, то

$$S_m - S_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m$$

и, следовательно,

$$\|S_m - S_n\| \leqslant \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \ldots + \|x_m\|.$$

Поскольку ряд (2.5) сходится, правая часть в этом неравенстве сколь угодно мала при достаточно большом n. Стало быть, последовательность $\{S_n\}$ сходится в себе, а следовательно, в силу полноты пространства, сходится. Переходя к пределу, при $n \to \infty$ в неравенстве

$$\|S_n\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

и используя непрерывность нормы, получим требуемую оценку. ◀

Нормированное пространство является одновременно метрическим пространством и линейным множеством. Поэтому термин «подпространство» в данном случае целесообразно применять лишь к множеству, являющемуся с одной стороны подпространством метрического пространства и с другой стороны, линейным множеством.

В соответствии с этим, подпространством нормированного пространства X мы будем называть любое замкнутое линейное множество.

Если два нормированных пространства изометричны как метрические пространства и изоморфны как линейные множества, то они называются линейно изометричными.

Точнее говоря, пространства X и Y линейно изометричны, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow y$ так, что из $x \leftrightarrow y$ следует $\|x\| = \|y\|$ и $\lambda x \leftrightarrow \lambda y$, а из $x_2 \leftrightarrow y_1$ и $x_2 \leftrightarrow y_2$ вытекает $x_1 + x_2 \leftrightarrow y_1 + y_2$.

§3. Гильбертово пространство

1

Линейное комплексное множество H называется пространством со скалярным произведением, если для каждой пары элементов $x, y \in H$ определено скалярное произведение (x, y) — комплексное число, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам)

1) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;

2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$;

3) $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ равносильно $x = \theta$.

Из определения пространства со скалярным произведением вытекает:

а) $(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \overline{\lambda}(x, y_1) + \overline{\mu}(x, y_2)$ (аксиомы 1 и 2).

в) $(x, \theta) = (\theta, y) = 0$.

Действительно, $(x, 0 \cdot y) = 0(x, y) = 0$.

с) $|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y)$ (неравенство Коши—Буняковского).

► Для доказательства этого предложения рассмотрим выражение

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) + |\lambda|^2 (y, y).$$

По аксиоме 3 это выражение неотрицательно, каково бы ни было число λ. Предполагая, что $(y, y) > 0$ (в противном случае $y = \theta$ и доказываемое неравенство очевидно), положим

$$\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}.$$

На основании сказанного

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0,$$

т. е

$$(x,x)(y,y) - |(x,y)|^2 \geqslant 0,$$

что и требовалось доказать. ◀

Если в пространстве H со скалярным произведением положить

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \quad (x \in H), \tag{3.1}$$

то H становится нормированным пространством. Действительно, из аксиом нормированного пространства только неравенство треугольника не вытекает непосредственно из определения H. Докажем его. Пусть $x, y \in H$. Используя неравенство Коши—Буняковского, имеем

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Нормированное пространство называется унитарным, если в нем можно ввести скалярное произведение, связанное с нормой соотношением (3.1).

Поскольку H — нормированное пространство, оно обладает всеми свойствами последнего. В частности, имеют место элементарные факты, отмечавшиеся выше. Отметим еще несколько простых предложений, относящихся специально к пространствам со скалярным произведением.

d) Непрерывность скалярного произведения.

Если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

▶ Действительно, с помощью неравенства Коши—Буняковского получаем

$$|(x,y) - (x_n, y_n)| \leqslant |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \leqslant \|x\| \, \|y - y_n\| + \|x - x_n\| \, \|y_n\|.$$

Так как сходящаяся последовательность $\{y_n\}$ ограничена, то правая часть в написанном неравенстве стремится к нулю. Следовательно, $(x_n, y_n) \to (x, y)$. ◀

e) Каковы бы ни были элементы $x, y \in H$, справедливо равенство

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{3.2}$$

▶ В самом деле по определению нормы имеем

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) =$$
$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) + (x,x) - (x,y) - (y,x) + (y,y) =$$
$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

◀

2

Полное унитарное пространство называется гильбертовым.

При изучении гильбертовых пространств весьма важным оказывается понятие ортогональности элементов. Элементы x, y гильбертова пространства H называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$. Если фиксированный элемент $x \in H$ ортогонален каждому элементу некоторого множества $E \subset H$, то говорят, что x ортогонален E и пишут $x \perp E$. Наконец, если элементы двух множеств E_1 и E_2 попарно ортогональны, эти множества называются ортогональными ($E_1 \perp E_2$).

Укажем несколько простых фактов, касающихся введенных понятий.

a) Если $x \perp y_1$ и $x \perp y_2$, то $x \perp (\lambda y_1 + \mu y_2)$.

b) Если $x \perp y_n$ $(n = 1, 2 \ldots)$, $y_n \to y$, то $x \perp y$.

Это следует непосредственно из непрерывности скалярного произведения.

c) Если $x \perp E$, то $x \perp \overline{\mathcal{L}(E)}$.

Для доказательства надо воспользоваться пунктами a) и b).

d) Если $x \perp E$, где E полное в H множество, т. е. если $\overline{\mathcal{L}(E)} = H$, то $x = \theta$.

▶ Действительно, тогда $x \perp H$, а следовательно $x \perp x$, т. е. $(x, x) = 0$, что равносильно $x = \theta$. ◀

e) Совокупность всех элементов, ортогональных данному множеству E, является подпространством H, т. е. линейным замкнутым множеством.

Это подпространство называется ортогональным дополнением множества E.

Теорема 3.1 (основная теорема гильбертова пространства)**.** *Пусть H_1 — подпространство H и H_2 — его ортогональное дополнение. Тогда каждый $x \in H$ единственным образом представим в виде*

$$x = x' + x'' \quad (x' \in H_1,\ x'' \in H_2). \tag{3.3}$$

При этом x' реализует расстояние от x до H_1, т. е.

$$\|x - x'\| = \rho(x, H_1). \tag{3.4}$$

▶ Положим $d = \rho(x, H_1)$, $d_n = d + \frac{1}{n}$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдем $x_n \in H_1$ такой, что

$$\|x - x_n\| < d_n. \tag{3.5}$$

В силу (3.2)

$$\|2x - (x_n + x_m)\|^2 + \|x_m - x_n\|^2 = 2\left(\|x - x_n\|^2 + \|x_m - x\|^2\right). \tag{3.6}$$

Так как $\frac{x_n + x_m}{2} \in H_1$, то $\left\|x - \frac{x_n + x_m}{2}\right\| \geqslant d$ или $\|2x - (x_n + x_m)\|^2 \geqslant 4d^2$. Тогда из (3.6) с помощью (3.5) находим

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d^2.$$

Но $d_n, d_m \to d$ и потому $\|x_m - x_n\| \underset{n,m \to \infty}{\to} 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится в себе. Вследствие полноты H существует $x' = \lim x_n$, а так как множество H_1 замкнуто (по определению подпространства), то $x' \in H_1$. При этом $\|x - x'\| = \lim \|x - x_n\|$ и из (3.5) следует, что $\|x - x'\| \leqslant d$. Но так как знак меньше невозможен, то

$$\|x - x'\| = d. \tag{3.7}$$

Теперь положим $x'' = x - x'$ и покажем, что $x'' \in H_2$, т. е. $x'' \perp H_1$. Возьмем $y \in H_1 \setminus \{\theta\}$. При любом λ имеем $x' + \lambda y \in H_1$, так что

$$\|x'' - \lambda y\|^2 = \|x - (x' + \lambda y)\|^2 \geqslant d^2,$$

ЛЕКЦИЯ 16

3

Система элементов $\{x_\alpha\} \subset H$ называется ортогональной, если $(x_{\alpha'}, x_{\alpha''}) = 0$, при $\alpha' \neq \alpha''$, ортонормированной, если, кроме того, $\|x_\alpha\| = 1$ для каждого α. От ортогональной системы, не содержащей θ, нетрудно перейти к ортонормированной, поделив каждый элемент на его норму. Если среди элементов ортогональной системы нет θ, то такая система линейно независима. Действительно, пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_{\alpha_k} = \theta$. Тогда, умножая скалярно это равенство на x_{α_j}, получаем $\lambda_j (x_{\alpha_j}, x_{\alpha_i}) = \lambda_j \left\|x_{\alpha_j}\right\|^2 = 0$, т. е. $\lambda_j = 0$.

С другой стороны, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть* $\{y_k\}_{k=1}^N$ — *линейно независимая система элементов* H, *тогда существует ортонормированная система* $\{x_k\}_{k=1}^N$ *такая, что*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{n,k} y_k \quad (\lambda_{n,n} \neq 0,\ n = \overline{1, N}). \tag{3.8}$$

► Положим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = 1$$

и

$$x'_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_{n-1}) & y_1 \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_{n-1}) & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_{n-1}) & y_n \end{vmatrix}.$$

Последний определитель понимается как сумма произведений элементов последнего столбца на соответствующие алгебраические дополнения. Нетрудно проверить, что

$$(x'_n, y_k) = \Delta_n \delta_{n,k} \quad (k = \overline{1, n}), \tag{3.9}$$

где $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера ($\delta_{n,n} = 1,\ \delta_{n,k} = 0$ при $n \neq k$). Разлагая определитель x'_n по элементам последнего столбца

$$x'_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda'_{n,k} y_k \tag{3.10}$$

и используя (3.9), находим

$$(x'_n, x'_n) = (x'_n, \sum_{k=1}^{n} \lambda'_{n,k} y_k) = \Delta_n \Delta_{n-1},$$

ибо $\lambda'_{n,n} = \Delta_{n-1}$. Если $\Delta_{n-1} \neq 0$, то $x'_n \neq \theta$ в силу линейной независимости $\{y_k\}$, и потому в этом случае $(x'_n, x'_n) = \Delta_n \Delta_{n-1} > 0$. Поскольку $\Delta_0 = 1$ отсюда вытекает

$\Delta_k > 0, (k = \overline{0, N})$. Сопоставляя (3.9) и (3.10), находим $x'_m \perp x'_n$ при $m \neq n$. Осталось положить

$$x_n = \frac{x'_n}{\|x'_n\|} = \frac{x'_n}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}.$$

◀

Замечание 3.1. Поскольку $\lambda_{n,n} \neq 0$, элементы $\{y_n\}$ могут быть выражены через x_n :

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} \mu_{n,k} x_k \quad (\mu_{n,n} = \frac{1}{\lambda_{n,n}}, \ n = \overline{1, N}). \tag{3.11}$$

Замечание 3.2. В теореме 3.2 и замечании 3.1 можно заменить N на $+\infty$.

4

В этом пункте параграфа α будет означать целое неотрицательное число или $+\infty$.

Пусть в H дана ортонормированная система $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$. Пусть далее $x \in H$. Числа $a_k(x) = a_k = (x, x_k)$ называются коэффициентами Фурье элемента x по данной ортонормированной системе, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ — рядом Фурье элемента x.

Теорема 3.3. *Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ — ортонормированная система в H. Каков бы ни был $x \in H$, его ряд Фурье сходится, при этом сумма ряда Фурье*

$$S = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k x_k \tag{3.12}$$

есть проекция элемента x на подпространство

$$H_\alpha = \overline{\mathcal{L}\left(\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}\right)}$$

и имеет место равенство

$$\|x - S\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{\alpha} |a_k|^2. \tag{3.13}$$

▶ Пусть сначала $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$. Покажем, что $(x - S) \perp H_\alpha$. Для этого достаточно показать, что $(x - S) \perp x_k$ при $k = \overline{0, n}$. Имеем

$$(x - S, x_k) = (x, x_k) - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu (x_\nu, x_k) = a_k - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \delta_{\nu,k} = 0.$$

Следовательно, S есть проекция на H_α. Далее,

$$\|x - S\|^2 = (x, x - S) - (S, x - S) = \|x\|^2 - (x, S) = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2. \tag{3.14}$$

Тем самым для $\alpha = n \in \mathbb{Z}_+$ теорема установлена.

Пусть теперь $\alpha = +\infty$. В силу (3.14) при каждом натуральном n будет

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{3.15}$$

Устремляя n к $+\infty$, получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2 . \tag{3.16}$$

Таким образом, для любого x ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$ сходится. Обозначая частичные суммы ряда (3.12) через S_n, будем иметь

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Отсюда и из полноты H вытекает сходимость ряда Фурье (3.15). Ясно, что $S \in H_\alpha$ и $x - S_n \perp x_k$ при $k \leqslant n$. Пользуясь свойствами b) и c) из пункта 2, получаем отсюда $x - S \perp H_\alpha$, т. е. S — проекция x на H_α. В силу (3.14)

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 .$$

Осталось устремить n к ∞ и воспользоваться непрерывностью нормы. ◀

Замечание 3.3. Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ — ортонормированная система в H, $x \in H$. Тогда (см. (3.15), (3.16)) справедливо неравенство Ф. Бесселя

$$\sum_{k=0}^{\alpha} |a_k(x)|^2 \leqslant \|x\|^2 . \tag{3.17}$$

Если для некоторого $x \in H$ в (3.17) реализуется знак равенства, то говорят, что для x выполнено уравнение замкнутости. Система $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ называется замкнутой, если уравнение замкнутости выполняется для любого $x \in H$. Из (3.13) следует, что уравнение замкнутости для x выполняется тогда и только тогда, когда

$$x = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k(x) x_k.$$

Следствие 3.2. *В гильбертовом пространстве H свойства полноты и замкнутости ортонормированной системы $T = \{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ эквивалентны.*

► Если система T полна, то $H_\alpha = \overline{\mathcal{L}(T)} = H$ и проекция любого $x \in H$ на H_α совпадает с ним самим, и поэтому, в силу (3.13), система T замкнута. Обратно, если T замкнута, то опять-таки в силу (3.13), для всякого $x \in H$ имеем

$$x = \sum_{k=0}^{\alpha} a_n(x) x_k \in \overline{\mathcal{L}(T)},$$

т. е. $\overline{\mathcal{L}(T)} = H$. ◀

Замечание 3.4. Если уравнение замкнутости выполняется для элементов полного в H множества E, то система T замкнута.

► Действительно, из соотношения $E \subset \overline{\mathcal{L}(T)}$ вытекает $H = \overline{\mathcal{L}(E)} \subset \overline{\mathcal{L}(T)} \subset H$, т. е. $\overline{\mathcal{L}(T)} = H$. ◄

Теорема 3.4 (Ф. Рисс—Э. Фишер). *Пусть $\{x_k\}_{k=0}^{\alpha}$ — ортонормированная система в H, $\{c_k\}_{k=0}^{\alpha} \subset \mathbb{C}$, $\sum\limits_{k=0}^{\alpha} |c_k|^2 < \infty$. Тогда существует единственный элемент $x \in H$ такой, что $a_k(x) = c_k$ $(k = \overline{0,\alpha})$ и для x выполненно уравнение замкнутости.*

► Так же, как при доказательстве теоремы 3.3, убеждаемся в сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\alpha} c_k x_k$. Обозначим его сумму через x. Имеем

$$a_n = (x, x_n) = \lim_{m\to\alpha} \left(\sum_{k=0}^{m} c_k x_k, x_n \right) = c_n \ (n = \overline{0,\alpha}).$$

Выполнение уравнения замкнутости для x вытекает из (3.13). Единственность x также следует из (3.13), ибо элемент, для которого выполнено условие замкнутости — сумма своего ряда Фурье. ◄

§4. Непрерывные операторы и функционалы

1

Пусть X и Y— метрические пространства, D — некоторое множество в X. Если каждой точке $x \in D$ по определенному правилу сопоставлена некоторая точка $y \in Y$, то говорят, что на множестве D задан оператор со значениями в пространстве Y. Если этот оператор обозначен U, то само соответствие между точками $x \in D$ и $y \in Y$ записывается в виде $y = U(x)$. Множество D называется областью задания (или определения) оператора U. Символ x, обозначающий переменную точку множества D, называют аргументом оператора U.

Оператор, заданный на некотором множестве в метрическом пространстве, значения которого суть вещественные или комплексные числа, называется функционалом. В этом параграфе мы будем рассматривать только функционалы с вещественными значениями и в дальнейшем не будем оговаривать это каждый раз.

Определение 4.1. Оператор U, отображающий множество $D \subset X$ в пространство Y, называется непрерывным в точке $x_0 \in D$, если для любой последовательности точек $x_n \in D$ такой, что $x_n \to x_0$, имеет место соотношение $U(x_n) \to U(x_0)$. Оператор называется просто непрерывным, если он непрерывен в каждой точке того множества, на котором он задан.

Мы дали определение непрерывности оператора в точке x_0 на языке последовательностей. Можно сформулировать его и в других терминах. Именно, оператор U непрерывен в точке $x_0 \in D$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in D$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) < \delta$, имеет место неравенство

$$\rho\left(U(x), U(x_0)\right) < \varepsilon.$$

Равносильность этого определения с первым, данным на языке последовательностей, устанавливается так же, как для функций одной переменной.

Приведенные определения, конечно, имеют смысл и для функционала как частного случая операторов.

2

Теорема 4.1 (Вейерштрасс). *Непрерывный функционал $f(x)$, заданный на компакте $D \subset X$, ограничен и среди его значений есть наибольшее и наименьшее.*

► Докажем, что функционал $f(x)$ ограничен снизу и имеет наименьшее значение. Аналогичными рассуждениями устанавливается существование наибольшего значения. Допустим, что $f(x)$ не ограничен снизу. Тогда для любого натурального n существует по крайней мере одна точка $x_n \in D$, в которой $f(x_n) < -n$. Отсюда следует, что $f(x_n) \to -\infty$. Множество D является компактом. Поэтому из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_l}\}$, сходящуюся к некоторому пределу $x_0 \in D$. По непрерывности функционала $f(x_{n_l}) \to f(x_0)$. Но, с другой стороны, $f(x_{n_l}) \to -\infty$, а так как $f(x_0)$ число, а не $-\infty$, то мы пришли к противоречию. Тем самым доказана ограниченность $f(x)$ снизу.

Теперь обозначим через m нижнюю грань множества значений $f(x)$ и докажем, что $f(x_0) = m$ в некоторой точке $x_0 \in D$. Это и будет означать, что m наименьшее значение $f(x)$. Так как при любом натуральном n число $m + \frac{1}{n}$ уже не является нижней гранью для $f(x)$, то для каждого n можно подобрать точку $x_n \in D$, в которой $f(x_n) < m + \frac{1}{n}$. Из последовательности $\{x_n\}$ выделяем подпоследовательность $x_{n_l} \to x_0$, где $x_0 \in D$. В неравенстве

$$m \leqslant f(x_{n_l}) < m + \frac{1}{n_l}$$

переходим к пределу и получаем, что $\lim\limits_{l \to \infty} f(x_{n_l}) = m$. Но тогда, вследствие непрерывности функционала, $f(x_0) = m$. ◄

ЛЕКЦИЯ 17

3

Определение 4.2. Говорят, что функционал $f(x)$ равномерно непрерывен на множестве G метрического пространства X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых x и $x' \in G$ и таких, что $\rho(x, x') < \delta$, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Теорема 4.2 (Кантор)**.** *Функционал $f(x)$ непрерывный на компакте метрического пространства равномерно непрерывен на этом компакте.*

▶ Пусть f непрерывен на компакте M, но не равномерно непрерывен на нем. Это значит, что существует $\varepsilon > 0$, такое, что для любого n найдутся точки x_n и x'_n принадлежащие M, такие, что $\rho(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$, но

$$|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon. \tag{4.1}$$

Так как M — компакт, то из последовательности $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_l}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in M$. Используя неравенство треугольника, получаем

$$0 \leqslant \rho(x'_{n_l}, x_0) \leqslant \rho(x'_{n_l}, x_{n_l}) + \rho(x_{n_l}, x_0) < \frac{1}{n_l} + \rho(x_{n_l}, x_0) \underset{l\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{l\to\infty} x'_{n_l} = x_0$. Поэтому

$$\lim_{l\to\infty} f(x_{n_l}) = \lim_{l\to\infty} f(x'_{n_l}) = f(x_0).$$

Теперь, полагая в (4.1) $n = n_l$, получим

$$|f(x_{n_l}) - f(x'_{n_l})| > \varepsilon. \tag{4.2}$$

Переходя в (4.2) к пределу, имеем

$$|f(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon > 0.$$

Полученное противоречие указывает, что f должна быть равномерно непрерывна на M. ◀

4

Пусть U — оператор, отображающий метрическое пространство X или некоторое его подмножество в то же пространство, то точки $x \in X$, для которых $U(x) = x$, называются неподвижными точками оператора U.

