

1. Частные производные в точке. Дифференцируемость в точке. Определение. Дифференциал.

Частная производная по x_1 в точке $x^{(0)}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1} \right), \text{ где } \Delta x_1 = x_1 - x_1^{(0)}.$$

Функция $f(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0) , если существует два числа A и B такие, что $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)$ (1), $\rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ где при $\rho \neq 0$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$. (2)

Дифференциал $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$. Или $dz = z'_x dx + z'_y dy$

2. Дифференцируемость функции в точке (лемма, непрерывность, существование частных производных).

Лемма 1. Условие (2: при $\rho \neq 0$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$, $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$) эквивалентно $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ (5), $\rho \neq 0$, где $\lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$.

Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то она непрерывна в этой точке.

Теорема 2. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и $dz = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$ – ее дифференциал в этой точке, то в этой же точке у функции f существуют частные производные $\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = A$, $\frac{df}{dy} = B$ (6), где $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ (7)

Следствие 1. Если функция дифференцируема в точке (x_0, y_0) , то она имеет единственный дифференциал.

3. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

Теорема 3. Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные $\partial z / \partial x$ и $\partial z / \partial y$, которые непрерывны в самой точке (x_0, y_0) . Тогда функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в этой точке.

4. Дифференцирование сложной функции.

Теорема 4. Пусть функции $x(t)$ и $y(t)$ одного переменного t дифференцируемы в точке t_0 и пусть $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$. Пусть, далее, функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0) и в некоторой окрестности точки t_0 имеет смысл суперпозиция $f(x(t), y(t))$. Тогда функция $z = f(x(t), y(t))$ имеет в точке t_0 производную dz/dt и в этой точке $z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t$

5. Инвариантность формы первого дифференциала. Правило вычисления дифференциала.

$$dy = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i \text{ где } y = y(x_1 \dots x_n) = y(x_1(t_1 \dots t_k) \dots x_n(t_1 \dots t_k))$$

6. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ обозначают через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f''_{xx} , а $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ или f''_{xy} .

Аналогично $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$. А $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$. Производные f''_{xx} , f''_{xy} , f''_{yx} , f''_{yy} называются частными производными второго порядка. Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функции любого числа переменных. Частные производные, полученные дифференцированием по различным переменным, называются смешанными

частными производными. Частные производные, полученные дифференцированием только по одной переменной, называются чистыми производными.

Дифференциал второго порядка

$$d^2y = d(dy) = d\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n\right) = d\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1\right) + \dots + d\left(\frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n\right) = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} dx_n\right) dx_1 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} dx_n\right) dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} dx_1 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} dx_n\right) dx_n = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} dx_n^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \dots + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n$$

В общем случае $d^k y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^k y$ $y = y(x_1 \dots x_n)$

7. Теорема о равенстве смешанных производных.

Пусть функция $f(x, y)$ определена вместе со всеми своими частными производными в некоторой окрестности (x_0, y_0) . Причем f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

8. Вопрос об инвариантности дифференциалов высших порядков.

$$d^2 y = d\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) dx_1 + \dots + d\left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right) dx_n + \frac{\partial y}{\partial x_1} d(dx_1) + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} d(dx_n) \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^2 y + \frac{\partial y}{\partial x_1} d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} d^2 x_n$$

для дифференциалов порядка выше 1-го порядка инвариантность формы, вообще говоря, не имеет места

Но в случае замены независимых переменных $x_1 \dots x_n$ линейной функции от новых переменных $t_1 \dots t_m$ могут быть сохранены прежние выражения для дифференциалов высших порядков.

9. Формула Тейлора.

$$\Delta f(x_0, y_0) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y); 0 < \theta < 1 \quad (1) \text{ (Если функция имеет непрерывные производные всех порядков до } (n-1) \text{ включительно)}$$

10. Экстремум функции нескольких переменных (определение, необходимое условие).

Говорят, что функция $f(x_1 \dots x_n)$ в $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ имеет максимум (минимум), если \exists такая окрестность $(x_1^{(0)} - \Delta_1, x_1^{(0)} + \Delta_1, \dots, x_n^{(0)} - \Delta_n, x_n^{(0)} + \Delta_n)$; $\Delta_i > 0$, чтобы для всех (x_1, \dots, x_n) этой окрестности выполнялось неравенство $f(x_1 \dots x_n) \leq f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$.

Необходимое условие-обращение в нуль ВСЕХ частных производных первого порядка (если они существуют и конечные)

11. Достаточное условие экстремума. Случай функции 2-х переменных с доказательством 1-го случая.

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0) \quad \Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Пусть сначала $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Тогда если $a_{11} > 0$, то и $\Delta > 0$, т.е. функция в рассматриваемой (.) имеет минимум, а при $a_{11} < 0$ будет и $\Delta < 0$, т.е. в рассматриваемой (.) максимум

12. Достаточное условие экстремума. Случай функции 2-х переменных с доказательством 2-го случая.

$$a_{11} = f''_{x^2}(x_0, y_0), a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0), a_{22} = f''_{y^2}(x_0, y_0) \quad \Delta = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Предположим теперь $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, в этом случае, экстремума нет

В случае же $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ для решения приходится привлекать высшие производные. Этот случай не рассматривается

13. Криволинейный интеграл 1 рода. Задача о нахождении массы интегральной кривой. Определение интеграла, свойства. (по Жук)

$$\lim_{\max \Delta S_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \Delta S_i = \int_{AB} f(x, y, z) ds$$

где ΔS_i - длина дуги $M_{i-1}M_i$, а M_0, \dots, M_n - разбиение дуги АВ ($M_0=A$ $M_n=B$). Этот предел называют криволинейным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по длине дуги АВ.

Пусть вдоль некоторой спрямляемой кривой непрерывным образом распределена масса. Средней плотностью какого-либо участка такой кривой называют отношение его массы к длине, а плотностью распределения массы кривой в данной точке называют предел средней плотности участка, содержащего эту точку при стягивании последнего к данной точке. Тогда масса всей кривой будет равна этому интегралу. (Плотность распределения массы в (x, y, z) равна $f(x, y, z)$)

- 1) Значение криволинейного интеграла по длине дуги не зависит от направления кривой АВ;
- 2) Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла;
- 3) Криволинейный интеграл от суммы 2-х функций равен сумме интегралов от этих функций;
- 4) Если кривая АВ точкой С разбита на 2 части: АС и СВ, то $\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{AC} f(x, y, z) ds + \int_{CB} f(x, y, z) ds$;
- 5) Если в точке кривой АВ $f_1(x, y, z) \leq f_2(x, y, z)$, то интеграл по кривой АВ $\int_{AB} f_1(x, y, z) ds \leq \int_{AB} f_2(x, y, z) ds$;
- 6) $|\int_{AB} f(x, y, z) ds| \leq \int_{AB} |f(x, y, z)| ds$;
- 7) Если $f(x, y, z) \equiv 1$, то $\int_{AB} ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = S$, где S - длина кривой АВ;
- 8) Теорема о среднем: если $f(x, y, z)$ непрерывна на кривой АВ, то на этой кривой существует точка с координатами (α, β, γ) такая, что $\int_{AB} f(x, y, z) ds = f(\alpha, \beta, \gamma)S$, где S - длина кривой АВ.

14. Связь между криволинейным интегралом 1 рода и обыкновенным интегралом.

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (4).$$

15. Криволинейный интеграл 2 рода. Определение, свойства, вычисление криволинейного интеграла 2 рода.

Пусть АВ – непрерывная кривая в пространстве x, y, z (в частности на плоскости x, y), а $P(x, y, z)$ – произвольная функция, определённая на этой кривой. Разобьём дугу АВ точками $M_0 \dots M_n$ в направлении от А к В на n дуг. $M_i (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$

Сумма $\sum_{i=1}^n P(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \Delta x_i$ называется интегральной суммой для функции $P(x, y, z)$ на дуге АВ по переменной x . Её предел называют криволинейным интегралом по переменной x , от функции $P(x, y, z)$ по кривой АВ в направлении от А к В и обозначают символом $\int_{AB} P(x, y, z) dx$

Криволинейные интегралы по переменным x, y, z называют криволинейными интегралами 2 рода (типа). Сумму криволинейных интегралов по каждой переменной также называют криволинейным интегралом 2 рода и обозначают $\int_{AB} P(x, y, z) dx + \int_{AB} Q(x, y, z) dy + \int_{AB} R(x, y, z) dz$
Пусть $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\gamma(t)$ тогда $\int_{AB} f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \gamma(t)) \varphi'(t) dt$

В случае замкнутого контура $\int_K P dx + Q dy$ (K-замкнутая) предполагается положительный обход контура (область остаётся слева), При отрицательном обходе знак меняется

16. Понятие неявной функции. Случай 1-го уравнения. Формулировки теорем (2 теоремы).