Для нахождения неподвижных точек часто применяют метод последовательных приближений. Мы сначала изложим общую схему этого метода, а затем укажем некоторые условия, обеспечивающие его применимость.

Будем предпологать, что оператор U задан на некотором замкнутом подмножестве D пространства X, непрерывен и что все его значения принадлежат D. Возьмем произвольную точку $x_0 \in D$ и положим $x_1 = U(x_0)$. Если бы точка x_0 была неподвижной, то мы получили бы $x_1 = x_0$, но при произвольном выборе x_0 как правило будет $x_1 \neq x_0$. Далее, последовательно полагаем $x_2 = U(x_1)$, $x_3 = U(x_2), \ldots$ и, в общем виде,

$$x_{n+1} = U(x_n). \tag{4.3}$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, строим последовательность точек $x_n \in D$. Если окажется, что существует $x^* = \lim x_n$ (в этом случае говорят, что процесс сходится), то вследствие замкнутости D будет $x^* \in D$. Переходя к пределу в (4.3) и пользуясь непрерывностью оператора U, получим $x^* = U(x^*)$, т. е., что x^* — неподвижная точка.

Оператор U, заданный в метрическом пространстве X или в некотором его подмножестве, называется оператором сжатия, если существует такая положительная постоянная $\alpha < 1$, что для любых x', x'' из области определения оператора U

$$\rho(U(x'), U(x'')) \leqslant \alpha\rho(x', x''). \tag{4.4}$$

Легко видеть, что оператор сжатия U всегда непрерывен. Действительно, если x_n и x_0 взяты из области задания оператора U и $x_n \to x_0$, то из неравенства

$$\rho\left(U(x_n), U(x_0)\right) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_0)$$

следует, что и $U(x_n) \to U(x_0)$.

Теорема 4.3 (С. Банах)**.** *Если оператор сжатия U отображает полное метрическое пространство X в самого себя, то он имеет единственную неподвижную точку и эта точка может быть получена методом последовательных приближений при любой начальной точке $x_0 \in X$.*

► Берем произвольно $x_0 \in X$. Из формулы (4.3) и условия сжатия (4.4) получаем при любом n

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho\Big(U(x_n), U(x_{n-1})\Big) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}).$$

В свою очередь $\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_{n-2})$ и т. д. Повторяя такую оценку n раз, находим

$$\rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha\rho(x_n, x_{n-1}) \leqslant \alpha^2\rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \ldots \leqslant \alpha^n\rho(x_1, x_0).$$

Теперь покажем, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная. Пусть $m > n$, тогда

$$\begin{gathered}\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leqslant \\ \leqslant \left(\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \ldots + \alpha^n\right)\rho(x_1, x_0) \leqslant \left(\sum_{l=n}^{\infty} \alpha^l\right)\rho(x_1, x_0) = \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0).\end{gathered} \tag{4.5}$$

Отсюда видно, что $\rho(x_m, x_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Так как пространство X полно, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к пределу x^*, который, как отмечалось ранее, и является неподвижной точкой.

Единственность неподвижной точки вытекает из условия сжатия: если x' и x'' — неподвижные точки, то

$$\rho(x', x'') = \rho(U(x'), U(x'')) \leqslant \alpha\rho(x', x''),$$

откуда $\rho(x', x'') = 0$, т. е. $x' = x''$. ◄

Замечание 4.1. Если в неравенстве (4.5) перейти к пределу при $m \to \infty$, то получим

$$\rho(x^*, x_n) \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1, x_0).$$

Это и есть оценка погрешности, получающейся при замене x^* на x_n.

Замечание 4.2. Так как подпространство F полного метрического пространства само является полным метрическим пространством, то теорема Банаха верна и для оператора сжатия, заданного не на всем X, а только на его подпространстве F, если множество значений оператора также содержится в F. При этом за начальную точку процесса последовательного приближения может взять любую точку $x_0 \in F$.

§5. Пространство $\mathbb{R}^n$

1

Элементами пространства $\mathbb{R}^n$ являются упорядоченные совокупности n вещественных чисел.

Если $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $x = y$, тогда и только тогда, когда $x_i = y_i$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$,

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \tag{5.1}$$

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n). \tag{5.2}$$

Скалярное произведение (x, y) определяется равенством $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$, норма $\|x\| = |x| = \sqrt{(x, x)}$, $\rho(x, y) = |x - y|$.

Лемма 5.1. *Для того чтобы последовательность $\left\{x^{(m)}\right\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, где $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$ сходилась к пределу $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = a_i, \ (i = \overline{1, n}).$$

► Пусть $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = a$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^{(m)}, a) = 0$. Поэтому при любом $i = 1, 2, \dots, n$

$$0 \leqslant \left|x_i^{(m)} - a_i\right| \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - a_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}} = \rho(x^{(m)}, a) \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Наоборот, если при любом $i = \overline{1, n}$ выполнено $\lim\limits_{m\to\infty} x_i^{(m)} = a_i$, то

$$\rho(x^{(m)}, a) = \left\{\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(m)} - a_j)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

◄

Теорема 5.1. *Пространство $\mathbb{R}^n$ — полное.*

► Пусть $\left\{x^{(k)}\right\}$ — фундаментальная последовательность точек в $\mathbb{R}^n$. Если $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, то числовые последовательности $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ будут фундаментальными при $i = \overline{1,n}$. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε такое, что при любых $k, m \geqslant N_\varepsilon$ выполнено неравенство $\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon$. Но

$$|x_i^{(k)} - x_i^{(m)}| \leqslant \rho(x^{(k)}, x^{(m)}) < \varepsilon, \;\; (i = \overline{1,n}).$$

Числовая последовательность $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ в силу критерия Коши будет сходящейся при $i = \overline{1,n}$. В силу леммы 5.1 сходится и последовательность точек $\left\{x^{(k)}\right\}$ в $\mathbb{R}^n$. ◄

Следствие 5.1. *Пространство $\mathbb{R}^n$ — гильбертово (вещественное).*

Теорема 5.2. *Из любой ограниченной последовательности пространства $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек.*

► Ограничимся случаем $\mathbb{R}^2$. В общем случае доказательство аналогично. Пусть $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ — произвольная ограниченная последовательность точек пространства $\mathbb{R}^2$. Числовая последовательность $\left\{x_1^{(k)}\right\}$ ограничена. В силу теоремы Больцано—Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_1^{(k_m)}\right\}$. Тогда у последовательности точек $\left\{x^{(k_m)}\right\}$ последовательность первых координат сходится, а последовательность вторых координат ограничена. Применим теорему Больцано—Вейерштрасса и выделим из ограниченной числовой последовательности $\left\{x_2^{(k_m)}\right\}$ сходящуюся подпоследовательность $\left\{x_2^{(k_{m_l})}\right\}$. У последовательности точек $\left\{x^{(k_{m_l})}\right\}$ сходится и последовательность первых координат и последовательность вторых координат. В силу леммы 5.1 последовательность точек $\left\{x^{(k_{m_l})}\right\}$ сходится в $\mathbb{R}^2$. ◄

Следствие 5.2. *Ограниченное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ компактно.*

Следствие 5.3. *Ограниченное замкнутое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является компактом.*

2

Последовательность точек $x^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, $m = \overline{1,\infty}$ называется стремящейся к ∞, если расстояние её членов от начала координат $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ стремится к бесконечности, т. е. если $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_m, \mathbf{0}) = +\infty$. В этом случае пишут

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty.$$

Определение 5.1. Множество точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых заданы как непрерывные функции $x_i = x_i(t)$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$, определенные на некотором отрезке $[a, b]$ называется непрерывной кривой в $\mathbb{R}^n$. Аргумент t называется параметром кривой. Точка $x(a) = (x_1(a), x_2(a), \dots, x_n(a))$ называется началом, а точка $x(b) = (x_1(b), x_2(b), \dots, x_n(b))$ — концом данной кривой.

Определение 5.2. Пусть $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$, а $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — некоторые фиксированные числа, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$. Множество точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координаты которых представимы в виде

$$x_i = x_i^{(0)} + \alpha_i t, \;\; i = \overline{1,n},$$

ЛЕКЦИЯ 18

3

Пусть заданы n пар вещественных чисел a_i и b_i $(i = \overline{1,n})$ так, что $a_i < b_i$ при каждом i. При этом мы допускаем, что некоторые из этих чисел могут быть несобственными, т. е. возможно, что $a_i = -\infty$ или $b_i = +\infty$ при некоторых i. Совокупность Δ_0 всех точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, координаты которых, удовлетворяют неравенствам

$$a_i < x_i < b_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

называется открытым (n-мерным) параллелепипедом. Совокупность Δ^* всех точек $x \in \mathbb{R}^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

называется замкнутым (n-мерным) параллелепипедом.

Из самого способа введения метрики в пространстве $\mathbb{R}^n$ сразу следует, что замкнутый (соответственно открытый) параллелепипед — замкнутое (соответственно открытое) множество. Ясно, что Δ_0 — совокупность всех внутренних точек из Δ^*, а $\Delta^* = \overline{\Delta_0}$, т. е. Δ^* — замыкание открытого параллелепипеда Δ_0. Можно сказать, что Δ^* получается из Δ_0 присоединением к нему всех его граничных точек. Всякое множество Δ, получающееся из Δ_0 присоединением к нему некоторой части множества его граничных точек, тоже называется n-мерным параллелепипедом. Таким образом, параллелепипед Δ — это любое множество, удовлетворяющее условию $\Delta_0 \subset \Delta \subset \Delta^*$. Ясно, что совокупность внутренних точек параллелепипеда Δ тоже совпадает с Δ_0. Если $-\infty < a_i < b_i < +\infty$ при всех i, то будем говорить, что Δ — параллелепипед с конечными ребрами. Если же хоть одна из величин a_i или b_i равна бесконечности, то будем говорить, что параллелепипед Δ имеет бесконечное ребро.

Для произвольного параллелепипеда Δ введем обозначение

$$\Delta =< a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n >$$

(или, коротко, $\Delta =< a, b >$). Если параллелепипед Δ — открытый, то будем также писать

$$\Delta = (a_1, b_1; a_2, b_2; \dots, a_n b_n)$$

(или, коротко, $\Delta = (a, b)$). Если параллелепипед Δ — замкнутый, то пишем

$$\Delta = [a_1, b_1; a_2, b_2; \dots, a_n, b_n]$$

(или, коротко, $\Delta = [a, b]$).

Будем говорить, как обычно, что два параллелепипеда дизъюнктны или не пересекаются, если у них нет ни одной общей точки, и что они не налегают друг на друга, если у них нет общих внутренних точек. Обобщая формулу для объема параллелепипеда в трехмерном пространстве, называем объемом параллелепипеда

$$\Delta =< a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n >$$

произведение $v\Delta = \prod\limits_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$. Это произведение считается равным $+\infty$, если у параллелепипеда есть бесконечное ребро.

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\delta_i > 0$ $(i = \overline{1,n})$. Точка x называется центром n-мерного параллелепипеда.

$$P(x; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) : \ x_i - \delta_i < y_i < x_i + \delta_i, \ i = \overline{1,n} \right\}.$$

Если $\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_n = \delta$, то $P(x; \delta, \delta, \ldots, \delta)$ называется n-мерным кубом с центром в точке x и обозначается $P(x; \delta)$. Всякий n-мерный параллелепипед $P(x; \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ называется прямоугольной окрестностью. Легко доказывается следующая лемма.

Лемма 5.2. *Какова бы ни была ε-окрестность $S(x, \varepsilon)$ точки $x \in \mathbb{R}^n$, существует её прямоугольная окрестность $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ такая, что $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n) \subset S(x, \varepsilon)$, и наоборот, какова бы ни была прямоугольная окрестность $P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$ точки $x \in \mathbb{R}^n$, существует её ε-окрестность $S(x, \varepsilon) \subset P(x; \delta_1, \ldots, \delta_n)$.*

4

Параллелепипед $\Delta = \langle a, b \rangle$ называется n-мерной ячейкой, если он состоит из всех точек x, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$a_i \leqslant x_i < b_i \quad (i = \overline{1,n}).$$

Для ячеек вводим и такое обозначение

$$[a_1 b_1; a_2 b_2; \ldots; a_n b_n)$$

(или, коротко, $\Delta = [a, b)$). Можно сказать, что ячейка — это параллелепипед «замкнутый слева» и «открытый справа». Включим в число ячеек и пустое множество. Объем пустой ячейки будем считать равным 0.

Теорема 5.3. *Всякое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$ представимо в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных n-мерных ячеек с конечными ребрами.*

► Для каждого натурального m образуем разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ на ячейки $[a, b)$, где каждое из a_i может иметь любое значение вида $\frac{k}{2^m}$, причем $k \in \mathbb{Z}$, а $b_i = a_i + \frac{1}{2^m}$. Эти ячейки назовем ячейками m-го ранга. Ясно, что ячейки одного ранга дизъюнктны, а каждая ячейка $(m+1)$-го ранга целиком содержится в одной из ячеек m-го ранга (точнее, ячейки $(m+1)$-го ранга получаются в результате разбиения каждой из ячеек m-го ранга на 2^n частей).

Пусть дано открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$. Будем считать, что $G \neq \varnothing$; в противном случае само G — ячейка. Из совокупности ячеек 1-го ранга выберем все те, которые целиком содержатся в G; множество этих ячеек обозначим Σ_1 (это множество может оказаться и пустым). Далее из совокупности ячеек 2-го ранга выберем все те, которые целиком входят в G, но не содержатся ни в одной из ячеек, включенных в Σ_1 (а следовательно, и не пересекаются с ними). Множество этих ячеек 2-го ранга обозначим Σ_2. Этот процесс продолжаем до бесконечности. В множество Σ_m включаем все ячейки m-го ранга, которые целиком входят в G, но не содержатся ни в одной из ячеек, включенных в множества $\Sigma_1, \ \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{m-1}$. Пусть H — множество точек из $\mathbb{R}^n$, представляющее объединение всех ячеек, входящих в $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \Sigma_m$. Так как всех ячеек любого ранга — счетное множество, то и каждое из множеств Σ_m не более чем счетно, а потому и множество H — объединение не более чем счетного множества ячеек.

При этом, по самому построению, ячейки, из которых мы образовали множество H, дизъюнктны.

Докажем, что $G = H$. Включение $H \subset G$ очевидно по построению, остается проверить обратное включение. Пусть $x_0 \in G$. Тогда и некоторый открытый шар $S(x_0, \varepsilon) \subset G$. Если взять m так, что $\dfrac{\sqrt{n}}{2^m} < \varepsilon$, то легко сосчитать, что та ячейка m-го ранга, которая содержит точку x_0, сама целиком содержится в $S(x_0, \varepsilon)$, а следовательно, и в G. Из всех m, обладающих тем свойством, что ячейка m-го ранга, содержащая x_0, целиком содержится в G (мы уже установили, что такие m существуют) выберем наименьшее, пусть это будет $m = m_0$. Через Δ_0 обозначим ячейку m_0 ранга, которая содержит x_0. Тогда ячейки m-го ранга, при $m < m_0$, содержащие Δ_0, не могут целиком входить в G и потому не включаются в $\sum_m$. Следовательно, по построению $\Delta_0 \in \Sigma_{m_0}$, а потому $\Delta_0 \subset H$ и $x_0 \in H$. Тем самым включение $G \subset H$, а вместе с ним и равенство $G = H$, доказаны. ◄

5

Определение 5.4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Совокупность $\mathfrak{M}$ множеств $G_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ называется покрытием множества A, если любая точка $x \in A$ входит по крайней мере в одно из $G_\alpha \in \mathfrak{M}$. Если, кроме того, все множества G_α открыты, то покрытие $\mathfrak{M}$ называется открытым.

Теорема 5.4 (Борель—Лебег)**.** *Из всякого открытого покрытия $\mathfrak{M}$ ограниченного замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^n$ можно выделить конечное покрытие, т. е. конечное число множеств $G_\alpha \in \mathfrak{M}$ также образующих покрытие множества F.*

► С целью упрощения записи будем вести рассуждения для случая $n = 2$. Допустим, что из $\mathfrak{M}$ нельзя выделить конечного покрытия множества F. Поскольку F ограничено, оно содержится в некотором замкнутом прямоугольнике $\Delta = [a, b; c, d]$. Делим этот прямоугольник на четыре равные части прямыми, параллельными координатным осям. Тогда по крайней мере один из полученных замкнутых прямоугольников (обозначим его Δ_1) содержит такую часть множества F, для которой из $\mathfrak{M}$ нельзя выделить конечного покрытия. Пусть этот прямоугольник $\Delta_1 = [a_1, b_1; c_1, d_1]$. Тогда

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}, \quad d_1 - c_1 = \frac{d-c}{2}.$$

Прямоугольник Δ_1 снова делим на четыре равных прямоугольника и из них выбираем такой (обозначим его Δ_2), который содержит часть множества F, не допускающую конечного покрытия из совокупности $\mathfrak{M}$. Этот процесс продолжается до бесконечности. В результате получим последовательность прямоугольников $\Delta_m = [a_m, b_m; c_m, d_m]$, где

$$b_m - a_m = \frac{b-a}{2^m}, \quad d_m - c_m = \frac{d-c}{2^m},$$

причем $\Delta_{m+1} \subset \Delta_m$ при всех m и каждый Δ_m содержит такую часть множества F, для которой из $\mathfrak{M}$ нельзя выделить конечного покрытия. Отсюда, в частности, следует, что каждый Δ_m содержит бесконечное множество точек из F. По теореме о вложенных отрезках, последовательность отрезков $\{[a_m, b_m]\}$ стягивается к общей точке $\gamma_1^{(0)}$, а $\{[c_m, d_m]\}$ — к общей точке $\gamma_2^{(0)}$. Тогда точка $x_0 = (\gamma_1^{(0)}, \gamma_2^{(0)})$ из $\mathbb{R}^2$ входит в Δ_m при всех m.

Докажем, что x_0 — предельная точка множества F. Пусть S — ε-окрестность точки x_0, где $\varepsilon > 0$ задано произвольно. Найдем такое m, что

$$b_m - a_m < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad b_m - c < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Тогда диагональ прямоугольника Δ_m будет меньше ε и потому $\Delta_m \subset S$. Следовательно, окрестность S вместе с Δ_m содержит бесконечное множество точек из F, откуда благодаря произвольности ε и вытекает, что x_0 — предельная точка множества F.

Поскольку F замкнуто, $x_0 \in F$. Следовательно, $x_0 \in G_\alpha$ при некотором α ($G_\alpha \in \mathfrak{M}$). Но тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $S(x_0, \varepsilon) \subset G_\alpha$. Если теперь подобрать m так, что $\Delta_m \subset S(x_0, \varepsilon)$, то получится, что весь прямоугольник Δ_m, а вместе с ним и та часть множества F, которая содержится в Δ_m, покрывается одним из G_α. Получено противоречие с тем, что положено в основу построения прямоугольников Δ_m. ◄

§6. Предел и непрерывность функций многих переменных

1

Будем рассматривать функции, определенные на множествах $\mathbb{R}^n$, значениями которых являются вещественне числа. Эти функции обозначаются одним символом, например, f или, указывая аргумент, $f(x)$ или $f(x_1, \ldots, x_n)$. При $n > 1$ эти функции называются функциями многих (или нескольких переменных). В случае $n = 2$ вместо $f(x_1, x_2)$ будем писать также $f(x, y)$, а в случае $n = 3$ вместо $f(x_1, x_2, x_3)$ будем писать $f(x, y, z)$.