$F(x_1 \dots x_n) = 0$ – неявная функция n переменных

Теорема 1. Пусть 1) функция $F(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными F'_x и F'_y в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$;

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда:

а) в некоторой окрестности $D_0 = (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$ точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (1) определяет y как однозначную функцию от x : $y=f(x)$;

б) в интервале $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta)$ эта функция $F(x)$ непрерывна;

в) она имеет в этом интервале непрерывную производную.

Теорема 2. Пусть 1) функция $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ определена и непрерывна в $n+1$ мерном параллелепипеде. $D = [x_1^{(0)} - \Delta_1, x_1^{(0)} + \Delta_1; \dots; x_n^{(0)} - \Delta_n, x_n^{(0)} + \Delta_n; y^{(0)} - \Delta', y^{(0)} + \Delta']$ с центром в точке $M_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y^{(0)})$;

2) частные производные $F'_{x_1}, \dots, F'_{x_n}; F'_y$ существуют и непрерывны в D ;

3) F в точке $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y^{(0)})$ обращается в 0.

4) Производная F'_y в этой точке $\neq 0$, тогда

а) в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, y^{(0)})$ уравнение (4) определяет y как однозначную функцию от x_1, x_2, \dots, x_n : $y=f(x_1, \dots, x_n)$;

б) при $x_1 = x_1^{(0)}, \dots, x_n = x_n^{(0)}$, эта функция принимает значения $y_0: f(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = y_0$;

в) функция $f(x_1, \dots, x_n)$ непрерывна (по совокупности своих аргументов);

г) имеет непрерывные частные производные: $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}$.

17. Понятие неявной функции (систем уравнений).

В общем случае может быть дана система из m уравнений с $n+m$ переменными $F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \dots F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$. Здесь речь идет об определении этой системы m переменных y_1, \dots, y_m как неявных функций от n переменных x_1, \dots, x_n ; $y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \dots y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$. При подстановке в получаются тождества:

$$F_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \dots F_m(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

18. Задача об объёме цилиндрического тела. Определение двойного интеграла.

Рассмотрим в пространстве x, y, z тело V , ограниченное сверху поверхностью S (заданной уравнением $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ – непрерывная функция), сбоку - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси oz , снизу - областью σ плоскости xy (σ -проекция поверхности S на плоскость xy). Тогда объём равен пределу суммы $\sum_{i=1}^n f(\gamma_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ или $\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy$.

19) Свойства двойного интеграла

1) Интегрируемая в области σ функция ограничена в σ ,

2) если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой области σ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно-гладких линий, то $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ существует.

1) постоянный множитель k можно выносить за знак двойного интеграла: $\iint_{\sigma} k \cdot f(x, y) dx dy = k \iint_{\sigma} f(x, y) dx dy$,

2) двойной интеграл от суммы 2-х функций равен сумме двойных интегралов слагаемых;

3) если область σ разбита на 2 не имеющие общих внутренних точек области σ_1 и σ_2 , то:

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x, y) d\sigma$$

4) если всюду в области σ $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то $\iint_{\sigma} f_1(x, y) d\sigma \leq \iint_{\sigma} f_2(x, y) d\sigma$

5) $\left| \iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_{\sigma} |f(x, y)| d\sigma$

Геометрический смысл двойного интеграла состоит в том, что $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma$ от неотрицательной непрерывно замкнутой области σ функции $f(x, y)$ равен объёму цилиндрического тела с основанием σ , ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$.

20) Вычисление двойного интеграла

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области σ , ограничена линиями $x=a, x=b, a < b, y=\varphi(x), y=\psi(x)$ ($\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ на $[a, b]$), то имеет место: $\iint_{\sigma} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$.

21) Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между двойными и криволинейными интегралами 2-го рода. Рассмотрим в плоскости XY область σ , ограниченную контуром $L(ABCD)$, состоящим из кривых $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ ($\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – непрерывные функции на $[a, b]$, причём $\varphi(x) \leq \psi(x)$) и отрезков прямых $x=a$, $x=b$. В частности, отрезки прямых AD и BC могут вырождаться в точку. Пусть функция $P(x, y)$ и её частная производная по y непрерывны в замкнутой области σ . При этих условиях существует двойной интеграл $\iint_{\sigma} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy$, причём

$$\iint_{\sigma} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = - \int_L P(x, y) dx$$

И, аналогично $\iint_{\sigma} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_L Q(x, y) dy$.

Тогда $\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$ – Формула Грина

22) Преобразование плоских областей

Предположим, что даны две плоскости, отнесённые одна к прямоугольным осям x, y , другая – к прямоугольным осям α, β . Рассмотрим 2 ограниченные замкнутые области: D на (x, y) , Δ на (α, β) . Контур или границу каждой из этих областей мы будем представлять простой кусочно-гладкой кривой. Обозначим её символом S для D и Σ для Δ . Допустим, что в Δ дана система непрерывных функций $x=x(\alpha, \beta)$, $y=y(\alpha, \beta)$ (1), которая в каждой точке (α, β) области Δ относит 1 определённую точку области D , причём ни одна точка (x, y) из D не будет пропущена, так что каждая точка отнесена хотя бы в 1 точку (α, β) из Δ . Если различным точкам (α, β) отвечают различные же точки (x, y) , то (1) однозначно разрешима относительно α и β . α и β являются однозначными функциями от x и y в области D : $\alpha = \alpha(x, y)$; $\beta = \beta(x, y)$ (2)

23) Выражение площади в криволинейных координатах

Предположим, что на плоскости XY задана некоторая область D , ограниченная простым кусочно-гладким контуром S . Пусть φ -и $x=x(\alpha, \beta)$, $y=y(\alpha, \beta)$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между этой областью и областью Δ на плоскости $\alpha\beta$, ограниченной подобным контуром Σ . Будем предполагать, что существуют и непрерывны в области Δ смешанные производные 2-го порядка для какой-либо функции из (1), напр.,

$$D = \iint_{\Delta} \left| \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} \right| d\alpha d\beta \text{ (под интегралом Якобиан)}$$

24) Замена переменных в двойном интеграле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(\alpha, \beta), y(\alpha, \beta)) |I(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta \text{ где } I(\alpha, \beta) = \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)}$$

25. Задача о массе тела. Определение тройного интеграла и его свойства.

В пространстве XYZ дана замкнутая ограниченная материальная область (тело) V . В каждой (x, y, z) известна плотность распределения массы $\mu = \mu(x, y, z)$. Будем предполагать, что $\mu(x, y, z)$ – непрерывная функция. Требуется вычислить массу m этого неоднородного тела.

$$\text{Масса равна пределу суммы } \sum_{i=1}^n \mu(a_i, b_i, c_i) \Delta V_i = \iiint_V \mu(x, y, z) dV = \iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz$$

Свойства 3-х интегралов от φ -й в непрерывных областях.

- 1) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла
- 2) Интеграл суммы равен сумме интегралов
- 3) Если область V разбита на 2 области V_1 и V_2 , не имеющих общих внутренних (x, y, z) , то интеграл по V равен сумме интегралов по V_1 и V_2

- 4) Если подинтегральная функция $f \geq 0$, то интеграл тоже ≥ 0
- 5) Если $f_1 \leq f_2$ во всей V . То интеграл от $f_1 \leq$ интеграла от f_2 в области V
- 6) Модуль интеграла меньше или равен интегралу от модуля
- 7) Если функция f непрерывна в замкнутой V , то в ней существует такая точка M , что интеграл от f по области $V = f(M) \cdot V$ (где V - объём области)

№ 26. Вычисление тройных интегралов.

Вычисление тройных интегралов производится путем последовательного вычисления интегралов меньшей кратности, путём установления границ, в виде зависимости одних переменных от других. Например, если область V ограничена по x $[a; b]$, по y $[\varphi(x); \psi(x)]$, по z $[h(x, y); H(x, y)]$ то:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x, y)}^{H(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (2)$$

№27. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (интегрирование по простому замкнутому контуру).

Если в односвязной области существуют и непрерывны P'_y и Q'_x , то для того, чтобы было выполнено интеграл не зависел от пути интегрирования, что возможно только при равенстве его нулю, необходимо и достаточно, чтобы они были равны т.к. $\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy$ (формула Грина)

28. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (независимость от пути интегрирования).

Если в односвязной области существуют и непрерывны P'_y и Q'_x , то для того, чтобы было выполнено интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы они были равны

№29. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (связь с вопросом о полном дифференциале).