Определение 6.1. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, пусть $E_0 \subset E$ и пусть $x^{(0)}$ — предельная точка множества E_0. Число a называется пределом функции f по множеству E_0 при x стремящимся к $x^{(0)}$, если для любой последовательности точек $x^{(m)} \in E_0$ ($m = \overline{1, \infty}$), $x^{(m)} \neq x^{(0)}$ такой, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)}$ числовая последовательность $\left\{f(x^{(m)})\right\}$ сходится к числу a :

$$\lim_{m\to\infty} f(x^m) = a.$$

В этом случае будем писать

$$\lim_{\substack{x\to x^{(0)}\\ x\in E_0}} f(x) = a.$$

При сделанных предположениях можно дать и другое, эквивалентное предыдущему, определение предела функции по аналогии с тем, как это было сделано для функции одной переменной.

Определение 6.2. Пусть функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, пусть $E_0 \subset E$ и пусть $x^{(0)}$ — предельная точка множества E_0. Число a называется пределом функции f по множеству E_0 при $x \to x^{(0)}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - a| < \varepsilon$ для любой точки $x \in S(x^{(0)}, \delta) \cap E_0,\ x \neq x^{(0)}$.

Иногда вместо «предел функции при x стремящемся к $x^{(0)}$» будем говорить: «предел функции в точке $x^{(0)}$». Запись $x \to x^{(0)}$ будем считать равносильной записи $\rho(x, x^{(0)}) \to 0$ и поэтому наряду с обозначением

$$\lim_{\substack{x\to x^{(0)}\\ x\in E_0}} f(x)$$

будем писать также

$$\lim_{\substack{\rho(x,x^{(0)})\to 0\\ x\in E_0}} f(x).$$

При определении предела функций многих переменных так же, как в случае одной переменной, удобно использовать понятие проколотой окрестности, т. е. окрестности точки, из которой удалена сама эта точка. Если $S\left(x^{(0)}\right)$ — окрестность точки $x^{(0)}$, то множество

$$\dot{S}\left(x^{(0)}\right) = S\left(x^{(0)}\right) \setminus \left\{x^{(0)}\right\}$$

называется проколотой окрестностью точки $x^{(0)}$.

Определение 6.3. Если функция f определена в некоторой проколотой окрестности $\dot{S}\left(x^{(0)}\right)$ точки $x^{(0)}$, то предел функции f в точке $x^{(0)}$ по этой проколотой окрестности называется просто пределом функции f в точке $x^{(0)}$ и обозначается через $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)$.

Если множество E_0 является прямой, проходящей через точку $x^{(0)}$ в некотором направлении, то в этом случае предел функции f по множеству E_0 при $x \to x^{(0)}$ называется пределом функции в данном направлении в точке $x^{(0)}$.

Если множество E_0 является множеством точек некоторой кривой, проходящей через точку $x^{(0)}$, то в этом случае предел функции f по множеству E_0 при $x \to x^{(0)}$ называется пределом функции по данной кривой в точке $x^{(0)}$.

Очевидно, что если у функции f существует предел в точке $x^{(0)}$, то он существует в этой точке и по любому направлению и по любой кривой, причем все эти пределы совпадают с указанным пределом функции.

ЛЕКЦИЯ 19

Пример 6.1. Пусть
$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}.$$
Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат $(0,0)$. Исследуем предел этой функции по различным направлениям в точке $(0,0)$. Уравнение прямой, проходящей через начало координат $(0,0)$ в направлении (α,β), имеет вид $x=\alpha t,\ y=\beta t,\ \alpha^2+\beta^2>0$. Ясно, что
$$f(\alpha t,\beta t)=\frac{\alpha^2\beta t}{\alpha^4t^2+\beta^2}\underset{t\to 0}{\to}0,$$
т. е. предел по любому направлению существует и равен нулю. Если же $y=x^2$, то $f(x,x^2)=\frac{1}{2}$ и, значит, предел вдоль параболы $y=x^2$ также существует, но равен $\frac{1}{2}$.

Таким образом, для рассмотренной функции существует один и тот же предел по любому направлению, а предел по указанной параболе, хотя и существует, отличен от общего значения пределов по направлениям, тем самым просто предел в точке $(0,0)$ не существует.

Аналогично случаю функций одного переменного для пределов функций многих переменных по множеству имеют место соответсвующие теоремы о пределах суммы, произведения и частного, так как в силу приведенного выше определения предел функции n переменных по множеству также сводится к понятию предела последовательности.

Наряду с указанными пределами у функций многих переменных можно рассматривать пределы других видов, связанные с последовательным переходом к пределу, например, по различным координатам, т. е. пределы вида
$$\lim_{x_{i_1}\to x_{i_1}^{(0)}}\lim_{x_{i_2}\to x_{i_2}^{(0)}}\ldots\lim_{x_{i_n}\to x_{i_n}^{(0)}}f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$
где $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ — некоторая перестановка чисел $1,2,\ldots n$, $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$, а функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки $x^{(0)}$. Пределы указанного вида называются повторными пределами.

Из существования предела функции в данной точке не следует существование повторных пределов в данной точке, и наоборот, из существования повторных пределов не следует существование предела в соответствующей точке.

Как и для случая функций одной переменной, для функций f многих переменных можно определить $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, т. е. предел, когда точка $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ неограниченно удаляется от начала координат, иначе говоря, когда $\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\to+\infty$, а также предел по одной из переменных x_i при условии $x_i\to\infty$ и повторный предел по переменным $x_i\to\infty$ и $x_j\to\infty$ $(i,j=\overline{1,n})$.

Можно ввести понятие и бесконечных пределов.

2

Определение 6.4. Функция f, определенная на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, называется непрерывной в точке $x^{(0)} \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta_\varepsilon > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x^{(0)}) < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| f(x) - f\left(x^{(0)}\right) \right| < \varepsilon.$$

Определение непрерывности (в отличие от сформулированного выше определения предела) не предполагает того, что точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E. Точка $x^{(0)}$ может быть и изолированной, при этом в изолированной точке множества E функция f всегда непрерывна.

Если же точка $x^{(0)}$ является предельной для множества E, то данное определение непрерывности функции f в точке $x^{(0)}$ эквивалентно условию

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in E}} f(x) = f\left(x^{(0)}\right). \tag{6.1}$$

Если в равенстве (6.1) перенести $f(x_0)$ в левую часть и обозначить

$$\Delta y = f(x) - f\left(x^{(0)}\right),$$

то условие (6.1) перепишется в виде

$$\lim_{\substack{\rho(x, x^{(0)}) \to 0 \\ x \in E}} \Delta y = 0. \tag{6.2}$$

Число Δy называется приращением функции в точке $x^{(0)}$, соответствующим изменению аргумента от точки $x^{(0)}$ до x.

Лемма 6.1. *Если функция f определена на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывна в точке $x^{(0)} \in E$, причем $f(x^{(0)}) \neq 0$, то существует окрестность $S\left(x^{(0)}\right)$ точки $x^{(0)}$ такая, что* $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f\left(x^{(0)}\right)$ *для всех $x \in S(x^{(0)}) \cap E$.*

► Пусть $\varepsilon = \left| f(x^{(0)}) \right|$. Тогда в силу непрерывности существует такое $\delta > 0$, что $\left| f(x) - f(x^{(0)}) \right| < \left| f(x^{(0)}) \right|$ для всех $x \in S(x^{(0)}, \delta) \cap E$, т. е.

$$f(x^{(0)}) - \left| f(x^{(0)}) \right| < f(x) < f(x^{(0)}) + \left| f(x^{(0)}) \right|.$$

Если $f(x^{(0)}) > 0$, то $f(x^0) - \left| f(x^{(0)}) \right| = 0$ и потому $f(x) > 0$, если же $f(x^{(0)}) < 0$, то $f(x^{(0)}) + \left| f(x^{(0)}) \right| = 0$ и потому $f(x) < 0$ при $x \in S(x^{(0)}, \delta) \cap E$. ◄

Совершенно аналогично случаю $n = 1$ доказывается, что если функции f и g непрерывны в точке $x^{(0)} \in E$, то функции $f + g$, cf (c — постоянная), fg, а если $g(x^{(0)}) \neq 0$, то и $\dfrac{f}{g}$ также непрерывны в точке $x^{(0)}$.

Пусть на некотором множестве $E_t \subset \mathbb{R}^k$ задана система функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \in E_t$ и пусть на некотором множестве $E_x \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_x$. Если $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in E_x$ для любой точки $t \in E_t$, то имеет смысл говорить о сложной функции $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, т. е. функции, ставящей в соответствие каждой точке $t \in E_t$, число $f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$. Функция $f(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, называется также суперпозицией функций f и $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Теорема 6.1 (непрерывность суперпозиции). *Пусть имеет смысл сложная функция $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Если функции $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ непрерывны в точке $t^{(0)} \in E_t \subset \mathbb{R}^k$, а функция f непрерывна в точке $x^{(0)} = \big(\varphi_1(t^{(0)}), \dots, \varphi_n(t^{(0)})\big) \in E_x \subset \mathbb{R}^n$, то сложная функция $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ непрерывна в точке $t^{(0)}$.*

► В силу непрерывности функции f в точке $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\big|f(x) - f(x^{(0)})\big| < \varepsilon \tag{6.3}$$

для всех точек $x \in P(x^{(0)}, \eta) \subset E_x$, т. е для всех точек $x = (x_1, \dots, x_n) \in E_x$, для которых

$$\left|x_i - x_i^{(0)}\right| < \eta \quad (i = \overline{1, n}). \tag{6.4}$$

В силу же непрерывности каждой из функций φ_i в точке $t^{(0)}$ для указанного $\eta > 0$ существуют $\delta_i = \delta_i(\eta) > 0$ такие, что

$$\big|\varphi_i(t) - \varphi_i(t^{(0)})\big| < \eta \tag{6.5}$$

для всех $t \in E_t \cap S(t^{(0)}, \delta_i)$. Обозначим через δ наименьшее δ_i $(i = \overline{1, n})$. Тогда для всех $t \in E_t \cap S(t^{(0)}, \delta_i)$ и всех $i = \overline{1, n}$ выполняется неравенство (6.5), т. е неравенство (6.4), где $x_i = \varphi_i(t)$, $x_i^{(0)} = \varphi_i(t^{(0)})$ $(i = \overline{1, n})$. Поэтому для всех $t \in E_t \cap S(t^{(0)}, \delta)$ выполняется соотношение

$$\big|f(x) - f(x^{(0)})\big| < \varepsilon,$$

где $x = (\varphi_i(t))$, $x^{(0)} = (\varphi_i(t^{(0)}))$, что и означает непрерывность сложной функции $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, в точке $t^{(0)}$. ◄

С помощью теоремы 6.1 можно легко установить непрерывность функций, большей частью встречающихся на практике, а именно так называемых элементарных функций многих переменных.

Определение 6.5. Функции, получающиеся из переменных $x_1, \dots, x_n$ с помощью конечного числа суперпозиций элементарных функций одного переменного, операций сложения, операций умножения и деления, называются элементарными функциями переменных $x_1, \dots, x_n$.

Из теоремы 6.1 следует, что всякая элементарная функция многих переменных непрерывна в каждой точке области своего определения.

3

Функция f называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке E.

Теорема 6.2. *Если функция f определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то она ограничена и достигает своих верхней и нижней граней.*

Теорема 6.3. *Если функция f определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, то она равномерно непрерывна на E.*

Для доказательства теорем 6.2 и 6.3 достаточно принять во внимание, что ограниченное замкнутое множество является компактом в $\mathbb{R}^n$ и воспользоваться теоремами 4.1 и 4.2.

Теорема 6.4 (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Пусть функция f непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и принимает значения A и B. Тогда функция f принимает в области G все значения, заключенные между A и B.*

► Пусть функция f непрерывна в области $G \subset \mathbb{R}^n$ и $x^{(1)} \in G$, $x^{(2)} \in G$ таковы, что $f(x^{(1)}) = A$, $f(x^{(2)}) = B$ и, например, $A < B$. Пусть далее C — какое-либо число такое, что $A < C < B$. Согласно определению области существует такая непрерывная кривая $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и $x(t) \in G$ при всех $t \in [a, b]$. Если $x(t) = (x_i(t))$, то функции $x_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Согласно теореме 6.1 функция $f(x(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ также непрерывна на отрезке $[a, b]$. Так как $f(x(a)) = A$, $f(x(b)) = B$ и $A < C < B$, то согласно теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке, существует точка $t_0 \in (a, b)$ такая, что $f(x(t_0)) = C$. Полагая $x^{(0)} = x(t_0)$, имеем $x^{(0)} \in G$ и $f(x^{(0)}) = C$. ◄

ГЛАВА 14. Ряды в банаховых пространствах

В этой главе X обозначает полное нормированное (т. е. банахово) пространство, θ — его нулевой элемент. Норма элемента x в X обозначается $\|x\|$.

§1. Абсолютно сходящиеся ряды

Как уже отмечалось в §2 главы 6, в нормированном пространстве можно рассмотреть ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \quad (x_k \in X). \tag{1.1}$$

Ряд (1.1) называется абсолютно (нормально) сходящимся, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| . \tag{1.2}$$

В пространстве Банаха из сходимости ряда (1.2) вытекает сходимость ряда (1.1), причем справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| . \tag{1.3}$$

Рассмотрим ряд (1.1). Пусть $\{n_k\}$ — последовательность натуральных чисел, в которой каждое натуральное число встречается один и только один раз, т. е. $\{n_k\}$ — перестановка натурального ряда. Положим $v_k = x_{n_k}$ и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k. \tag{1.4}$$

Говорят, что ряд (1.4) получен из (1.1) в результате перестановки его членов, если он составлен из тех же членов, что и (1.1), но записанных в другом порядке.

Теорема 1.1. *Если ряд (1.1) сходится абсолютно, то любой ряд, полученный перестановкой его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.*

► Пусть ряд (1.1) абсолютно сходится, т. е. сходится ряд (1.2) и пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\| = \widetilde{S}$. Обозначим частичные суммы ряда (1.2) через $\widetilde{S}_n$. Тогда $\widetilde{S}_n \leqslant \widetilde{S}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Далее, какова бы ни была частичная сумма $\widetilde{S}^*_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \|v_k\|$ ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| \,, \tag{1.5}$$

найдется номер $n = n(m)$ такой, что все члены ряда (1.5), входящие в сумму $\widetilde{S}^*_m$ (таких членов конечное число), имеют в ряде (1.2) номера не превышающими n, а потому $\widetilde{S}^*_m \leqslant \widetilde{S}_{n(m)}$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\widetilde{S}^*_m \leqslant \widetilde{S}$, откуда следует сходимость ряда (1.5), т. е. абсолютная сходимость ряда (1.4). Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = S$. Покажем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = S$. Обозначим частичные суммы ряда (1.1) через S_n. Пусть фиксировано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу сходимости ряда (1.2) существует такое $n = n_\varepsilon$, что

$$\sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \|x_k\| = \widetilde{S} - \widetilde{S}_{n_\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Следовательно, выполнено неравенство

$$\|S - S_{n_\varepsilon}\| = \left\| \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \|x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.7}$$

Выберем, далее, номер m_ε так, чтобы частичная сумма $S^*_{m_\varepsilon}$ ряда (1.4) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (1.1), входящие в S_{n_ε}, иначе говоря, m_ε таков, что все члены ряда (1.1) с номерами не превышающие n_ε, имеют в ряде (1.4) номера не превышающие m_ε. Пусть $m \geqslant m_\varepsilon$. Положим $S^{**}_m = S^*_m - S_{n_\varepsilon}$. Так как $\|S^{**}_m\|$ не превышает суммы норм слагаемых, входящих в S^{**}_m, и номера этих слагаемых больше n_ε, то все они содержатся в $\sum\limits_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \|x_k\|$. Поэтому в силу (1.6)

$$\|S^{**}_m\| \leqslant \sum_{k=n_\varepsilon+1}^{\infty} \|x_k\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) получаем, что при $m \geqslant m_\varepsilon$

$$\|S - S^*_m\| = \|S - (S^{**}_m + S_{n_\varepsilon})\| \leqslant \|S - S_{n_\varepsilon}\| + \|S^{**}_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k = S$. ◄

ЛЕКЦИЯ 20

Теорема 1.2. *Если ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ $(x_k, y_k \in X, k \in \mathbb{N})$ *абсолютно сходятся,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x_k + \beta y_k)$$

также абсолютно сходится.

► Это следует из критерия Коши сходимости числовых рядов и неравенства

$$\sum_{k=n}^{n+p} \|\alpha x_k + \beta y_k\| \leqslant |\alpha| \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| + |\beta| \sum_{k=n}^{n+p} \|y_k\| .$$

◄

§2. Умножение рядов

Пусть даны два сходящихся ряда

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \in \mathbb{R}), \tag{A}$$

$$B = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \quad (x_m \in X). \tag{B}$$

Подражая правилу умножения конечных сумм, рассмотрим и здесь всевозможные парные произведения членов этих рядов $a_i x_k$. Из них составится бесконечная прямоугольная матрица

$$\begin{array}{cccccc} a_1x_1 & a_2x_1 & a_3x_1 & \dots & a_ix_1 & \dots \\ a_1x_2 & a_2x_2 & a_3x_2 & \dots & a_ix_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1x_k & a_2x_k & a_3x_k & \dots & a_ix_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \tag{2.1}$$

Эти произведения можно по разному располагать в виде последовательности. Например, можно выписывать эти произведения по диагоналям или по квадратам, что соответственно, приводит к последовательностям

$$a_1x_1;\ a_1x_2, a_1x_3;\ a_1x_3, a_2x_2, a_3x_1; \dots \tag{2.2}$$

или

$$a_1x_1;\ a_1x_2, a_2x_2, a_2x_1;\ a_1x_3, a_2x_3, a_3x_3, a_3x_2, a_3x_1; \dots \tag{2.3}$$

Составленный из подобной последовательности ряд называется произведением рядов (A) и (B).

Теорема 2.1 (Коши)**.** *Если оба ряда (A) и (B) сходятся абсолютно, то их произведение, составленное из произведений (2.1), взятых в любом порядке, также сходится абсолютно и имеет своей суммой* AB.

► По предположению ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{A*}$$

и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|x_m\| \tag{B*}$$

сходятся, т. е. имеют конечные суммы, скажем A^* и B^*. Расположив произведение (2.1) произвольным образом в виде последовательности, составим из них ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} x_{k_s} = a_{i_1} x_{k_1} + a_{i_2} x_{k_2} + \dots \tag{2.4}$$

Чтобы доказать сходимость соответствующего ряда из норм

$$\sum_{s=1}^{\infty} \|a_{i_s} x_{k_s}\|, \tag{2.5}$$

рассмотрим его s-ю частичную сумму. Если через γ обозначить наибольший из значков $i_1, k_1; i_2, k_2; \dots, i_s, k_s$, то очевидно

$$\|a_{i1}x_{k1}\| + \|a_{i2}x_{k2}\| + \dots + \|a_{is}x_{ks}\| \leqslant (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_\gamma|)(\|x_1\| + \|x_1\| + \dots + \|x_\gamma\|) \leqslant A^* B^*.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда (2.5), а следовательно, и абсолютная сходимость ряда (2.4).

Остается определить его сумму. Для определения суммы можно придать членам ряда (2.4) удобное для этого расположение, так как ряд абсолютно сходится и по теореме 2.1 его слагаемые можно переставлять. Разместив эти члены по квадратам, как в (2.3), мы можем объединить последовательные группы, которые отличают один квадрат от другого

$$a_1x_1 + (a_1x_2 + a_2x_2 + a_2x_1) + (a_1x_3 + a_2x_3 + a_3x_3 + a_3x_2 + a_3x_1) + \dots \tag{2.6}$$

Если через A_n и B_m обозначить частичные суммы рядов (A) и (B), то для ряда (2.6) частичные суммы будут

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ A_3B_3, \dots, A_kB_k, \dots \tag{2.7}$$

Они стремятся к произведению AB, которое, таким образом, является не только суммой ряда (2.6), но и ряда (2.4). ◄

При фактическом умножении рядов чаще всего представляется удобным размещать произведение (2.1) по диагоналям, как в (2.2), обычно члены, лежащие на одной диагонали, при этом объединяются

$$AB = a_1x_1 + (a_1x_2 + a_2x_1) + (a_1x_3 + a_2x_2 + a_3x_1) + \dots$$

Написанный ряд называется произведением рядов (A) и (B) в форме Коши.

Пример 2.1. При $x \in \mathbb{R},\ |x| < 1$ имеем

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Отсюда, умножая ряды по Коши, находим, что

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

§3. Теорема Римана

1

Рассмотрим сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (a_n \in \mathbb{R}). \tag{A}$$

Последовательность его частичных сумм

$$A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n \tag{3.1}$$

сходится к сумме ряда A. Станем объединять члены ряда произвольным образом в группы, не меняя их расположения

$$a_1 + \ldots + a_{n_1},\ a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2},\ \ldots, a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}, \ldots$$

Здесь $\{n_k\}$ есть некоторая строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Ряд, составленный из этих сумм

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots + (a_{n_{k-1}} + \ldots + a_{n_k}) + \ldots \tag{$\widetilde{\mathrm{A}}$}$$

сходится и имеет ту же сумму A, что и исходный ряд. Действительно, последовательность частичных сумм нового ряда

$$\widetilde{A}_1,\ \widetilde{A}_2,\ \ldots, \widetilde{A}_{n_k}, \ldots$$

является подпоследовательностью

$$A_{n_1},\ A_{n_2},\ \ldots, A_{n_k}, \ldots$$

для последовательности (3.1) и, следовательно, сходится к тому же пределу A.

Если дан сходящийся ряд ($\widetilde{\mathrm{A}}$), члены которого каждый в отдельности представляет собой сумму конечного числа слагаемых, то, опустив скобки, мы получим новый ряд (A), который может оказаться и расходящимся. Например, ряд

$$(1-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) \ldots$$

очевидно сходится, между тем как полученный из него опусканием скобок ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

будет расходящимся.

Конечно, если, опустив скобки, мы получаем сходящийся ряд (A), то его сумма та же, что у ряда ($\widetilde{\mathrm{A}}$).

Замечание 3.1. При некоторых условиях можно гарантировать, что ряд (A) сходится. Простейшим случаем этого рода является тот, когда все слагаемые в ($\widetilde{\mathrm{A}}$), внутри одних и тех же скобок будут одного знака (этот знак от одних скобок к другим может меняться).

Действительно, тогда при изменении n от n_{k-1} до n_k частичная сумма A_n будет изменяться монотонно, следовательно будет содержаться между $A_{n_{k-1}} = \widetilde{A}_{k-1}$ и $A_{n_k} = \widetilde{A}_k$. При достаточно больших k эти последние суммы сколь угодно мало отличаются от суммы $\widetilde{A}$ ряда ($\widetilde{\text{A}}$), следовательно, то же справедливо и относительно суммы A_n при достаточно большом n, так что $A_n \to \widetilde{A}$.

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{B}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \tag{C}$$

— ряды, составленные, соответственно, из положительных членов ряда (A) и из абсолютных величин его отрицательных членов, взятых в том же порядке, что и в ряде (A). Пусть ряд (A) сходится, но не абсолютно. Из сходимости следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Что касается рядов (B) и (C), то хотя очевидно

$$\lim_{k\to\infty} b_k = 0 \quad \text{и} \lim_{m\to\infty} c_m = 0, \tag{3.2}$$

но в данном случае они оба расходятся. Действительно, если среди первых n членов ряда (A) есть k положительных и m отрицательных, то

$$A_n = B_k - C_m, \quad A_n^* = B_k + C_m,$$

где $A_n^* = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$. Второе из этих равенств показывает, что оба ряда (B) и (C) не могут одновременно сходится, ибо иначе сходился бы и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ вопреки предположению. А из первого равенства следует, что если бы один из этих рядов сходился, а другой нет, то расходился бы и ряд (A), что также противоречит предположению.

2

Теорема 3.1 (Риман). *Если ряд (A) сходится условно, то какое бы не взять наперед число L, конечное или равное $\pm\infty$, можно так переставить члены в этом ряде, чтобы преобразованный ряд имел суммой именно L.*

► Поскольку ряды (B) и (C) расходящиеся, то все остатки этих рядов будут расходящимися, так что в каждом из этих рядов, начиная с любого места, можно набрать столько членов, чтобы их сумма превзошла любое число.

Пользуясь этим, мы следующим образом произведем перестановку членов ряда (A).

Сначала возьмем столько положительных членов ряда (A) в том порядке, в каком они расположены, чтобы их сумма превзошла число L.

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} > L.$$

Затем выпишем отрицательные члены (в том порядке в каком они расположены в ряде (A)), взяв их столько, чтобы общая сумма стала меньше L

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1} < L.$$

После этого снова поместим положительные члены из числа оставшихся так, чтобы было
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1} - c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1} + b_{k_1+1} + \ldots + b_{k_2} > L$$
и т. д. Процесс этот продолжим до бесконечности. Очевидно, что каждый член ряда (A) и при том со своим знаком встретится на определенном месте.

Если всякий раз, выписывая члены b или c набирать их не более, чем необходимо для осуществления требуемого неравенства, уклонение от числа L в ту или другую сторону не превзойдет по абсолютной величине последнего написанного члена. Тогда из (3.2) ясно, что ряд
$$(b_1 + b_2 + \ldots + b_{k_1}) + (-c_1 - c_2 - \ldots - c_{m_1}) + \ldots +$$
$$+(b_{k_{i-1}+1} + b_{k_{i-1}+2} + \ldots + b_{k_i}) + (-c_{m_{i-1}+1} - c_{m_{i-1}+2} - \ldots - c_{m_i}) + \ldots$$
имеет своей суммой L.

В силу замечания (3.1) это остается верным и после раскрытия скобок.

Если $L = +\infty$, то можно было бы набор положительных членов подчинить требованию, чтобы суммы последовательности становились больше $1, 2, 3$ и т. д., а из отрицательных членов помещать лишь по одному после каждой группы положительных. Таким путем составится ряд, имеющий сумму $+\infty$. Аналогично можно построить ряд с суммой $-\infty$. ◄

ЛЕКЦИЯ 21

§4. Некоторые приложения преобразования Абеля

1

Теорема 4.1. *Пусть* $x_k \in X,\ \lambda_k \in \mathbb{R}$ *(или* $x_k \in \mathbb{R},\ \lambda_k \in X$*) при* $k \in \mathbb{Z}_+,\ S_k = \sum\limits_{l=0}^{k} x_l$*, ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\lambda_k - \lambda_{k+1})S_k$ *сходится и существует* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k S_k$*. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k$ *сходится и справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k - \lambda_{k+1})S_k + \lim_{k\to\infty} \lambda_k S_k. \tag{4.1}$$

► Положим $S_{-1} = \theta$ (соответственно $S_{-1} = 0$). Так как $x_k = S_k - S_{k-1}$, то при $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (S_k - S_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k S_k - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k S_{k-1} =$$
$$= \sum_{k-0}^{n} \lambda_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} S_k = \lambda_n S + \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k - \lambda_{k+1})S_k.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k x_k = \lambda_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k - \lambda_{k+1})S_k. \tag{4.2}$$

Переходя в (4.2) к пределу при $n \to \infty$, получаем требуемое. ◄

Замечание 4.1. Формулы типа (4.1) и (4.2) называются преобразованиями Абеля. В дальнейшем используем обозначения:

$$\Delta^1 \lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k,\ \Delta^2 \lambda_k = \lambda_{k+2} - 2\lambda_{k+1} + \lambda_k.$$

Следствие 4.1. *Пусть* $x_k \in X,\ \lambda_k \in \mathbb{R}$ *при* $k \in \mathbb{Z}_+$,

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_{k+1} - \lambda_k| < +\infty,\ M = \sup_{m\in\mathbb{Z}_+} \left\| \sum_{k=0}^{m} x_k \right\| < +\infty.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k$ *сходится и*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k \right\| \leqslant M \sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta^1 \lambda_k\right|.$$

► В условиях следствия 1 числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|(\lambda_k-\lambda_{k+1})S_k\|$$

сходится, а следовательно, сходится (в X) и ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k-\lambda_{k+1})S_k.$$

При этом справедливы оценки

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}(\Delta^1\lambda_k)S_k\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta^1\lambda_k\right|\|S_k\|\leqslant M\sum_{k=0}^{\infty}\left|\Delta^1\lambda_k\right|.$$

◄

Замечание 4.2. Если $\lambda_{k+1}\leqslant\lambda_k$ при $k\in\mathbb{Z}_+$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=0$, то

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_{k+1}-\lambda_k|=\lambda_0.$$

Следствие 4.2 (признак Дирихле)**.** *Пусть* $x_k\in X,\ \lambda_k\in\mathbb{R}$,

$$\lambda_{k+1}\leqslant\lambda_k,\ \textit{при}\ k\in\mathbb{Z}_+,\ \lim_{k\to\infty}\lambda_k=0,\ M=\sup_{m\in\mathbb{Z}_+}\left\|\sum_{k=0}^{m}x_k\right\|<+\infty.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k x_k$ *сходится и*

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k x_k\right\|\leqslant\lambda_0 M.$$

Следствие 4.3 (признак Абеля)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x_k$, *где* $x_k\in X$, *сходится, вещественная последовательность* $\{\lambda_k\}$ *монотонна и ограниченна. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\lambda_k x_k$ *сходится.*

► В условиях следствия последовательность $\{\lambda_k\}$ имеет конечный предел. Обозначим его через a. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k x_k=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_k-a)x_k+a\sum_{k=0}^{\infty}x_k. \tag{4.3}$$

Осталось принять во внимание, что первый ряд в правой части (4.3) сходится по признаку Дирихле, второй — в силу условий следствия. ◄

Теорема 4.2. *Пусть* $x_k \in X,\ \lambda_k \in \mathbb{R}, S_k = \sum\limits_{l=0}^{k} x_l,\ \sigma_k = \frac{1}{k+1}\sum\limits_{l=0}^{k} S_l$ *при* $k \in \mathbb{Z}_+$, *ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\Delta^2\lambda_k)(k+1)\sigma_k$$

сходится и существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k S_k$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} k(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\sigma_{k-1}$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k$ *сходится и справедливо равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k x_k = \sum_{k=0}^{\infty}(\Delta^2\lambda_k)(k+1)\sigma_k + \lim_{k\to\infty}\lambda_k S_k + \lim_{k\to\infty}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)k\sigma_{k-1}. \tag{4.4}$$

► Положим $S_{-1} = \sigma_{-1} = \theta$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. В силу (4.2)

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k = \lambda_n S_n + \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k - \lambda_{k+1})S_k. \tag{2a}$$

Применяя преобразования Абеля к сумме, стоящей в правой части (2a), получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})S_k = \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})\left\{(k+1)\sigma_k - k\sigma_{k-1}\right\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(\lambda_k-\lambda_{k+1})(k+1)\sigma_k + \sum_{k=0}^{n-2}(\lambda_{k+1}-\lambda_{k+2})(k+1)\sigma_k =$$

$$= (\lambda_{n-1}-\lambda_n)n\sigma_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(\Delta^2\lambda_k)(k+1)\sigma_k. \tag{4.5}$$

Сопоставляя (2a) и (4.5), получаем

$$\sum_{k=0}^{n}\lambda_k x_k = \lambda_n S_n + n(\lambda_{n-1}-\lambda_n)\sigma_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(\Delta^2\lambda_k)(k+1)\sigma_k. \tag{4.6}$$

Осталось перейти к пределу в (4.6) при $n \to \infty$. ◄

Лемма 4.1. *Если последовательность* $\lambda_k \in \mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ *удовлетворяет условиям:* $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = 0$ *и* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k| < +\infty$, *то*

$$\lim_{k\to\infty} k\Delta^1\lambda_{k-1} = 0.$$

► Полагая в (4.6) $x_0 = 1,\ x_k = 0$ при $k = \overline{1,n}$, имеем

$$\lambda_0 = \lambda_n + n(\lambda_{n-1}-\lambda_n) + \sum_{k=0}^{n-2}(\Delta^2\lambda_k)(k+1). \tag{4.7}$$

Из равенства (4.7) в силу условий, наложенных на последовательность $\{\lambda_k\}$, следует, что существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta^1\lambda_{n-1}$. Осталось показать, что он равен нулю. Полагая в (4.6) $x_k = 0$ при $k \neq m,\ x_m = 1$ (в этом случае $\sigma_k = 0$ при $k < m,\ |\sigma_k| \leqslant 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+,\ \lim\limits_{k\to\infty}\sigma_k = 1$) и устремляя n к $+\infty$, легко приходим к неравенству

$$\left|\lim_{n\to\infty} n\Delta^1\lambda_{n-1}\right| \leqslant |\lambda_m| + \sum_{k=m}^{\infty}(k+1)|\Delta^2\lambda_k|.$$

Осталось принять во внимание, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $m \to \infty$. ◀

§5. Суммирование рядов

1

Как известно, ряд
$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k, \tag{5.1}$$
где $x_k \in X$, называется сходящимся в X, если его частичные суммы $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$ стремятся к S при $n \to \infty$.

Разнообразные задачи требуют расширения понятия суммы ряда.

Определение 5.1. Пусть дан ряд (5.1) с частичными суммами $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. Положим $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} S_k$. Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$, то будем говорить, что ряд (5.1) имеет сумму S в смысле метода средних арифметических (ca) и писать
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_k = S \text{ (ca)}.$$

Теорема 5.1. *Если ряд (5.1) сходится к сумме S, то он имеет эту же сумму в смысле метода (ca).*

▶ Пусть $S_n \to S$. Взяв $\varepsilon > 0$, фиксируем такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что при $n > n_1$ будет $\|S_n - S\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при этих n
$$\|\sigma_n - S\| = \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k - S \right\| = \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=0}^{n} (S_k - S) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|S_k - S\| = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_1} \|S_k - S\| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_1+1}^{n} \|S_k - S\|.$$
В силу выбора n_1 имеем
$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=n_1+1}^{n} \|S_k - S\| < \frac{1}{n+1} \sum_{k=n_1+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{n - n_1}{n+1} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Далее, имеющая предел последовательность $\{S_k\}$ ограничена: $\|S_k\| \leqslant M$ и потому
$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_1} \|S_k - S\| \leqslant \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_1} (M + \|S\|) = \frac{(n_1+1)(M + \|S\|)}{n+1}.$$
Значит, найдется такое $n_2 \in \mathbb{N}$, что при $n > n_2$ будет
$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_2} \|S_k - S\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
А тогда при $n > max\,\{n_1,n_2\}$ имеем $\|\sigma_n - S\| < \varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = S$, что и требовалось доказать. ◀

ЛЕКЦИЯ 22

Определение 5.2. Если для ряда (5.1) степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_k z^k$ сходится при всех $z \in [0,1)$ к $f(z)$ и существует $\lim\limits_{z\to 1-0} f(z) = S$, то S называется суммой ряда (5.1) в смысле метода суммирования Абеля

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_k = S\ (A).$$

Теорема 5.2 (Фробениус)**.** *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k = S\ (ca)$, *то* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k = S\ (A)$.

► Прежде всего напомним, что при $|z| < 1$ будет

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k = \frac{1}{(1-z)^2}. \tag{5.2}$$

Так как по условию $\sigma_n \to S$, то последовательность $\{\sigma_n\}$ ограничена. Отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^k$. Далее,

$$(1-z)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty}2(k+1)\sigma_k z^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^{k+2}.$$

Положим $\sigma_{-1} = \sigma_{-2} = S_{-1} = \theta$. Тогда

$$(1-z)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty}2k\sigma_{k-1} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(k-1)\sigma_{k-2} z^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{[(k+1)\sigma_k - k\sigma_{k-1}] - [k\sigma_{k-1} - (k-1)\sigma_{k-2}]\right\} z^k.$$

По определению суммы σ_k имеем $(k+1)\sigma_k = \sum\limits_{l=0}^{k} S_l$ и потому $(k+1)\sigma_k - k\sigma_{k-1} = S_k$. Кроме того, $S_k - S_{k-1} = x_k$. Значит,

$$(1-z)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(S_k - S_{k-1})z^k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k.$$

Из приведенных рассуждений, в частности, следует, что соотношение $\sigma_n \to S$ влечёт сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ при $z \in [0,1)$. Итак, положив $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k z^k$, будем иметь

$$f(z) = (1-z)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\sigma_k z^k.$$

Умножим обе части равенства (5.2) на $(1-z)^2 S$ и вычтем из предыдущего равенства:

$$f(z) - S = (1-z)^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\sigma_k - S)z^k.$$

Сумму справа разобьем на две:

$$(1-z)^2 \sum_{k=0}^{m} + (1-z)^2 \sum_{k=m+1}^{\infty},$$

причем число m подберем так, чтобы при $k > m$ было $\|\sigma_k - S\| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное наперед заданное число. Тогда норма второй суммы будет меньше ε (независимо от z), а для первой суммы, содержащей конечное число слагаемых, того же можно добиться за счет приближения z к единице. Следовательно,

$$\lim_{z \to 1-0} f(z) = S.$$

◄

Итак, мы установили, что во всех случаях, когда ряд сходится, он суммируется методом са; если же ряд суммируется методом са, то он суммируется методом Абеля. Обратное неверно: существуют расходящиеся ряды $\left(\text{например ряд } \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\right)$ суммируемый методом са $\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k = \frac{1}{2}(ca)\right)$ и существуют ряды, суммируемые методом Абеля, но не имеющие суммы в смысле са. Например, таков ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)$. Действительно, при $z \in [0,1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(-z)^k = \frac{1}{(1+z)^2} \underset{z\to 1-0}{\longrightarrow} \frac{1}{4},$$

т. е. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) = \frac{1}{4}$ (A). В то же время для этого ряда

$$S_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ \frac{n+2}{2}, & \text{если } n \text{ четно}, \end{cases}$$

$$\sigma_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечетно}, \\ \frac{n+2}{2(n+1)}, & \text{если } n \text{ четно}. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n$ не существует, т. е. рассматриваемый ряд не суммируется методом са.

Полученные отношения методов са и А выражают словами: метод А сильнее метода са.

2

Пусть F — метод суммирования рядов. Если ряд имеет сумму в смысле F, то в обычном смысле, как мы видим, он может и не иметь суммы. Естественно возникает вопрос: какие дополнительные условия следует наложить на поведение членов ряда, чтобы из существования его суммы S в смысле F можно было заключить о сходимости ряда к сумме S? Первая теорема в этом направлении была доказана А. Таубером. Поэтому утверждения, гласящие, что при выполнении некоторых условий, налагаемых на члены ряда, из суммирования этого ряда методом F вытекает обычная его сходимость, называются теоремами тауберова типа. В дальнейшем нам понадобится одна теорема тауберова типа. Введем в рассмотрение так называемые запаздывающие арифметические средние, играющие существенную роль в доказательстве этой теоремы и представляющие самостоятельный интерес.