Для того чтобы $\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция $\Phi(x, y)$, что $\Phi'_x = P$ и $\Phi'_y = Q$

№30. Касательная плоскость и нормаль поверхности, заданная явным уравнением.

Касательной плоскостью называется плоскость, содержащая все касательные к поверхности в данной точке. Нормалью поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через N_0 перпендикулярно касательной плоскости поверхности в этой точке. Для поверхности $z=f(x, y)$ уравнение касательной поверхности: $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$

Уравнение нормали: $(x - x_0) / f'_x(x_0, y_0) = (y - y_0) / f'_y(x_0, y_0) = -(z - z_0)$

31. Параметрическое представление поверхности. Касательная плоскость и нормаль поверхности.

Параметрическое представление поверхности осуществляется с помощью трёх уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \gamma(u, v) \end{cases} \quad (1), \text{ где функции } \varphi, \psi, \gamma \text{ определены и непрерывны в некоторой области } \Delta \text{ на}$$

плоскости параметров u, v . Параметры u и v носят название криволинейных координат соответствующих точек. Если зафиксировать один из параметров (пусть u), то получим координатную кривую

Уравнение касательной поверхности: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

$$\text{Уравнение нормали: } \frac{x-x_0}{f'x} = \frac{y-y_0}{f'y} = \frac{z-z_0}{f'z}$$

$$\text{Направляющие косинусы нормали} \quad \cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \cos \beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

32. Сторона поверхности.

Если поверхность задается явным уравнением вида $z = f(x, y)$, то можно говорить о верхней стороне или о нижней стороне поверхности. Если поверхность ограничивает некоторое тело, то легко представить себе её 2 стороны – внутреннюю, обращенную к телу, и внешнюю, обращенную наружу. . Взяв на поверхности определенную точку M_0 , проведем в ней нормаль, которой припишем одно из двухвозможных направлений. Предположим теперь, что какова бы ни была точка M_0 и каков бы ни был замкнутый контур, проходящий через M_0 и не пересекающий границы поверхности, после обхода его мы возвращаемся в исходную точку M_0 к исходному направлению нормали. При этих условиях поверхность называется двусторонней. Классический пример односторонней поверхности-лист Мёбиуса

33. Площадь кривой поверхности, заданная явным уравнением.

Пусть поверхность S задана явным уравнением $z = f(x, y)$ (1), при этом x и y изменяются в некоторой области D , ограниченной простым кусочно-гладким контуром и в этой области функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $P = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $Q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\text{Тогда } S = \iint_D \sqrt{1 + P^2 + Q^2} dx dy$$

34. Площадь поверхности (общий случай)

Рассмотрим простую гладкую (т.е. без особых точек) поверхность, заданную параметрически

$$S = \iint_{\Delta} \left(\sqrt{EG - F^2} \right) dudv$$

тогда

$$\text{где } x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = E \quad x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = G \quad x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v' = F$$

35. Поверхностный интеграл 1 рода (определение, связь с двойным интегралом).

Пусть в точке некоторой двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности S ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция $f(M) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S с помощью сетки произвольно проведенных кусочно-гладких кривых на части

S_1, S_2, \dots, S_n , взяв в каждой части S_i , по произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$ составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot S_i$$

. Предел этой суммы называется поверхностным интегралом (первого типа) от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности S и обозначается символом

$$\iint_S f(m) dS = \iint_S f(x, y, z) dS$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Связь с двойным: где

$$x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = E \quad x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = G \quad x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v' = F$$

36. Поверхностный интеграл 2 рода (определение, связь с двойным интегралом).

Пусть в точках кусочно-гладкой двусторонней поверхности S задана некоторая функция $f(x, y, z)$. Выберем определенную сторону. Разложим поверхность S сетью кусочно-гладких кривых на части $S_1 S_2 \dots S_n$. В пределах каждой части S_i . Выберем по произвольной точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$. Вычислим $f(x_i, y_i, z_i)$ и умножим на площадь проекции D_i части S_i на плоскость xy снабженную знаком. Именно, если в точках поверхности S_i нормаль, отвечающая выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол, то через D_i обозначают площадь поверхности S_i , взятой со знаком «+», если же упомянутая нормаль составляет с Oz тупой угол, то через D_i будем обозначать площадь проекции, взятой со знаком «-». Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) D_i \quad \iint_S f(x, y, z) dx dy$$

её предел равен $\iint_S f(x, y, z) dx dy$. В этом символе нет однако указания на то, какую именно сторону поверхности имеют в виду, так, что последнее приходится указывать особо. Из определения следует, что при изменении стороны интеграл меняет знак.