Определение 5.3. Пусть дан ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$, где $x_k \in X$, с частными суммами S_n. Для $k, n+1 \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_{n,k} = \frac{1}{k} \sum_{l=n}^{n+k-1} S_l.$$

Суммы $\sigma_{n,k}$ называются запаздывающими арифметическими средними ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$.

Отметим очевидные соотношения

$$\sigma_{n,1} = S_n, \ \ \sigma_{0,k+1} = \sigma_k.$$

Далее

$$\sigma_{n,k} = \frac{1}{k} \left\{ \sum_{l=0}^{n+k-1} S_k - \sum_{l=0}^{n-1} S_l \right\} = \frac{1}{k} \left\{ (n+k)\sigma_{n+k-1} - n\sigma_{n-1} \right\},$$

т. е.

$$\sigma_{n,k} = \left(1 + \frac{n}{k}\right) \sigma_{n+k-1} - \frac{n}{k} \sigma_{n-1}. \tag{5.3}$$

Для сумм σ_k имеем

$$\sigma_k = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} S_l = \frac{1}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \sum_{i=0}^{l} x_i = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{l} (k+1-i) x_i,$$

т. е.

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^{k+1} \left(1 - \frac{i}{k+1}\right) x_i. \tag{5.4}$$

Поэтому из (5.3) следует

$$\sigma_{n,k} = \left(1 + \frac{n}{k}\right) \sum_{i=0}^{n+k} \left(1 - \frac{i}{n+k}\right) x_i - \frac{n}{k} \sum_{i=0}^{n} \left(1 - \frac{i}{n}\right) x_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+k} \left(\frac{n+k}{k} - \frac{i}{k}\right) x_i - \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{n}{k} - \frac{i}{k}\right) x_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{n+k}{k} - \frac{l}{k} - \frac{n}{k} - \frac{i}{k}\right) x_i +$$

$$+ \sum_{i=n+1}^{n+k} \left(\frac{n+k}{k} - \frac{i}{k}\right) x_i.$$

Таким образом

$$\sigma_{n,k} = S_n + \sum_{i=n+1}^{n+k} \left(1 - \frac{i-n}{k}\right) x_i. \tag{5.5}$$

Теперь докажем упомянутую выше теорему тауберова типа.

Теорема 5.3 (Харди)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$, *где* $x_k \in X$, *удовлетворяет условиям:*

1) существует такое $M \in \mathbb{R}$, *что при всех* $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \|x_i\|^2 \leqslant \frac{M}{n},$$

2) $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i = S$ *(са).*

Тогда ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} x_i$ *сходится (в обычном смысле) к сумме* S.

► Из соотношения (5.5) следует, что при $k \geqslant 1$

$$\|\sigma_{n,k} - S_n\| \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} \left(1 - \frac{i-n}{k}\right) \|x_i\| = \sum_{i=n+1}^{n+k-1} \left(1 - \frac{i-n}{k}\right) \|x_i\| .$$

По неравенству Коши получаем

$$\|\sigma_{n,k} - S_n\| \leqslant \left\{\sum_{i=n+1}^{n+k-1} \left(1 - \frac{i-n}{k}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{\sum_{i=n+1}^{n+k-1} \|x_i\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{k-1} \left\{\sum_{i=n+1}^{\infty} \|x_i\|^2\right\}^{\frac{1}{2}} .$$

Значит, в силу условия 1 теоремы

$$\|\sigma_{n,k} - S_n\| \leqslant \sqrt{\frac{(k-1)M}{n}}.$$

Последнее неравенство очевидным образом справедливо и при $k = 1$ $(\sigma_{n,1} = S_n)$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $k = k(n) = [n\varepsilon^2] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a. Тогда

$$\|\sigma_{n,k} - S_n\| \leqslant \sqrt{[n\varepsilon^2]\frac{M}{n}} \leqslant \sqrt{M}\varepsilon. \tag{5.6}$$

Но

$$\frac{n}{k} < \frac{n}{(n\varepsilon^2)} = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому при взятом зафиксированном ε в силу равенства (5.3) и условия 2 теоремы

$$\sigma_{n,k} = \left(1 + \frac{n}{k}\right) \sigma_{n+k-1} - \frac{n}{k}\sigma_{n-1} = \sigma_{n+k-1} + \frac{n}{k}\left(\sigma_{n+k-1} - \sigma_{n-1}\right) \underset{n\to\infty}{\to} S.$$

Значит, при достаточно больших n $(n > n_0)$ будет $\|S - \sigma_{n,k}\| < \varepsilon$. А тогда при этих n

$$\|S - S_n\| < \|S - \sigma_{n,k}\| + \|\sigma_{n,k} - S_n\| < \varepsilon + \sqrt{M}\varepsilon.$$

В силу произвольности ε это означает, что $S_n \to S$. ◄

§6. Кратные ряды

1

В этом параграфе будем рассматривать так называемые кратные ряды вида

$$\sum_{n_1,\ldots,n_k=1}^{\infty} x_{n_1,\ldots,n_k}, \tag{6.1}$$

где $x_{n_1,\ldots,n_k}$ — элементы X, занумерованные k индексами n_i $(i = \overline{1,k})$, каждый из которых независимо от других пробегает натуральный ряд чисел.

Ряд (6.1) называется k-кратным рядом, а числа $x_{n_1,\ldots,n_k}$ его членами.

Определение 6.1. Пусть Y — некоторое множество, k-кратной последовательностью элементов множества Y называется отображение $f:\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}_{k-\text{раз}}\to Y$ ($\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел).

Элемент $y = f(n_1,\ldots,n_k)$ $(n_1,\ldots,n_k\in\mathbb{N})$ обозначается через $y_{n_1,\ldots,n_k}$, а сама последовательность через $\{y_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\}$.

Итак, элементы k-кратной последовательности занумерованы k натуральными индексами. Мы будем рассматривать кратные последовательности. Для простоты обозначения ограничимся случаем $k = 2$.

Определение 6.2. Элемент $a \in X$ называется пределом двойной последовательности $\{y_{m,n}\}$ и пишется $a = \lim\limits_{m,n\to\infty} y_{m,n}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$ $(m,n\in\mathbb{N})$ выполняется неравенство

$$\|y_{m,n} - a\| < \varepsilon.$$

Если двойная последовательность имеет предел, то она называется сходящейся. Пусть дан двойной ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{m,n} \quad (x_{m,n}\in X). \tag{6.2}$$

Величина

$$S_{m,n} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} x_{k,l} \tag{6.3}$$

называется частной суммой (порядка (m,n)) ряда (6.2).

Определение 6.3. Двойной ряд (6.2) называется сходящимся, если последовательность его частичных сумм сходится. Её предел называется суммой ряда, причем если

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = S, \tag{6.4}$$

то пишется

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} x_{m,n} = S.$$

ЛЕКЦИЯ 23

2

Если $X = \mathbb{R}$, то можно ввести понятие бесконечных пределов.

Определение 6.4. Двойная числовая последовательность $\{u_{m,n}\}$ называется стремящейся к $+\infty$ и пишется $\lim\limits_{m,n\to\infty} u_{m,n} = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $m \geqslant n_\varepsilon$, $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $u_{m,n} > \varepsilon$. Аналогично определяются бесконечные пределы $\lim\limits_{m,n\to\infty} u_{m,n} = -\infty$ и $\lim\limits_{m,n\to\infty} u_{m,n} = \infty$. Если у двойного числового ряда

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{m,n} \tag{6.5}$$

частичные суммы $S_{m,n} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} u_{k,l}$, имеют предел $+\infty$ $(-\infty, +\infty)$, то соответственно пишут

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} u_{m,n} = +\infty \ (-\infty, +\infty).$$

Ряд (6.5) в этом случае считается расходящимся.

3

На кратные ряды переносится ряд свойств однократных рядов, например

1) Если ряд (6.2) сходится к сумме S, то $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} \lambda x_{m,n} = \lambda S$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) Если ряды $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} x'_{m,n} = S'$ и $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} x''_{m,n} = S''$ сходятся, то

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} (x'_{m,n} + x''_{m,n}) = S' + S''.$$

Докажем теперь несколько теорем о кратных рядах.

Теорема 6.1. *Если ряд* (6.2) *сходится, то*

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{m,n} = 0.$$

► Это сразу следует из равенства

$$x_{m,n} = S_{m,n} - S_{m-1,n} - S_{m,n-1} + S_{m-1,n-1}$$

и условия (6.4) ◄

Теорема 6.2. *Если все члены числового ряда* (6.5) *неотрицательны*

$$u_{m,n} \geqslant 0 \ (m, n = 1, 2, \ldots), \tag{6.6}$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел его частичных сумм $S_{m,n}$*, причем*

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{m,n} = \sup_{m,n=1,2,\ldots} S_{m,n}. \tag{6.7}$$

► Если выполнены условия (6.6) и $m' \geqslant m, n' \geqslant n$, то $S_{m',n'} \geqslant S_{m,n}$. Далее, если $S = \sup\limits_{m,n=1,2,\ldots} S_{m,n}$ и $S' < S$, то в силу определения верхней грани существуют такие номера m_0 и n_0, что $S_{m_0,n_0} > S'$. Положим $N = \max\{m_0, n_0\}$. Тогда при $m \geqslant N$ и $n \geqslant N$

$$S_{m,n} \geqslant S_{N,N} \geqslant S_{m_0,n_0} > S',$$

и так как $S_{m,n} \leqslant S$, то $\lim\limits_{m,n\to\infty} S_{m,n} = S'$, т. е. выполнено равенство (6.7). ◄

Следствие 6.1. *В предположениях теоремы 6.2 ряд* (6.5) *сходится тогда и только тогда, когда его частичные суммы ограничены.*

4

Из двукратного ряда (6.2) можно формально образовать два так называемых повторных ряда. Для этого следует сначала произвести суммирование по одному индексу, зафиксировав другой, затем произвести суммирование по оставшемуся индексу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} x_{m,n}, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} x_{m,n}. \tag{6.8}$$

Определение 6.5. Ряд (6.2) называется абсолютно (нормально) сходящимся, если сходится ряд, составленный из норм его членов, т. е. ряд

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} \|x_{m,n}\|. \tag{6.9}$$

Теорема 6.3. *Если ряд* (6.2) *абсолютно сходится, то сходится и любой ряд (однократный, двукратный или повторный), полученный перестановкой членов данного ряда (в частности, сходится и сам заданный ряд). При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда* (6.2).

► Расположим члены ряда (6.2) в бесконечную прямоугольную матрицу, поместив в m-тую ее строку члены ряда с данным фиксированным первым номером m, расположив по возрастанию второго индекса n :

$$\begin{array}{cccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & \ldots & x_{1n} & \ldots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & \ldots & x_{2n} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \ldots & x_{mn} & \ldots
\end{array}$$

Занумеруем теперь элементы этой таблицы согласно следующей схеме

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & \dots \\ 4 & 3 & 6 & \dots \\ 9 & 8 & 7 & \dots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

Член ряда (6.2), получивший при такой нумерации номер k, обозначим v_k. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \tag{6.10}$$

и докажем, что он абсолютно сходится, т. е. сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\|\,. \tag{6.11}$$

Обозначим частичные суммы ряда (6.9) через $S^*_{m,n}$, его сумму через S^*, а частичные суммы ряда (6.11) через S^*_k. Прежде всего заметим, что для любой суммы S^*_k найдутся такие номера m и n, что все члены ряда (6.11), входящие в сумму S^*_k, войдут и в сумму $S^*_{m,n}$, тогда

$$S^*_k \leqslant S^*_{m,n} \leqslant S^*.$$

Отсюда и следует сходимость ряда (6.11). Из абсолютной сходимости ряда (6.10) следует, что и любой другой однократный ряд, составленный из членов ряда (6.2) также сходится и его сумма равна сумме ряда (6.10). Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = S.$$

Покажем теперь, что любой двойной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} x'_{m,n}, \tag{6.12}$$

полученный некоторой перенумерацией двойными индексами членов данного ряда (6.2), абсолютно сходится и его сумма также равна S.

Абсолютная сходимость ряда (6.12) легко следует из абсолютной сходимости ряда (6.2), т. е. из сходимости ряда (6.9) и доказывается тем же приемом, которым была доказана абсолютная сходимость ряда (6.10). Докажем теперь, что сумма ряда (6.12) равна S. Обозначим его частичные суммы через $S'_{m,n}$, а частичные суммы ряда (6.10) через S_k. Пусть фиксировано число $\varepsilon > 0$. В силу сходимости ряда (6.11) существует такой номер k_ε, что

$$\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} \|v_k\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.13}$$

Тогда и подавно

$$\|S - S_{k_\varepsilon}\| = \left\| \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} v_k \right\| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} \|v_k\| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.14}$$

Выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S'_{N_\varepsilon,N_\varepsilon}$ ряда (6.12) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (6.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Пусть $m \geqslant N_\varepsilon$, $n \geqslant N_\varepsilon$. Положим

$$S''_{m,n} = S'_{m,n} - S_{k_\varepsilon}.$$

Тогда, используя (6.13) и (6.14), получим

$$\left\|S - S'_{m,n}\right\| \leqslant \|S - S_{k_\varepsilon}\| + \left\|S''_{m,n}\right\| < \varepsilon.$$

Итак, S является суммой любого ряда (6.12), в частности суммой самого ряда (6.2).

Покажем наконец, что S является суммой повторных рядов (6.8). В самом деле, при любом фиксированном n

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|x_{m,n}\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|v_k\| = S^*.$$

Следовательно, все ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty} x_{mn} \quad (n \in \mathbb{N})$$

сходятся и при этом абсолютно. Положим

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} x_{mn}. \tag{6.15}$$

Зафиксируем снова произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем номер k_ε так, чтобы выполнялось условие (6.13), а следовательно, и условие (6.14). Далее, подобно тому, как это было сделано выше, выберем номер N_ε так, чтобы частичная сумма $S_{N_\varepsilon,N_\varepsilon}$ ряда (6.2) содержала в качестве слагаемых все члены ряда (6.10), входящие в сумму S_{k_ε}. Тогда при всех $m \geqslant N_\varepsilon$ и $n \geqslant N_\varepsilon$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ji} - S_{k_\varepsilon}\right\| \leqslant \sum_{k=k_\varepsilon+1}^{\infty} \|v_k\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя в этом неравенстве в пределу при $m \to \infty$, получим

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i - S_{k_\varepsilon}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, в силу (6.14), следует, что при $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i - S\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i - S_{k_\varepsilon}\right\| + \|S_{k_\varepsilon} - S\| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} x_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = S.$$

◄

ЛЕКЦИЯ 24

ГЛАВА 15. Геометрические приложения определенного интеграла

§1. Длина кривой.

1

Пусть AB — незамкнутая несамопересекающаяся непрерывная кривая на плоскости или в пространстве. Разобьем её точками $M_0 = A, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n = B$, занумерованными от A к B, на n дуг. Соединив точки деления, получим ломаную линию $M_0, \ldots M_n$, вписанную в кривую AB. Её длина P равна сумме длин всех звеньев. Чем меньше длины звеньев, тем меньше ломаная $M_0 \ldots M_n$ по своей форме отличается от кривой AB.

За длину S кривой AB принимается предел, к которому стремятся периметры вписанных в эту кривую ломаных при стремлении к нулю наибольшей из длин звеньев этой ломаной (если такой предел (конечный) существует). При этом число S называется пределом периметров ломаных, вписанных в кривую AB, при указанном процессе, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любой вписанной в кривую AB ломаной с длинами звеньев меньшими δ имеет место неравенство

$$|S - P| < \varepsilon.$$

Те кривые, для которых этот предел S существует, называются спремляемыми.

Непрерывная кривая, не имеющая точек самопересечения, называется простой или жордановой кривой. Простая кривая, являющаяся частью некоторой кривой, называется её дугой. Из данного выше определения длины кривой следует, что если кривая AB точкой C разбита на две части AC и CB, то из спрямляемости любых двух из дуг AC, CB и AB следует спрямляемость третьей, причем

$$\text{дл. } AB = \text{дл. } AC + \text{дл. } CB.$$

Если кривая AB замкнутая или самопересекающаяся, то данное выше определение длины кривой не имеет смысла, так как в этих случаях из стремления к нулю длин всех звеньев вписанных в кривую ломаных не следует, что эти ломаные по своей форме приближаются к данной кривой.

Замкнутую, а так же самопересекающуюся кривую AB условимся называть спрямляемой, если её можно разбить на конечное число незамкнутых спрямляемых дуг. Длину такой кривой полагаем равной сумме длин составляющих её дуг.

2

Длина плоской кривой. Рассмотрим в плоскости XOY незамкнутую простую кривую AB, заданную уравнениями в параметрической форме:

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta). \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что изменению параметра t от α к β соответствует движение точки (x, y), где $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, по кривой в направлении от A к B. Если при этом функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны вместе во своими производными на отрезке $[\alpha, \beta]$, то кривая AB спрямляема и ее длина S выражается по формуле

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \tag{1.2}$$

► Разобьем кривую AB точками $M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B$, занумерованными в направлении от A к B, на части. Каждой точке $M_i(x_i, y_i)$ соответствует определенное значение параметра $t_i : x_i = \varphi(t_i),\ y_i = \psi(t_i)$. Точки $t_0 = \alpha, t_1, \ldots, t_n = \beta$ разобьют отрезок $[\alpha, \beta]$ оси Ot на n частей. Впишем в кривую AB ломаную $M_0, M_1 \ldots . M_n$. Длина P этой ломаной равна сумме длин составляющих её звеньев

$$P = \sum_{i=1}^{n} M_{i-1}M_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2}.$$

Применяя к разности в каждой квадратной скобке теорему Лагранжа, находим

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)} \Delta t_{i-1},$$

где $\Delta t_{i-1} = t_i - t_{i-1},\ t_{i-1} < \tau_i < t_i,\ t_{i-1} < \tau_i^* < t_i$.

Полученная сумма не является интегральной (значения стоящих под корнем функций вычисляются в двух, вообще говоря, различных точках каждого отрезка деления).

Рассмотрим сумму

$$\widetilde{P} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} \Delta t_{i-1},$$

являющуюся интегральной суммой для функции $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ непрерывной на отрезке $[\alpha, \beta]$ оси Ot. Пусть наибольшая из длин звеньев ломаной стремится к нулю. Тогда шаг разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ тоже стремится к нулю (это обстоятельство требует доказательства, но мы не будем на этом останавливаться). При этом интегральная сумма $\widetilde{P}$ имеет предел равный

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Покажем, что длина P ломаной $M_0M_2 \ldots M_n$ при стремлении к нулю наибольшей из длин ее звеньев (обозначим её через μ) имеет тот же предел. Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{\mu \to 0} (\widetilde{P} - P) = 0.$$

Оценим разность $\widetilde{P} - P$ по абсолютной величине

$$|\widetilde{P} - P| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)}\right]\Delta t_{i-1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left|\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)} - \sqrt{\varphi^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i^*)}\right|\Delta t_{i-1} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}|\psi'(t_i) - \psi'(t_i^*)|\,\Delta t_{i-1}.$$

(мы воспользовались элементарным неравенством $\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|$). Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число. Так как функция $\psi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ непрерывна, то она равномерно непрерывна на этом отрезке. Значит, для числа $\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любых двух точек $\theta_1, \theta_2 \in [\alpha, \beta]$ таких, что $|\theta_1 - \theta_2| < \delta$ выполнено неравенство

$$|\psi'(\theta_1) - \psi'(\theta_2)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}.$$

Выбирая число μ столь малым, чтобы шаг соответствующего разбития отрезка $[\alpha, \beta]$ на части был меньше δ, имеем

$$|\widetilde{P} - P| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\Delta t_{i-1} = \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{n}\Delta t_{i-1} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu\to 0} P = \lim_{\mu\to 0}\widetilde{P},$$

т. е.

$$\lim_{\mu\to 0} P = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.$$

◀

Замечание 1.1. Иногда мы будем записывать формулу (1.2) короче

$$S = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2 + y'^2}dt. \tag{1.2'}$$

Замечание 1.2. Формула (1.2) верна и для простой замкнутой кривой, заданной уравнениями: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ при соответствующих условиях на функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Действительно, фиксируя точку t_0, $\alpha < t_0 < \beta$, разобьем соответствующей ей точкой M_0 кривую на две дуги AnM_0 и M_0mA. При этом

$$S_{AnM_0} = \int_{\alpha}^{t_0}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt, \quad S_{M_0mA} = \int_{t_0}^{\beta}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$
$$S_{AnM_0mA} = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

3

Если кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где функция f непрерывна вместе со своей производной на отрезке $[a, b]$, то, принимая x за параметр, из формулы (1.2), как её частный случай получаем формулу

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{1.3}$$

или короче

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

Пусть теперь кривая AB задана уравнением в полярных координатах: $\rho = f(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, где $f(\varphi)$ — функция, имеющая для $\varphi \in [\alpha, \beta]$ непрерывную производную.