1) Если поверхность S задана явным уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, причем функция z непрерывна вместе со своими частными производными $P = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $Q = \frac{\partial z}{\partial y}$

то $\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_D f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) dx dy$ (3). Для верхней стороны, и то же, но с противоположным знаком для нижней

2) Если поверхность S – цилиндрическая, с образующими, параллельными оси OZ , то проекции всех частей S_i имеют площадь 0 (мы считаем, что направлением плоскости XY служит простая кривая, поэтому будет $\sigma = 0$ и интеграл (1) существует и равен 0: $\iint_S f(x, y, z) dx dy = 0$).

37. Поверхностный интеграл 2 рода (связь с двойным интегралом и поверхностным двойным интегралом 1 рода).

Связь с двойным смотри в предыдущем(36) билете

$\iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$ справа фигурируют направляющие косинусы нормали соответствующие стороне поверхности, по которой взят интеграл слева. $|\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}$ знак зависит от угла с Ox (если острый)

38. Формула Остроградского.

Ф-ла Остроградского является аналогом ф-лы Грина, но устанавливает связь между поверхностным инт. 2 рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области, огр. этой поверхностью.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \text{ или } = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

39. Формула Стокса.

Формула Стокса устанавливает связь между криволинейным и поверхностным интегралами (второго рода).

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\text{Или } \int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds$$

40. Элементы теории поля (Определение производной по заданному направлению, градиент).

Если с каждой т.М определённой пространственной области, которая может охватить и всё пространство, связана некоторая векторная или скалярная величина, то говорят, что задано поле этой величины, соответственно векторное или скалярное. Примером скалярного служит поле температуры. Поле скалярной величины U равносильно просто заданию функции $u(x, y, z)$. . Примером векторного поля может служить силовое поле. Если частные производные не обращаются одновременно в ноль, то уравнение $u(x, y, z) = C$ определяет некоторую поверхность (без особых точек), вдоль которой величина u сохраняет постоянное значение. Такая поверхность называется поверхностью уровня. Векторной линией наз-ся кривая, направление которой в каждой её точке М совпадает с направлением вектора \vec{A} , отвечающего этой точке. Если \vec{A} не обр-ся в ноль то вся рассм. область заполняется непересекающимися векторными линиями.

Производная по заданному направлению: Пусть дано скалярное поле $U(M)$. Во многих вопросах представляет интерес скорость изменения этой функции в точке или «производная» по любому заданному направлению. На произв. напр. прямой возьмём постоянную т. M_0 и переменную М. Под M_0M будем понимать величину напр. отрезка от M_0M , т.е. длину его со знаком «+» если напр. M_0M совпадает с напр. оси l, и «-» в обратном случае. Пусть $M \rightarrow M_0$. Производная от функции $U(M)$ в т. M_0 по направлению l называется $\lim_{M \rightarrow M_0} \left(\frac{U(M) - U(M_0)}{M_0M} \right)$. Он обозначается символом $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma$$

Градиент-это вектор $\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right)$. Его модуль равен наибольшему значению производной в данной точке

41. Элементы теории поля (Поток вектора, формула Остроградского, дивергенция, циркуляция, формула Стокса).

$\iint_S (A_x \cos\alpha + A_y \cos\beta + A_z \cos\gamma) ds$ называется потоком вектора \vec{A} через пов-ть S в указ. сторону. Этот интеграл можно переписать в виде: $\iint_S A_n ds$

Дивергенция: $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. Если $\text{div}=0$, то поле называется соленоидальным (трубчатым).

ф-ла Остроградского переписывается в виде $\iint_S A_n ds = \iiint_V (\text{div } \vec{A}) dV$

$\int_l A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_l A_l dl$ - лин. интеграл от вектора \vec{A} вдоль кривой l. В случае замн. кривой этот интеграл наз. циркуляцией вектора \vec{A} вдоль l.

По ф-ле Стокса циркуляция вектора \vec{A} вдоль этого контура может быть выражена пов. интегралом: $\int_l A_l dl = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos \gamma \right\} ds$

43. Предельный переход под знаком интеграла (случай собственных интегралов).

Рассмотрим интеграл: $Y(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ Пусть Y , область изменения параметра y , имеет предельную точку: y_0 . Рассмотрим вопрос о пределе функции (3) при $y \rightarrow y_0$.

Теорема 1: Если функция $f(x, y)$ при постоянном y непрерывна по x на $[a, b]$ и при $y \rightarrow y_0$ стремится к предельной функции $\phi(x)$ равномерно относительно $x \in [a, b]$, то $\lim_{y \rightarrow y_0} Y(y) = \int_a^b \phi(x) dx$

44. Правило Лейбница (случай собственных интегралов)

Формула $\lim_{y \rightarrow y_0} Y(y) = \int_a^b \phi(x) dx$ (4) может быть переписана в виде - $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx$. При некоторых условиях для вычисления производной - $Y'(y)$ может быть

применена формула: $Y'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$ (5).

Теорема 2 (Правило Лейбница): Пусть функция $f(x, y)$, определённая на $[a, b; c, d]$, будет непрерывна по x на $[a, b]$ при любом постоянном $y \in [c, d]$. Пусть на $[a, b; c, d]$ существует частная производная $f'_y(x, y)$, непрерывная как функция двух переменных, тогда при любом $y \in [c, d]$ имеет место формула (5)

45. Интегралы вида $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$. Непрерывность, дифференцируемость.

Рассмотрим $Y(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ (8)

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике $[a, b; c, d]$, а кривые $x = \alpha(y), x = \beta(y)$ ($c \leq y \leq d$) непрерывны и не выходят за его пределы, тогда (8) непрерывная функция от $y \in [c, d]$.

Если в условиях предыдущей теоремы функция $f(x, y)$ имеет в прямоугольнике $[a, b; c, d]$ непрерывную производную $f'_y(x, y)$, а также существуют производные $\alpha'(y)$ и $\beta'(y)$, то интеграл (8) имеет производную по y , которая выражается:

$$Y'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y) \cdot f(\beta(y), y) - \alpha'(y) \cdot f(\alpha(y), y)$$

46. Равномерная сходимость интегралов (определение, критерий сходимости, достаточный признак)

Пусть функция $f(x, y)$ задана для всех значений $x \geq a$ и всех y из U . Пусть для любого y из U существует интеграл $I(y) = \int_a^\infty f(x, y) dx$

Интеграл $I(y)$ называется равномерно сходящимся относительно y из U , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $A_0 \geq a$, что лишь только $A > A_0$, то будет выполнено неравенство: $\left| \int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \int_A^\infty f(x, y) dx < \varepsilon$

(Критерий Коши) Для того, чтобы интеграл (1) сходился равномерно относительно y в U необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое число A_0 , чтобы неравенство выполнял ось одновременно для всех y лишь только $A' > A_0$ и $A > A_0$

Нетрудно сформулировать условия необходимые и достаточные для равномерной сходимости и установить достаточный признак (самим). О_о

48. Предельный переход под знаком интеграла (случай несобственного интеграла)

Т1. Пусть $f(x, y)$, определенная для $x \geq a$ и y из Y непрерывная по x , при $y \rightarrow y_0$ стремится к предельной функции $\varphi(x)$ равномерно относительно x в любом конечном промежутке $[a, A]$ и,

кроме того, интеграл $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ равномерно сходится относительно y из Y , то

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

49. Непрерывность интеграла по параметру (несобств)

Пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна (как функция 2 переменных) для значений $x \geq a$ и значение $y \in [c, d]$. Если $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то он представляет собой непрерывную функцию параметра y в отр. $[c, d]$.

50. Интегрирование интеграла по параметру (несобств)

В теореме из прошлого билета имеет место формула

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (3)$$

52. Бета-функция.

$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$ Где $a, b > 0$. рассмотренный интеграл для положительных значений «а» и «в» сходится

1) β -функция симметрична относительно «а» и «в» (подстановкой $x = 1-t$ получаем $\beta(a, b) = \beta(b, a)$)

$$2) \beta(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} \beta(a, b-1) \quad (2)$$

3) последовательно применяя (2) получим $\beta(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

53. Гамма-функция.

интеграл $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ (1) сходится при $\forall a > 0$ и определяет функцию Γ

1) Функция $\Gamma(a)$ при $\forall a > 0$ непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков

$$2) a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$$

$$3) \Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a\Gamma(a)$$

$$4) \Gamma(n+1) = n!$$

Функция Γ является естественным распространением на область любых полож. значений аргумента функции факториала, определенной лишь для натуральных значений.