Учитывая формулы $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ получаем параметрическое уравнение кривой AB с параметром φ в виде

$$x = f(\varphi)\cos\varphi,\ y = f(\varphi)\sin\varphi, \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta.$$

При этом

$$\frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi,$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = f^2(\varphi) + f'^2(\varphi),$$

т. е.

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)}\, d\varphi \tag{1.4}$$

или короче

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi.$$

4

Рассмотрим простую кривую AB заданную параметрическим уравнением

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \gamma(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta \tag{1.5}$$

таким образом, что при изменении параметра t от α к β соответствующая точка перемещается от A к B. Тогда если функции φ, ψ, γ непрерывны и имеют непрерывные производные на отрезке $[\alpha, \beta]$, то кривая AB спрямляема, и её длина вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \gamma'^2(t)}\, dt. \tag{1.6}$$

Доказательство этого утверждения аналогично рассмотренному выше доказательству формулы (1.2).

ЛЕКЦИЯ 25

§2. Площадь поверхности вращения

Рассмотрим поверхность, образованную вращением кривой вокруг некоторой оси. Такая поверхность называется поверхностью вращения. Площадью поверхности вращения кривой AB вокруг данной оси называется предел к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев ломаных. При определенных условиях на кривую AB такой предел (конечный) существует.

Покажем, например, что если лежащая в плоскости xy кривая AB задается уравнением $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, где $f(x)$ — неотрицательная функция непрерывная вместе со своей производной, вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения существует и вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \tag{2.1}$$

или короче

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

► Разобьем кривую AB в направлении от A к B точками $M_0 = A, M_1, \ldots, M_n = B$ на n частей и впишем ломаную $M_0M_1\ldots M_n$. Пусть $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ — абсциссы вершин этой ломаной ($x_0 < x_1 < \ldots < x_n$). При вращении ломаной $M_0M_1\ldots M_n$ вокруг оси Ox получится поверхность, состоящая из боковых поверхностей n усеченных конусов.

Рассмотрим i-й конус. Его высота равна $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$, радиусы оснований равны, соответственно, $y_{i-1} = f(x_{i-1})$ и $y_i = f(x_i)$, образующая —

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Площадь $\widetilde{S}_i$ боковой поверхности этого конуса вычисляется по формуле

$$\widetilde{S}_i = 2\pi\,\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Так как число $\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}$, как среднее арифметическое чисел $f(x_{i-1})$ и $f(x_i)$, заключено между ними, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка η_{i-1}, $x_{i-1} \leqslant \eta_{i-1} \leqslant x_i$ такая, что

$$f(\eta_{i-1}) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}.$$

Затем, применяя к разности $f(x_i) - f(x_{i-1})$ теорему Лагранжа, получим

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\gamma_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

где γ_{i-1} — точка, лежащая на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. При этом

$$\widetilde{S}_i = 2\pi f(\eta_{i-1})\sqrt{1+f'^2(\gamma_{i-1})}\Delta x_{i-1},$$

а площадь $\widetilde{S}$ поверхности, полученной в результате вращения ломаной $M_0M_1M_2\dots M_n$, равна

$$\widetilde{S} = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\eta_{i-1})\sqrt{1+f'^2(\gamma_{i-1})}\Delta x_{i-1}.$$

Сумма $\widetilde{S}$ не является интегральной. Рассмотрим «близкую» к ней интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\gamma_{i-1})\sqrt{1+f'^2(\gamma_{i-1})}\Delta x_{i-1}$$

для функции $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$. Так как функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, то функция $2\pi f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ также непрерывна на этом отрезке. При стремлении к нулю наибольшей из длин звеньев ломаной (обозначим ее μ) шаг разбиения отрезка $[a,b]$ стремится к нулю (этот факт требует доказательства, но мы не будем на нем останавливаться). Переходя к пределу, получим

$$\lim_{\mu\to 0}\sum_{i=1}^{n} 2\pi f(\gamma_{i-1})\sqrt{1+f'^2(\gamma_{i-1})}\Delta x_{i-1} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Покажем, что сумма $\widetilde{S}$ стремится к этому же пределу. Для этого достаточно доказать, что разность $\widetilde{S}-\sigma$ стремится к нулю. Так как функция $\sqrt{1+f'^2(x)}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на нем, т. е.

$$\sqrt{1+f'^2(x)} < K, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Из равномерной непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует существование такого числа $\delta > 0$, что для любых двух точек x', x'' отрезка $[a,b]$ таких, что $|x'-x''| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2\pi K(b-a)}.$$

Выбирая μ столь малым, чтобы шаг разбиения отрезка $[a,b]$ был меньше δ, получим

$$|\widetilde{S}-\sigma| = \left|2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\eta_{i-1})\sqrt{1+f'^2(\gamma_{i-1})}\Delta x_{i-1} - 2\pi\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_{i-1})\sqrt{1+f'^2(\gamma_{i-1})}\Delta x_{i-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\sum_{i=1}^{n}|f(\eta_{i-1})-f(\gamma_{i-1})|\,\sqrt{1+f'^2(\gamma_{i-1})}\Delta x_{i-1}| \leqslant 2\pi K\sum_{i=1}^{n}|f(\eta_{i-1})-f(\gamma_{i-1})|\Delta x_{i-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi K\frac{\varepsilon}{2\pi K(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{i-1} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое число, то отсюда следует, что разность $\widetilde{S}-\sigma$ при $\mu\to 0$ стремится к нулю. Таким образом, предел S площади поверхности вращения ломаной существует, причем

$$S = \lim_{\mu\to 0}\widetilde{S} = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

◀

Замечание 2.1. Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $\varphi(t),\ \psi(t)$ — функции, имеющие непрерывные производные; $\varphi(t) \geqslant 0,\ \varphi'(t) > 0$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то, произведя в интеграле (2.1) замену переменной по формуле $x = \varphi(t)$, получим формулу для вычисления площади соответствующей поверхности вращения

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{2.2}$$

§3. Площади криволинейной трапеции и криволинейного сектора

.

1

Мы уже обсуждали вопрос о площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$ оси Ox, сверху кривой, задаваемой уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная, неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$. Площадь S такой трапеции равна

$$S = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Рассмотрим теперь фигуру $ABCD$, ограниченную слева и справа прямыми $x = a,\ x = b$, снизу и сверху кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, где $\varphi(x), \psi(x)$ непрерывные функции на $[a, b]$.

Рассматривая случаи, когда обе функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неотрицательны или неположительны на $[a, b]$, а также случай, когда $\varphi(x) \leqslant 0,\ \psi(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, нетрудно убедиться, что площадь фигуры $ABCD$ всегда может быть вычислена по формуле

$$S = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))\, dx.$$

Площади фигур более сложного вида обычно вычисляется с помощью определенного интеграла после предварительного разбиения их на части указанного вида (как по отношению к оси Ox, так и по отношению к оси Oy).

2

Площадь криволинейного сектора. Введем на плоскости полярную систему координат и рассмотрим криволинейный сектор $OABO$, ограниченный двумя лучами OA и OB, составляющими с полярной осью углы α и β $(-\pi < \alpha < \beta < \pi)$ и кривой AB, уравнение которой в полярных координатах (с полюсом O) имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — неотрицательная непрерывная функция на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Определение площади такой фигуры можно произвести следующим образом. Разобьем угол AOB лучами $y = \varphi_k$ $(k = \overline{0, n})$, где $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \varphi_2 < \ldots < \varphi_n = \beta$, на n частей. Обозначим точки пересечения этих лучей с кривой $\rho = f(\varphi)$ соответственно $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (A_0 совпадает с A, A_n с B). При этом криволинейный сектор $OABO$ разобьется на n криволинейных секторов. Углы $A_0OA_1,\ A_1OA_2, \ldots, A_{n-1}OA_n$ соответственно будут равны

$$\Delta\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_0,\ \Delta\varphi_1 = \varphi_2 - \varphi_1, \ldots, \Delta\varphi_{n-1} = \varphi_n - \varphi_{n-1}.$$

Для каждого сектора $OA_{i-1}A_iO$ $(i=\overline{1,n})$, определив наибольшее и наименьшее значения функции $\rho = f(\varphi)$ на отрезке $[\varphi_{i-1},\varphi_i]$ (обозначим их R_{i-1} и r_{i-1}), построим круговые секторы радиусов R_{i-1} и r_{i-1} с тем же углом при вершине. Площади этих круговых секторов соответственно равны

$$\frac{r_{i-1}^2}{2}\Delta\varphi_{i-1} \quad \text{и} \quad \frac{R_{i-1}^2}{2}\Delta\varphi_{i-1}.$$

Площадь фигуры Q, составленной из всех круговых секторов радиуса R_i, есть

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\frac{R_{i-1}^2}{2}\Delta\varphi_{i-1}.$$

Площадь фигуры q, составленной из всех круговых секторов радиуса r_i есть

$$q=\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{i-1}^2}{2}\Delta\varphi_{i-1}.$$

(Условимся фигуру и ее площадь обозначать одной буквой, это не внесет недоразумений, ибо из контекста всегда будет ясно, когда речь идет о фигуре, а когда о её площади).

Так полученные суммы представляют собой суммы Дарбу для непрерывной на $[\alpha,\beta]$ функции $\frac{f^2(\varphi)}{2}$. Поэтому при стремлении наибольшего из углов деления (являющегося шагом разбиения отрезка $[\alpha,\beta]$) к нулю эти суммы имеют общий предел

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\,d\varphi,$$

который естественно называется площадью криволинейного сектора $OABO$.

§4. Вычисление объёма тела по известным площадям его поперечных сечений

1

Пусть дано тело V, у которого площадь любого сечения σ перпендикулярного некоторой оси (примем её за ось Ox) известна как непрерывная функция x

$$\sigma = S(x), \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Абсциссы $x=a$ и $x=b$ соответствуют крайним точкам тела V. Предположим, что тело V таково, что любая пара его сечений плоскостями перпендикулярными оси Ox проектируется одно в другое на некоторую плоскость перпендикулярную оси Ox. Рассмотрим вопрос об объёме тела V (условимся объём тела V обозначать той же буквой, что и само тело).

Для решения поставленной задачи разобьем отрезок $[a,b]$ точками $x_0=a$, x_1, $x_2,\ldots,x_n=b$ $(x_0<x_1<\ldots<x_n)$ на n частей и проведем через точки деления плоскости перпендикулярные оси Ox. При этом тело V разобьется на n «дисков». Так как на отрезке $[x_{i-1},x_i]$ функция $S(x)$ непрерывна, то она принимает на нем наименьшее и наибольшее значения. Обозначим эти значения через m_{i-1} и M_{i-1}. Если все сечения i-го диска спроектировать на плоскость $x=x_i$, то они будут содержать в

себе сечение с площадью m_{i-1} и содержаться в сечении с площадью M_{i-1}. Построим на этих наименьших и наибольших сечениях цилиндры с образующими, параллельными оси Ox, высоты $\Delta x_{i-1} = x_i - x_{i-1}$. «Больший» из них будет описан около i-го диска, а «меньший» вписан в него. Объёмы описанного и вписанного цилиндров будут соответственно равны $M_{i-1}\Delta x_{i-1}$ и $m_{i-1}\Delta x_{i-1}$. Произведя указанные построения над каждым из отрезков деления, получим описанное относительно V тело и вписанное в него тело, составленное из n цилиндров. Их объёмы равны $\sum\limits_{i=1}^{n} M_{i-1}\Delta x_{i-1}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i-1}\Delta x_{i-1}$. При стремлении к нулю шага разбиения λ отрезка $[a, b]$ эти суммы имеют общий предел

$$\int_a^b S(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_{i-1}\Delta x_{i-1} = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_{i-1}\Delta x_{i-1},$$

который естественно принять за объём тела V. Итак

$$V = \int_a^b S(x)\,dx. \tag{4.1}$$

2

Объём тела вращения. Рассмотрим на плоскости xy кривую $y = f(x)$, где $f(x)$ — функция непрерывная на отрезке $[a, b]$. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$ вращать вокруг оси Ox, то образуется так называемое тело вращения. Это тело удовлетворяет всем условиям, используемым при выводе формулы (4.1), причем $S(x) = \pi f^2(x)$, так как каждое сечение тела плоскостью $x = const$, перпендикулярной оси Ox, есть круг радиуса $R = |f(x)|$. Применяя формулу (4.1), найдем объём тела вращения

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

ЛЕКЦИЯ 26

ГЛАВА 16. Функции ограниченной вариации. Интеграл Стилтьеса

§1. Функции ограниченной вариации

1

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f. Разобьем $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и составим сумму

$$S = \sum_{k=0}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \, .$$

Определение 1.1. Верхняя грань множества всевозможных сумм S называется вариацией функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{Var}}}\, f$ или $\bigvee\limits_a^b(f)$. Если $\bigvee\limits_a^b(f) < +\infty$, то говорят, что f есть функция ограниченной вариации на отрезке $[a, b]$, и пишут $f \in \bigvee [a, b]$.

Пример 1.1. Если f имеет ограниченную производную на отрезке $[a, b]$, то $f \in \bigvee[a, b]$.

► Действительно, если $|f'(x)| \leqslant M$, то по формуле Лагранжа

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} |f'(\gamma_k)|(x_{k+1} - x_k) \leqslant M(b - a)$$

(здесь $\gamma_k \in (x_k, x_{k+1})$). Поэтому $\bigvee\limits_a^b(f) \leqslant M(b - a)$. ◄

Пример 1.2. Если f монотонна на $[a, b]$, то $f \in \bigvee[a, b]$.

► В самом деле, все разности $f(x_{k+1}) - f(x_k)$ одного знака и поэтому

$$S = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \{f(x_{k+1}) - f(x_k)\} \right| = |f(b) - f(a)|.$$

Значит, $\bigvee\limits_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. ◄

Пример 1.3. Приведем пример непрерывной функции, не являющейся функцией ограниченной вариации. Положим

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x}$$

при $0 < x \leqslant 1$ и $f(0) = 0$. В качестве точек деления отрезка $[0, 1]$ возьмем точки $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$. Легко видеть, что $S = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ и потому $\bigvee\limits_0^1(f) = +\infty$.

Отметим, что всякая функция ограниченной вариации ограничена. В самом деле, при $a \leqslant x \leqslant b$

$$S = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leqslant \bigvee_a^b (f),$$

откуда

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + \bigvee_a^b (f).$$

Теорема 1.1. *Если $f, g \in \bigvee[a,b]$, то $f+g, f-g, fg \in \bigvee[a,b]$, а при дополнительном условии $|g(x)| \geqslant \sigma > 0$ также $\frac{f}{g} \in \bigvee[a,b]$.*

► Пусть $h = f + g$. Тогда

$$|h(x_{k+1}) - h(x_k)| \leqslant |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

отсюда следует, что

$$\bigvee_a^b (h) \leqslant \bigvee_a^b (f) + \bigvee_a^b (g).$$

Для разности доказательство аналогично. Пусть далее $p = fg$, $A = \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|, B = \sup\limits_{[a,b]} |g(x)|$. Тогда

$$\begin{gathered} |p(x_{k+1}) - p(x_k)| = |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \leqslant \\ \leqslant |f(x_{k+1})g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_{k+1})| + |f(x_k)g(x_{k+1}) - f(x_k)g(x_k)| \leqslant \\ \leqslant B|f(x_{k+1}) - f(x_k)| + A|g(x_{k+1}) - g(x_k)|, \end{gathered}$$

откуда

$$\bigvee_a^b (p) \leqslant B \bigvee_a^b (f) + A \bigvee_a^b (g).$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что $\frac{1}{g} \in \bigvee[a,b]$, если g отделена от нуля. Так как

$$\left| \frac{1}{g(x_{k+1})} - \frac{1}{g(x_k)} \right| = \frac{|g(x_{k+1}) - g(x_k)|}{|g(x_{k+1})g(x_k)|} \leqslant \frac{1}{\sigma^2} |g(x_{k+1}) - g(x_k)|,$$

то

$$\bigvee_a^b \left(\frac{1}{g} \right) \leqslant \frac{1}{\sigma^2} \bigvee_a^b (g) < +\infty.$$

◄

2

Теорема 1.2. *Пусть на $[a,b]$ задана функция f и $a < c < b$. Тогда*

$$\bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f),$$

т. е. вариация аддитивна.

► Разложим на части каждый из отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ точками

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c,\;\; c = z_0 < z_1 < \ldots z_n = b$$

и составим суммы

$$S_1 = \sum_{k=0}^{m-1} \left| f(y_{k+1}) - f(y_k) \right|, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(z_{k+1}) - f(z_k) \right|.$$

Точки y_k и z_k дробят на части весь отрезок $[a,b]$. Если S — сумма, отвечающая этому способу дробления, то $S = S_1 + S_2$. Отсюда следует, что

$$S_1 + S_2 \leqslant \bigvee_a^b (f)$$

и, стало быть, верно неравенство

$$\bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f) \leqslant \bigvee_a^b (f). \tag{1.1}$$

Теперь разобьем на части отрезок $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, включив при этом c в число точек деления. Если $c = x_m$, то сумма S, отвечающая нашему способу деления, есть

$$S = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=m}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = S_1 + S_2,$$

где S_1 и S_2 суть суммы, отвечающие отрезкам $[a,c]$ и $[c,b]$. Отсюда

$$S \leqslant \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f). \tag{1.2}$$

Это неравенство установлено пока лишь для сумм S, отвечающих таким способам дробления, при которых точка c включена в число точек деления. Но так как добавление новых точек деления, очевидно, не уменьшает сумм S то (1.2) верно для всех вообще сумм S. Отсюда ясно, что

$$\bigvee_a^b (f) \leqslant \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f). \tag{1.3}$$

Сопоставляя (1.1) и (1.3), получаем утверждение теоремы. ◄

Следствие 1.1. *Если в условиях теоремы $f \in \bigvee[a,b]$, то $f \in \bigvee[a,c]$, $f \in \bigvee[c,b]$ и обратно, если $f \in \bigvee[a,c]$, $f \in \bigvee[c,b]$, то $f \in \bigvee[a,b]$.*

Следствие 1.2. *Если отрезок $[a,b]$ можно разложить на конечное число частей, на каждой из которой функция f монотонна, то $f \in \bigvee[a,b]$.*

Теорема 1.3. *Для того, чтобы функция f была функцией ограниченной вариации, необходимо и достаточно, чтобы f представлялась в форме разности двух возрастающих функций.*

► Достаточность условия следует из примера 1.2 и теоремы 1.1. Для доказательства необходимости, считая $\bigvee_a^a(f) = 0$, положим

$$\pi(x) = \frac{\bigvee_a^x(f) + f(x)}{2}, \quad \gamma(x) = \frac{\bigvee_a^x(f) - f(x)}{2}.$$

Ясно, что $f = \pi - \gamma$. Покажем, что функции π и γ возрастают. Пусть $a \leqslant x < y \leqslant b$. Тогда по теореме 1.2

$$\pi(y) - \pi(x) = \frac{1}{2}\left\{\bigvee_a^y(f) - \bigvee_a^x(f) + f(y) - f(x)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\bigvee_x^y(f) + f(y) - f(x)\right\}.$$

Из самого определения вариации ясно, что

$$-\left(f(y) - f(x)\right) \leqslant |f(y) - f(x)| \leqslant \bigvee_x^y(f),$$

откуда $\pi(y) - \pi(x) \geqslant 0$. Возрастание γ устанавливается аналогично. ◄

Следствие 1.3. *Если $f \in \bigvee[a,b]$, то в каждой точке $x_0 \in (a,b]$ существует $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и в каждой точке $x_0 \in [a,b)$ существует $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$. Иначе говоря, функция ограниченной вариации может иметь разрывы только 1-го рода.*

Это вытекает из того, что возрастающие функции такими свойствами обладают.

ЛЕКЦИЯ 27

§2. Интеграл Стилтьеса

1

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две функции f и g. Разложим $[a, b]$ на части точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, выберем в пределах каждого отрезка $[x_k, x_{k+1}]$ по точке γ_k и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\gamma_k\right)\left[g\left(x_{k+1}\right) - g\left(x_k\right)\right].$$

Если при

$$\lambda = \max_{k=\overline{0,n-1}} (x_{k+1} - x_k) \to 0$$

сумма σ стремится к конечному пределу J, не зависящему ни от способа дробления, ни от выбора точек γ_k, то этот предел называется интегралом Стилтьеса функции f по функции g и обозначается через

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) \quad \text{или} \quad (S)\int\limits_a^b f(x)\, dg(x).$$

Точный смысл определения таков: число J есть интеграл Стилтьеса функции f по функции g, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при любом способе дробления, при котором $\lambda < \delta$, будет $|\sigma - J| < \varepsilon$, как бы мы ни выбирали точки γ_k. Ясно, что интеграл Римана есть частный случай интеграла Стилтьеса при $g(x) = x$.

Отметим некоторые очевидные свойства интеграла Стилтьеса:

1) $$\int\limits_a^b \left[f_1(x) + f_2(x)\right]\, dg(x) = \int\limits_a^b f_1(x)\, dg(x) + \int\limits_a^b f_2(x)\, dg(x).$$

2) $$\int\limits_a^b f(x) d\left[g_1(x) + g_2(x)\right] = \int\limits_a^b f(x)\, dg_1(x) + \int\limits_a^b f(x)\, dg_2(x).$$

3) Если $k, l \in \mathbb{R}$, то
$$\int\limits_a^b kf(x)\, dl\, g(x) = kl \int\limits_a^b f(x)\, dg(x).$$

Во всех трех случаях из существования правой части вытекает существование левой части.

4) Если $a < c < b$ и существуют все три интеграла, входящие в равенство
$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \int\limits_a^c f(x)\, dg(x) + \int\limits_c^b f(x)\, dg(x),$$
то это равенство справедливо.

Чтобы доказать это свойство интеграла, нужно лишь включить точку c в число точек деления $[a,b]$ при составлении суммы σ для интеграла $\int\limits_a^b f\,dg$.

Нетрудно доказать, что из существования $\int\limits_a^b f\,dg$ следует существование обоих интегралов $\int\limits_a^c f\,dg$ и $\int\limits_c^b f\,dg$.

Интересно отметить, что обратное предложение неверно.

Пример 2.1. Пусть функции f и g заданы на отрезке $[-1,1]$, причем

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad -1\leqslant x< 0,\\ 1 & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

Легко видеть, что интегралы

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dg, \quad \int\limits_{0}^{1} f\,dg(x)$$

существуют (ибо суммы σ равны нулю). В то же время интеграл

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,dg(x)$$

не существует. Действительно, раздробим отрезок $[-1,1]$ на части так, чтобы точка 0 не попала в число точек деления, и составим сумму

$$\sigma=\sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)\left[g(x_{k+1})-g(x_k)\right].$$

Легко понять, что если $x_i<0<x_{i+1}$, то в сумме σ останется лишь $i-$ое слагаемое, ибо если точки x_k и x_{k+1} лежат по одну сторону от точки 0, то $g(x_k)=g(x_{k+1})$, значит,

$$\sigma=f(\gamma_i)\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right]=f(\gamma_i).$$

В зависимости от того, будет ли $\gamma_i\leqslant 0$ или $\gamma_i>0$, будет $\sigma=0$ или $\sigma=1$, так что σ не имеет предела.

2

Из существования одного из интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$ и $\int\limits_a^b g(x)df(x)$ вытекает существование другого и равенство

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dg(x)+\int\limits_{a}^{b} g(x)df(x)=\left[f(x)g(x)\right]_a^b, \tag{2.1}$$

где, как обычно, положено

$$[f(x)g(x)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{2.2}$$

Формула (2.1) называется формулой интегрирования по частям.

► Пусть существует интеграл $\int\limits_a^b g(x)df(x)$. Разделим $[a, b]$ на части и составим сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)\left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right].$$

Её можно представить и так

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)g(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(\gamma_k)g(x_k),$$

откуда

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\gamma_k) - f(\gamma_{k-1})\right] + f(\gamma_{n-1})g(x_n) - f(\gamma_0)g(x_0).$$

Прибавляя и вычитая к правой части выражение (2.2), находим

$$\sigma = [f(x)g(x)]_a^b -$$
$$- \left\{ g(a)[f(\gamma_0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\gamma_k) - f(\gamma_{k-1})\right] + g(b)\left[f(b) - f(\gamma_{n-1})\right] \right\}.$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть ни что иное, как сумма, составленная для интеграла $\int\limits_a^b g\,df$, причем точками дробления отрезка $[a, b]$ служат точки

$$a \leqslant \gamma_0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{n-1} \leqslant b,$$

а точки $a,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-1},\ b$, суть точки отрезков $[a, \gamma_0],\ [\gamma_0, \gamma_1], \ldots, [\gamma_{n-1}, b]$. Если стремится к нулю $max(x_{k+1} - x_k)$, то к нулю же стремится и $max(\gamma_{k+1} - \gamma_k)$, так что сумма в фигурных скобках стремится к интегралу $\int\limits_a^b g\,df$, откуда и следует доказываемое предложение. ◄

3

Естественно поставить вопрос об условиях существования интеграла Стильтеса. Мы ограничимся лишь одной теоремой в этом направлении.

ЛЕКЦИЯ 28

Теорема 2.1. *Интеграл*

$$\int_a^b f(x)\, dg(x)$$

существует, если функция f *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *а* g *— функция ограниченной вариации.*

► Достаточно считать, что g возрастает, ибо всякая функция ограниченной вариации есть разность двух возрастающих функций. Разложим отрезок $[a, b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

и обозначим, соответственно, через m_k и M_k наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[x_k, x_{k+1}]$.

Пусть

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right], \quad S = \sum_{k=0}^{m-1} M_k \left[g(x_{k+1}) - g(x_k)\right].$$

Ясно, что при любом выборе точек γ_k в отрезках $[x_k, x_{k+1}]$ окажется $s \leqslant \sigma \leqslant S$. Легко проверить, что при добавлении новых точек деления сумма s не убывает, а S не возрастает. Отсюда следует, что ни одна сумма s не превосходит ни одной суммы S. Действительно, имея два способа I и II дробления отрезка $[a, b]$, которым отвечают соответственно суммы s_1, S_1 и s_2, S_2, мы можем составить способ III, объединяя точки деления обоих способов I и II. Если способу III отвечают суммы s_3 и S_3, то

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant S_3 \leqslant S_2,$$

так что и в самом деле $s_1 \leqslant S_2$. Заметив это, обозначим через I верхнюю грань множества $\{s\}$ всех нижних сумм

$$I = \sup\{s\}.$$

При всяком способе дробления будет $s \leqslant I \leqslant S$ и, следовательно (в силу неравенства $s \leqslant \sigma \leqslant S$),

$$|\sigma - I| \leqslant S - s.$$

Если взять произвольное $\varepsilon > 0$ и найти $\delta > 0$ такое, что неравенство $|x' - x''| < \delta$ влечет неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, то при $\lambda < \delta$ окажется

$$M_k - m_k < \varepsilon \quad (k = \overline{0, n-1})$$

и, стало быть,

$$S - s \leqslant \varepsilon \left[g(b) - g(a)\right].$$

Отсюда и подавно при $\lambda < \delta$ будет

$$|\sigma - I| \leqslant \varepsilon \left[g(b) - g(a)\right].$$

Иначе говоря, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$ так что I и есть интеграл $\int_a^b f(x)\, dg(x)$. ◄

Из доказанной теоремы следует, что всякая функция ограниченной вариации интегрируема по всякой непрерывной функции.

4

Остановимся на вопросе вычисления интеграла Стилтьеса.

Теорема 2.2. *Если функция f непрерывна на $[a,b]$, а функция g в каждой точке $[a,b]$ имеет производную $g'(x)$, являющуюся функцией, интегрируемой в смысле Римана, то*

$$(S)\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx. \tag{2.3}$$

► Функция g' интегрируема (R), и потому ограничена. Поэтому на основании примера 1.1 функция $g \in \bigvee[a,b]$ и интеграл в левой части (2.3) существует. С другой стороны, функция g' интегрируема (R), f интегрируема (R), так что существует и правая часть (2.3). Остается убедиться в их равенстве.

С этой целью разложим $[a,b]$ на части точками

$$x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$$

и к каждой разности $g(x_{k+1}) - g(x_k)$ применим формулу Лагранжа

$$g(x_{k+1}) - g(x_k) = g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_k < \bar{x}_k < x_{k+1}).$$

Если при составлении суммы σ для интеграла $\int\limits_a^b f\,dg$ в качестве точки γ_k мы возьмем точку $\bar{x}_k$, доставляемую формулой Лагранжа, то сумма σ примет вид

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\bar{x}_k)g'(\bar{x}_k)(x_{k+1} - x_k), \tag{2.4}$$

т. е. окажется римановой суммой функции $f(x)g'(x)$. Устремляя к нулю

$$\lambda = \max_{k=\overline{0,n-1}} (x_{k+1} - x_k)$$

и переходя к пределу в (2.4), мы получаем равенство (2.3). ◄

Теорема 2.3. *Пусть f непрерывна на $[a,b]$, а g постоянна в каждом из интервалов $(a,c_1), (c_1,c_2), \ldots, (c_m,b)$, где $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_m = b$. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)[g(a+0) - g(a)] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} f(c_k)[g(c_k+0) - g(c_k-0)] + f(b)[g(b) - g(b-0)]. \tag{2.5}$$

► Легко видеть, что

$$\bigvee_a^b(g) = |g(a+0) - g(a)| +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \{|g(c_k) - g(c_k-0)| + |g(c_k+0) - g(c_k)|\} + |g(b) - g(b-0)|, \tag{2.6}$$

так что функция g имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, а значит, и на всякой части $[a,b]$. Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=0}^{m} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x), \tag{2.7}$$

где положено $c_0 = a, c_{m+1} = b$.

Остается вычислить интеграл $\int\limits_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x)$. Но, разлагая $[c_k, c_{k+1}]$ на части и составляя сумму σ для интересующего нас интеграла, мы, очевидно, будем иметь

$$\sigma = f(\gamma_0)\left[g(c_k+0) - g(c_k)\right] + f(\gamma_{n-1})\left[g(c_{k+1}) - g(c_{k+1}-0)\right],$$

ибо все прочие слагаемые исчезают. Значит, в пределе

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x) = f(c_k)\left[g(c_k+0) - g(c_k)\right] + f(c_{k+1})\left[g(c_{k+1}) - g(c_{k+1}-0)\right],$$

откуда, в связи с (2.7), и следует (2.5). ◄

ЛЕКЦИЯ 29

ГЛАВА 17. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

§1. Дифференцируемость функций многих переменных

1

Частные производные. Будем рассматривать функции, определенные на множествах $\mathbb{R}^n$, значениями которых являются вещественные числа. Пусть функция

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

определена в окрестности точки $x^{(0)}$. Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}).$$

Функция φ может иметь производную в точке $x_1^{(0)}$. По определению такая производная называется частной производной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в точке $x^{(0)}$ по x_1 и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)})$ или $\dfrac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1}$. Таким образом,

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1},$$

где

$$\Delta x_1 = x_1 - x_1^{(0)}.$$

Аналогично определяются частные производные (первого порядка)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_i^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad (i = \overline{2, n}).$$

Употребляются и другие обозначения для частных производных первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = f'_{x_i}(x^{(0)}) = D_i f(x^{(0)}) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x^{(0)}).$$

Функция двух переменных может иметь в точке (x_0, y_0) две частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Для функции трех переменных — три частные производные первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0).$$

Поскольку при вычислении частных производных все переменные, кроме одной, фиксируются, то техника вычисления частных производных такая же, как техника вычисления производных функции одной переменной.

Дифференцируемость функции в точке. Рассмотрим сначала случай двух переменных. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой δ-окрестности $S = S(M_0, \delta)$ точки $M_0 = (x_0, y_0)$ и пусть $M = (x,y) \in S$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и, значит, $\rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$. Пусть

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

Δz обычно называется (полным) приращением функции f в точке M_0.

Определение 1.1. Функция $f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если существуют два числа A и B такие, что

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y), \tag{1.1}$$

где при $\rho \neq 0$

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho, \quad \lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0. \tag{1.2}$$

Из (1.1) следует, что $\alpha(0,0) = 0$. В случае дифференцируемости функции f в точке (x_0, y_0) линейная функция $A\Delta x + B\Delta y$ переменных Δx и Δy называется полным дифференциалом или просто дифференциалом функции f в точке (x_0, y_0) и обозначается dz. Таким образом,

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Вместо Δx и Δy употребляются также равнозначные обозначения dx и dy, т. е. пишут

$$dz = Adx + Bdy.$$

Так из (1.2) следует, что

$$\lim_{M \to M_0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{\rho} = 0. \tag{1.3}$$

Функции $\alpha(\Delta x, \Delta y)$, обладающие свойством (1.3), будем обозначать по аналогии с функциями одной переменной $o(\rho)$ при $\rho \to 0$. Применяя это обозначение, определение дифференцируемости можно переписать в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho). \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *Условие* (1.2) *эквивалентно условию*

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \;\; \rho \neq 0, \tag{1.5}$$

где $\lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

► Пусть выполнено (1.2), т. е. $\alpha = \varepsilon\rho$, где $\varepsilon \to 0$ при $\rho \to 0$. Тогда

$$\alpha = \varepsilon\rho = \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \frac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta x + \frac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\Delta y = \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}.$$

Замечая, что

$$\left|\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant 1,\quad \left|\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant 1,$$

имеем $|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon|$, $|\varepsilon_2|\leqslant|\varepsilon|$, откуда $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0$, т. е представление (1.5) получено. Пусть, наоборот, выполнено условие (1.5) т. е. $\alpha=\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$, $\rho\neq 0$, где $\varepsilon_1\to 0$ и $\varepsilon_2\to 0$ при $\rho\to 0$, тогда

$$\alpha=\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_1+\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_2\right)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=\varepsilon\rho,$$

где

$$\varepsilon=\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_1+\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\varepsilon_2,$$

и, значит, $|\varepsilon_1|\leqslant|\varepsilon|+|\varepsilon_2|$. Поэтому $\varepsilon\to 0$ при $\rho\to 0$, т. е. представление (1.2) получено. ◀

Теорема 1.1. *Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), то она непрерывна в этой точке.*

► Так как $|\Delta x|\leqslant\rho$ и $|\Delta y|\leqslant\rho$, то из формул (1.1) и (1.2) следует, что $\Delta z\to 0$ при $\rho\to 0$, а это и означает непрерывность функции в точке (x_0,y_0). ◀

Теорема 1.2. *Если функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0) и $dz=A\Delta x+B\Delta y$ — ее дифференциал в этой точке, то в этой точке у функции f существуют все частные производные и*

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=A,\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=B.\tag{1.6}$$

Таким образом,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.\tag{1.7}$$

► Согласно определению дифференцируемости

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

где

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_1=\lim_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0.\tag{1.8}$$

Полагая $\Delta y=0$, получим

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=\Delta_x z=A\Delta x+\varepsilon_1\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1=0$. Значит,

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A+\varepsilon_1.\tag{1.9}$$

Правая часть (1.9) при $\Delta x\to 0$ стремится к A, поэтому и левая часть при $\Delta x\to 0$ имеет тот же предел, а это означает, что в точке (x_0,y_0), существует частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}=A$. Аналогично, полагая $\Delta x=0$ и переходя к пределу при $\Delta y\to 0$, получим $\dfrac{\partial z}{\partial y}=B$. ◀

Следствие 1.1. *Если функция* $f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0), *то она имеет единственный дифференциал.*

► Единственность дифференциала непосредственно вытекает из формул (1.6), так как частные производные в данной точке определяются однозначно. ◄

Отметим, что из непрерывности в данной точке функции n переменных не вытекает существование у нее в этой точке частных производных. Важно заметить, что при $n \geqslant 2$ из существования даже всех частных производных в некоторой точке, не следует непрерывность в этой точке.Чтобы убедится в этом, рассмотрим функцию $f(x, y)$ равную 0, если $xy = 0$ и 1, если $xy \neq 0$. Очевидно $f(x, 0) = f(0, y) = 0$ и, значит

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Однако, эта функция разрывна в точке $(0, 0)$, так как, например, её предел вдоль прямой $y = x$ при $(x, y) \to (0, 0)$ равен 1, а $f(0, 0) = 0$.

Сформулируем достаточное условие в терминах свойств частных производных для дифференцируемости функций.

Теорема 1.3. *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *в некоторой окрестности точки* (x_0, y_0) *имеет частные производные* $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, *которые непрерывны в самой точке* (x_0, y_0). *Тогда функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в этой точке.*

► Обозначим через $S(\delta)$ δ-окрестность точки (x_0, y_0), в которой определена вместе со своими частными производными f'_x, f'_y функция f. Выберем Δx и Δy так, чтобы $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in S(\delta)$. Замечая, что

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y] + \\ + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)],$$

применим к выражениям, стоящим в квадратных скобках и являющимся приращениями функции только по одной переменной, формулу Лагранжа. Тогда

$$\Delta z = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y)\Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta y, \tag{1.10}$$

где $0 < \theta_1$, $\theta_2 < 1$, причем θ_1 и θ_2 зависят, конечно, от Δx и Δy. Если положить

$$\begin{aligned} &f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0) = \varepsilon_1, \\ &f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0) = \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{1.11}$$

то, в силу непрерывности частных производных f'_x и f'_y в точке (x_0, y_0), имеем

$$\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0. \tag{1.12}$$

Подставляя (1.11) в (1.10), получим

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

что, в силу выполнения условия (1.12) и означает дифференцируемость функции f в точке (x_0, y_0). ◄

Определение 1.2. Функция, имеющая в некоторой точке (или соответственно на некотором множестве) непрерывные частные производные, называется непрерывно дифференцируемой в этой точке (соответственно на этом множестве).

ЛЕКЦИЯ 30

3

Все определения и утверждения пункта 2 переносятся и на случай функции $y = f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, любого числа n переменных, определенной в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$. Например, условие дифференцируемости в данной точке $x^{(0)}$ в общем случае выглядит так

$$\Delta y = A_1 \Delta x_1 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \rho \to 0, \tag{1.13}$$

где

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}, \quad \Delta y = f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}),$$

$$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)} \quad (i = \overline{1, n}),$$

причем в этом случае

$$A_i = \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n}).$$

Таким образом, если функция f дифференцируема, то

$$f(x) = f\left(x^{(0)}\right) + A_1 \left(x_1 - x_1^{(0)}\right) + \ldots + A_n \left(x_n - x_n^{(0)}\right) + o(\rho), \quad \rho \to 0,$$

т. е. функция f в окрестности данной точки с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^{(0)}\right)^2}$ равна линейной функции.

В случае, когда имеет место (1.13), линейная функция

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n$$

n переменных $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$ (здесь вместо $x^{(0)}$ написано x) называется дифференциалом функции в данной точке x и обозначаются $df(x):$

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \Delta x_n. \tag{1.14}$$

Переменные Δx_i называются также дифференциалами переменных x_i и обозначаются $dx_i \, (i = \overline{1, n})$. В этих обозначениях дифференциал функции f записывается в виде

$$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots. + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n. \tag{1.15}$$

Ясно, что

$$\Delta f(x) = df(x) + o(\rho), \quad \rho \to 0.$$

Если же рассматривать дифференциал при изменении точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то он уже будет являться функцией от $2n$ переменных $x_1, \ldots x_n, dx_1, \ldots dx_n$.

Теоремы 1.1–1.3 очевидным образом обобщаются на случай n переменных.

§2. Дифференцирование сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Правила вычисления дифференциалов

1

Теорема 2.1. *Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ одного переменного t дифференцируемы в точке t_0 и пусть $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Пусть, далее, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и в некоторой окрестности точки t_0 имеет смысл суперпозиция $f(x(t), y(t))$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ имеет в точке t_0 производную $\dfrac{dz}{dt}$ и в этой точке*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{2.1}$$

или, подробнее,

$$\frac{df(x(t_0), y(t_0))}{dt} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(t_0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\,\frac{dy(t_0)}{dt}.$$

► В силу дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0)

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

представимо в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \tag{2.2}$$

где функция $\varepsilon = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ такова, что

$$\lim_{\rho\to 0}\varepsilon = 0 \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Доопределим функцию $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ в точке $(0, 0)$, положив $\varepsilon(0, 0) = 0$. Так доопределенная функция $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ является непрерывной в точке $(0, 0)$. Пусть теперь Δt — приращение переменной t и $\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$, $\Delta y = y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)$. Разделим обе части равенства (2.2) на Δt

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} \pm \varepsilon\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}. \tag{2.3}$$

При $\Delta t \to 0$ в силу непрерывности функций $x(t)$ и $y(t)$ в точке t_0 получим $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, а значит, и $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\rho = 0$. Отсюда по теореме о суперпозиции непрерывных функций

$$\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0.$$

Далее,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{x'^2(t_0) + y'^2(t_0)}.$$

Из всего сказанного следует, что при $\Delta t \to 0$ правая часть формулы (2.3) стремится к конечному пределу

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt},$$

а потому и левая часть этой формулы, т. е. $\dfrac{\Delta z}{\Delta t}$, стремится к тому же пределу, а это и означает, что в точке t_0 существует производная $\dfrac{dz}{dt}$ и выражается формулой (2.1). ◀

Замечание 2.1. Хотя в окончательную формулу производной сложной функции входят только производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$, по ходу доказательства существенно использовалось более сильное свойство этой функции, чем существование частных производных, а именно ее дифференцируемость.

Следствие 2.1. *Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ определены в некоторой окрестности точки (u_0, v_0), а функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), где $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ и в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) имеет смысл суперпозиция $f(x(u, v), y(u, v))$. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и существуют частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ в точке (u_0, v_0), то в точке (u_0, v_0) существует частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$, причем*

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}. \tag{2.4}$$

▶ Фиксируя $v = v_0$ и рассматривая сложную функцию $z = f(x(u, v_0), y(u, v_0))$ одного переменного u, согласно теореме 2.1 получим, что производная $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ в точке (u_0, v_0) существует и выражается формулой (2.4). ◀

Аналогично, если в точке (u_0, v_0) существуют частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ и $\dfrac{\partial y}{\partial v}$, то у сложной функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$ существует в точке (u_0, v_0) частная производная по v и для нее справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Рассмотрим общий n-мерный случай. Пусть в окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ задана функция $y = y(x_1, \ldots, x_n)$, а на некотором множестве $E_t \subset \mathbb{R}^k$ заданы функции $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_k)$ $(i = \overline{1, n})$ такие, что $x_i(t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)}) = x_i^{(0)}$. Пусть, далее, функция $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$ и в точке $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ существуют частные производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $(j = \overline{1, k}, i = \overline{1, n})$. Тогда, если в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ имеет смысл сложная функция $y(x(t))$, то она имеет в точке $t^{(0)}$ частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial t_j}$ $(j = \overline{1, k})$, причем

$$\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j} \quad (j = \overline{1, k}). \tag{2.5}$$

ЛЕКЦИЯ 31

2

Аналогично случаю одного переменного запись дифференциала функции многих переменных имеет один и тот же вид как относительно независимых, так и зависимых переменных.

Теорема 2.2. *Пусть функция $f(x), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, а функции $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_k), i = \overline{1, n}$, определены в некоторой окрестности точки $t^{(0)} = (t_1^{(0)}, \ldots, t_k^{(0)})$ и пусть $x_i^{(0)} = x_i(t^{(0)})$ $(i = \overline{1, n})$. Пусть, далее, в некоторой окрестности точки $t^{(0)}$ имеет смысл сложная функция $f(x(t))$. Тогда, если функции $x_i(t)$ $(i = \overline{1, n})$ имеют в точке $t^{(0)}$ непрерывные частные производные, а функция $y = f(x)$ — непрерывные частные производные в точке $x^{(0)}$, то сложная функция $y = f(x(t))$ дифференцируема в точке $t^{(0)}$ и*

$$dy = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i.$$

Короче

$$dy = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i. \tag{2.6}$$

► Заметим, что из непрерывности частных производных следует дифференцируемость этой функции, поэтому в условиях теоремы функции $f(x)$ и $x_i(t)$ дифференцируемы соответственно в точках $x^{(0)}$ и $t^{(0)}$. Из формулы (2.5) и непрерывности частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}$ $(i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, k})$ следует, что сложная функция $y = f(x(t))$ имеет в точке $t^{(0)}$ непрерывные частные производные $\dfrac{\partial y}{\partial t_j}$ $(j = \overline{1, k})$ а следовательно, она дифференцируема. Первое из равенств (2.6) следует из определения дифференциала. Докажем второе равенство. Имеем

$$dy = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial y}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_i} \right) dt_j =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_j} \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i.$$

◄

Подчеркнем, что в формуле (2.6) дифференциалы dt_j являются дифференциалами независимых переменных, а потому совпадают с их приращениями Δt_j, dx_i — дифференциалы функций, они, вообще говоря, не совпадают с приращениями Δx_i переменных x_i.

Свойство дифференциала, выражаемое формулой (2.6), называется инвариантностью формы дифференциала: дифференциал записывается одинаковым образом, несмотря на то, использованы ли в его записи дифференциалы зависимых или независимых переменных.

3

Инвариантность формы первого дифференциала широко используется при практическом вычислении дифференциалов и частных производных. Если u и v функции какого-либо числа переменных, то с помощью формулы (2.6) легко получается следующие

$$
\begin{aligned}
&1. \quad d(u+v) = du + dv.\\
&2. \quad d(uv) = vdu + udv.\\
&3. \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

► Докажем, например, формулу (2.7). Пусть $z = \dfrac{u}{v}$, где $u = u(x_1, \dots, x_n)$, $v = v(x_1, \dots, x_n)$. Замечая, что $\dfrac{dz}{du} = \dfrac{1}{v}$ и $\dfrac{dz}{dv} = -\dfrac{u}{v^2}$ согласно формуле (2.6) имеем

$$dz = \frac{1}{v}du - \frac{u}{v^2}dv = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

◄

§3. Частные производные и дифференциалы высших порядков

1

Пусть задана функция $f(x, y)$. Тогда каждая из её частных производных (если они, конечно, существуют) $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, которые называются также частными производными первого порядка, снова является функцией независимых переменных x, y и может, следовательно, также иметь частные производные. Частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначается через $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f''_{xx}, а $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ через $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ или f''_{xy}. Аналогично,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Производные f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx} и f''_{yy} называются частными производными второго порядка. Рассматривая частные производные от них, получим всевозможные частные производные третьего порядка:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

и т. д. Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функций любого числа переменных.

Определение 3.1. Частная производная (по любой из независимых переменных) от частной производной порядка $m-1$ ($m \in \mathbb{N}$, частной производной нулевого порядка для удобства обозначения считается сама функция) называется производной порядка m.

Частная производная, полученная дифференцированием по различным переменным, называется смешанной частной производной. Частная производная, полученная дифференцированием только по одной переменной, называется чистой частной производной.

Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = xy\frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \quad \left(x^2+y^2>0\right), \quad f(0,0)=0.$$

Нетрудно проверить, что $f''_{xy}(0,0) = -1$, $f''_{yx}(0,0) = 1$. Следовательно, для рассматриваемой функции $f''_{xy}(0,0) \neq f''_{yx}(0,0)$.

Тем не менее совпадение смешанных производных, отличающихся лишь порядком дифференцирования, имеет место в широком классе случаев.

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе со своими частными производными $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ в некоторой окрестности точки (x_0,y_0), причем f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда*

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0). \tag{3.1}$$

► Пусть функция $f(x,y)$ определена вместе с производными f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} в δ-окрестности точки (x_0,y_0) и пусть Δx и Δy фиксированы так, что $\Delta x^2+\Delta y^2 < \delta^2$. Будем обозначать символом Δ_x, соответственно Δ_y, приращение функции f по аргументу x, соответственно y, в точке (x_0,y_0) для всякой функции $F(x,y)$ имеем

$$\Delta_x F(x_0,y_0) = F(x_0+\Delta x, y_0) - F(x_0,y_0),$$

$$\Delta_y F(x_0,y_0) = F(x_0, y_0+\Delta y) - F(x_0,y_0).$$

Введем обозначения

$$\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f), \quad \Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f)$$

и покажем, что

$$\Delta_{xy} f = \Delta_{yx} f. \tag{3.2}$$

Действительно,

$$\begin{gathered}\Delta_{xy} f = \Delta_x(\Delta_y f) = \Delta_x\left[f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right] = \\ = \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)\right] - \left[f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\right].\end{gathered} \tag{3.3}$$

Аналогично,

$$\begin{gathered}\Delta_{yx} f = \Delta_y(\Delta_x f) = \\ = \left[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)\right] - \left[f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)\right].\end{gathered} \tag{3.4}$$

Сравнивая (3.3) и (3.4), убеждаемся в справедливости соотношения (3.2).

Положим теперь

$$\varphi(x) = f(x, y_0+\Delta y) - f(x,y_0).$$

Тогда (3.3) можно переписать в виде

$$\Delta_{xy} f = \varphi(x_0+\Delta x) - \varphi(x_0).$$

В силу того, что в рассматриваемой окрестности точки (x_0,y_0) существует частная производная f'_x, функция $\varphi(x)$ дифференцируема на отрезке с концами в точках x_0 и $x_0+\Delta x$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\Delta_{xy} f = \varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x, \quad 0<\theta_1<1.$$

Но
$$\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0),$$
а потому
$$\Delta_{xy} f = [f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)]\, \Delta x.$$
Применяя еще раз ту же теорему о конечных приращениях, но теперь уже по переменной y, будем иметь
$$\Delta_{xy} f = f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y, \quad 0 < \theta_1,\, \theta_2 < 1. \tag{3.5}$$
Совершенно аналогично, полагая
$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$
имеем
$$\begin{aligned} \Delta_{yx} f = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0) = \psi'(y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta y = \\ = [f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_3 \Delta y)]\Delta y = \\ = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y)\Delta x \Delta y, \end{aligned} \tag{3.6}$$
где $0 < \theta_3,\, \theta_4 < 1$. Согласно (3.2), левые части равенств (3.5) и (3.6) равны между собой, значит, равны и правые, приравнивая их и сокращая на $\Delta x \Delta y$ при $\Delta x \neq 0$ и $\Delta y \neq 0$, получим
$$f''_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \theta_4 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y), \tag{3.7}$$
где $0 < \theta_i < 1$ при $i = \overline{1, 4}$. В силу непрерывности частных производных f''_{xy} и f''_{yx} в точке (x_0, y_0), переходя в (3.7) к пределу при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, получаем (3.1). ◀

ЛЕКЦИЯ 32

Замечание 3.1. Из доказанной теоремы по индукции следует, что если у функции n переменных смешанные частные производные m-го порядка непрерывны в некоторой точке, а производные низших порядков непрерывны в ее окрестности, то производные порядка m в этой точке не зависят от порядка дифференцирования.

Это следует из того, что любые две последовательности дифференцирования, отличающиеся только порядком дифференцирования (т. е. такие, что по каждому фиксированному аргументу они содержат одно и тоже суммарное число дифференцирований), можно перевести одну в другую конечным числом шагов, при каждом из которых меняется порядок дифференцирования только по двум переменным, а другие остаются фиксированными. Таким образом, при каждом шаге фактически рассматривается изменение порядка дифференцирования у функции лишь двух переменных, а в этом случае выполняется условие доказанной выше теоремы. Тем самым общий случай и сводится к случаю функции двух переменных.

Поясним это на примере. Докажем, например, что

$$f'''_{xyz} = f'''_{zyx}.$$

Согласно сказанному выше, имеем последовательность

$$f'''_{xyz} = (f'_x)''_{yz} = (f'_x)''_{zy} = (f''_{xz})'_y = (f''_{zx})'_y = (f'_z)''_{xy} = (f'_z)''_{yx} = f''_{zyx}.$$

Функция, имеющая в некоторой точке (на некотором открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, называется m раз непрерывно дифференцируема в этой точке (на этом множестве).

Заметим что, для того чтобы функция имела в точке (на открытом множестве) непрерывные частные производные всех порядков до некоторого порядка m включительно, достаточно, чтобы она имела в этой точке (на этом множестве) непрерывные частные производные порядка m. Действительно, из непрерывности всех частных производных порядка m в точке (на открытом множестве), вытекает (почему?) непрерывность всех частных производных порядка $m-1$ в рассматриваемой точке (на рассматриваемом множестве). Из непрерывности же частных производных порядка $m-1$ вытекает (в случае $m > 1$) непрерывность частных производных порядка $m-2$ и т. д.

2

Пусть в области D задана некоторая функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$, имеющая непрерывные частные производные первого порядка. Тогда дифференциалом dy называется выражение

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n,$$

где $dx_1, \dots, dx_n$ — произвольные приращения переменных $x_1, \dots, x_n$.

Мы видим, что dy также является некоторой функцией от $x_1, \dots, x_n$. Если предположить существование непрерывных частных производных второго порядка для y, то dy будет иметь непрерывные частные производные первого порядка и можно говорить о дифференциале от этого дифференциала $dy : d(dy)$, который называется дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) и обозначается символом d^2y. Важно подчеркнуть, что приращения $dx_1, \ldots, dx_n$ при этом рассматриваются как постоянные и остаются одними и теми же при переходе от одного дифференциала к следующему. Таким образом, если воспользоваться правилами дифференцирования, будем иметь

$$d^2y = d(dy) = d\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n\right) =$$
$$d\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)dx_1 + d\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)dx_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)dx_n.$$

или, раскрывая,

$$\begin{gathered}
d^2y = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}dx_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n}dx_n\right)dx_1 + \\
+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n}dx_2\right)dx_2 + \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1}dx_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}dx_n\right)dx_n = \\
= \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}dx_1^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}dx_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}dx_n^2 + \\
+2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}dx_1dx_2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3}dx_1dx_3 + \ldots + 2\frac{\partial^2 y}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n.
\end{gathered}$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка и т. д. Вообще, если дифференциал $(k-1)$-го порядка d^{k-1} уже определен, то дифференциал k-го порядка d^ky определяется как дифференциал от дифференциала $(k-1)$-го порядка:

$$d^ky = d(d^{k-1}y).$$

Если для функции y существуют непрерывные частные производные всех порядков до k-го включительно, то существование этого k-го дифференциала обеспечено. Но развернутые выражения последовательных дифференциалов становятся все более и более сложными. В целях упрощения их записи прибегают к следующему приему.

Прежде всего в выражении первого дифференциала условно вынесем букву y за скобки. Тогда его символически можно будет записать следующим образом

$$dy = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)y.$$

Теперь замечаем, что если в выражении для второго дифференциала так же вынести y за скобки, то остающиеся в скобках выражение формально представляет в раскрытом виде квадрат выражения

$$\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n. \tag{3.8}$$

Поэтому второй дифференциал символически можно записать так

$$d^2y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 y. \tag{3.9}$$

Аналогично можно записать третий дифференциал и т. д. Это правило общее: при всех k будем иметь символическое равенство

$$d^k y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k y, \tag{3.10}$$

которое надлежит понимать так: сначала полином, стоящий в скобках, формально возводится по правилам алгебры в степень, затем все полученные члены «умножаются» на y (которое дописывается в числителях при ∂^k) и только после этого всем символам возвращается их значение как производных и дифференциалов.

3

Дифференциалы сложных функций. Пусть имеем сложную функцию

$$y = f(x_1, \ldots, x_n),$$

где, в свою очередь,

$$x_i = \varphi(t_1, \ldots, t_m) \quad (i = \overline{1, n}).$$

В этом случае первый дифференциал может быть записан в виде

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$$

(на основании инвариантности формы первого дифференциала). Но здесь уже $dx_1, \ldots, dx_n$ являются дифференциалами не независимых переменных, а функций и, следовательно, сами будут функциями и могут не быть постоянными. Вычислив теперь второй дифференциал, будем иметь

$$\begin{gathered} d^2 y = d\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) dx_1 + d\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) dx_2 + \ldots + d\left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right) dx_n + \\ + \frac{\partial y}{\partial x_1} d\,(dx_1) + \frac{dy}{dx_2} d(dx_2) + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} d(dx_n) = \\ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^2 y + \frac{\partial y}{\partial x_1} d^2 x_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} d^2 x_n. \end{gathered}$$

Мы видим, что для дифференциалов порядка выше первого инвариантность формы, вообще говоря, не имеет места.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются линейными функциями от $t_1, \ldots, t_m$, т. е.

$$x_i = a_i^{(1)} t_1 + a_i^{(2)} t_2 + \ldots + a_i^{(m)} t_m + \beta_i \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $a_i^{(i)}$ и β_i — постоянные. В этом случае

$$dx_i = a_i^{(1)} dt_1 + a_i^{(2)} dt_2 + \ldots + a_i^{(m)} dt_m = a_i^{(1)} \Delta t_1 + a_i^{(2)} \Delta t_2 + \ldots + a_i^{(m)} \Delta t_m = \Delta x_i$$

Мы видим, что все первые дифференциалы функций не зависят от $t_1,\ t_2, \ldots, t_m$ и, следовательно, все $dx_i = 0$. Отсюда вытекает, что в случае замены независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ линейными функциями от новых переменных $t_1, \ldots, t_m$ могут быть сохранены прежние выражения даже для дифференциалов высших порядков. В них дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ совпадают с приращениями $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, но эти приращения не произвольны, а обусловлены приращениями $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., 1973. 350 с.

2. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М., 1967. 416 с.

3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959. 684 с.

4. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1. М., 1970. 588 с.

5. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 2. М., 1970. 424 с.

6. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1. М., 1973. 614 с.

7. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 2. М., 1973. 470 с.

8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1. М., 1981. 688 с.

9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 2. М., 1981. 584 с.

10. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. М., 1986. 736 с.

11. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 1. М., 1988. 712 с.

12. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 2. М., 1988. 576 с.

13. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. В 3 т. Т. 3. М., 1989. 352 с.

14. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., 1957. 552 с.

15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М., 1969. 608 с.

16. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М., 1969. 800 с.

17. Александров А. Ю., Жук В. В., Камачкин А. М. Лекции по математическому анализу (первый семестр).

Содержание