1.Частные производные в точке. Дифференцируемость в точке. Определение. Дифференциал.

Частная производная по x_1 в точке $x^{(0)}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x^{(0)}\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) = \lim_{\Delta x_1 \to 0}\left(\frac{f\left(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})}{\Delta x_1}\right)$, где $\Delta x_1 = x_1 - x_1^{(0)}$.

Функция f(x,y) называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если существует два числа A и B такие, что $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)$ (1), $\rho(M, M_0) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ где при $\rho \neq 0$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$, $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$.(2)

Дифференциал $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$. Или $dz = z'_x dx + z'_y dy$

2. Дифференцируемость функции в точке (лемма, непрерывность, существование частных производных).

Лемма 1. Условие (2: при $\rho \neq 0$, $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\rho$, $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$) эквивалентно $\alpha(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$ (5), $\rho \neq 0$, где $\lim_{\rho \to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho \to 0} \varepsilon_2 = 0$.

Теорема 1. Если функция z=f(x,y) дифференцируема в точке (x0,y0), то она непрерывна в этой точке.

Теорема 2. Если функция z=f(x,y) дифференцируема в точке (x_0, y_0) и dz=Adx+Bdy – ее дифференциал в этой точке, то в этой же точке у функции f существуют частные производные $\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = A$, $\frac{df}{dy} = B$ (6), где dz=$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$(7)

Следствие 1. Если функция дифференцируема в точке (x_0, y_0), то она имеет единственный дифференциал.

3. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

Теорема 3. Пусть функция z = f(x,y) в некоторой окрестности точки (x0,y0) имеет частные производные ∂z/∂x и ∂z/∂y, которые непрерывны в самой точке (x0,y0). Тогда функция z = f(x,y) дифференцируема в этой точке.

4. Дифференцирование сложной функции.

Теорема 4. Пусть функции x(t) и y(t) одного переменного t дифференцируемы в точке t0 и пусть x0 = x(t0), y0 = y(t0). Пусть, далее, функция z = f(x,y) дифференцируема в точке (x0,y0) и в некоторой окрестности точки t0 имеет смысл суперпозиция f(x(t),y(t)). Тогда функция z = f(x(t),y(t)) имеет в точке t0 производную dz/dt и в этой точке $z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t$

5. Инвариантность формы первого дифференциала. Правило вычисления дифференциала.

$dy = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(x(t^{(0)}))}{\partial t_j} dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i$ где $y = y(x_1..x_n) = y(x_1(t_1..t_k)..x_n(t_1..t_k))$

6. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ обозначают через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ или f''_{xx}, а $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ или f''_{xy}. Аналогично $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx}$. А $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$. Производные f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{yy} называются частными производными второго порядка. Аналогично определяются частные производные произвольного порядка и для функции любого числа переменных. Частные производные, полученные дифференцированием по различным переменным, называются смешанными частными производными. Частные производные, полученные дифференцированием только по одной переменной, называются чистыми производными.

Дифференциал второго порядка
$d^2y=d(dy)=d(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n)=d(\frac{\partial y}{\partial x_1}dx_1)+\ldots+d(\frac{\partial y}{\partial x_n}dx_n)=(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}dx_1+\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_n}dx_n)dx_1+(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_n}dx_n)dx_2+\ldots+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_n\partial x_1}dx_1+\frac{\partial^2 y}{\partial x_n\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}dx_n\right)dx_n=\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}dx_2^2+\cdots+\frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}dx_n^2+\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_3}dx_1dx_3+\cdots+2\frac{\partial^2 y}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n$

В общем случае $d^ky=(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n)^ky$ $y=y(x_1..x_n)$

<u>7.</u> Теорема о равенстве смешанных производных.

Пусть функция f(x,y) определена вместе со всеми своими частными производными в некоторой окрестности (x_0,y_0). Причем f''_{xy}, f''_{yx} непрерывны в этой точке. Тогда $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$

<u>8.</u> Вопрос об инвариантности дифференциалов высших порядков.

$$d^2y=d\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)\partial x_1+\cdots+d\left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)\partial x_n+\frac{\partial y}{\partial x_1}d(dx_1)+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}d(dx_n)$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2y+\frac{\partial y}{\partial x_1}d^2x_1+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}d^2x_n$$

для дифференциалов порядка выше 1-го порядка инвариантность формы, вообще говоря, не имеет места

Но в случае замены независимых переменных $x_1 \ldots x_n$ линейной функции от новых переменных $t_1 \ldots t_m$ могут быть сохранены прежние выражения для дифференциалов высших порядков.

<u>9</u>. Формула Тейлора.

$\Delta f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=df(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{(n+1)}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$; 0<Ѳ<1 (1)(Если функция имеет непрерывные производные всех порядков до (n-1) включительно)

<u>10.</u> Экстремум функции нескольких переменных (определение, необходимое условие).

Говорят, что функция $f(x_1 \ldots x_n)$ в (.)$\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$имеет максимум (минимум), если ∃ такая окрестность $\left(x_1^{(0)}-\Delta_1,x_1^{(0)}+\Delta_1,\ldots,x_n^{(0)}-\Delta_n,x_m^{(0)}+\Delta_m\right)$; $\Delta_i>0$, чтобы для всех (.) этой окрестности выполнялось неравенство $f(x_1 \ldots x_m)\le f\left(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}\right)$.

Необходимое условие-обращение в нуль ВСЕХ частных производных первого порядка(если они существуют и конечные)

<u>11</u>. Достаточное условие экстремума. Случай функции 2-х переменных с доказательством 1-го случая.

$a_{11} = f''_{x^2}(x_0,y_0),\ a_{12} = f''_{xy}(x_0,y_0), a_{22} = f''_{y^2}(x_0,y_0) \quad \Delta = f(x,y) - f(x_0,y_0)$

Пусть сначала $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Тогда если $a_{11} > 0$, то и Δ > 0, т.е. функция в рассматриваемой (.) имеет минимум, а при $a_{11} < 0$ будет и Δ < 0, т.е. в рассматриваемой (.) максимум

<u>12</u>. Достаточное условие экстремума. Случай функции 2-х переменных с доказательством 2-го случая.

$a_{11} = f''_{x^2}(x_0,y_0),\ a_{12} = f''_{xy}(x_0,y_0), a_{22} = f''_{y^2}(x_0,y_0) \quad \Delta = f(x,y) - f(x_0,y_0)$

Предположим теперь $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, в этом случае, экстремума нет

В случае же $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ для решения приходится привлекать высшие производные. Этот случай не рассматривается

<u>13.</u> Криволинейный интеграл 1 рода. Задача о нахождении массы интегральной кривой. Определение интеграла, свойства.(по Жуку)

$\lim_{max\Delta S->0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\,\Delta S_i = \int_{\mathrm{AB}} f(x,y,z)ds$

где ΔS_i-длина дуги $M_{i-1}M_i$, а M_0,…M_n-разбиение дуги AB (M_0=A M_n=B). Этот предел называют криволинейным интегралом от функции f(x,y,z) по длине дуги AB.

Пусть вдоль некоторой спрямляемой кривой непрерывным образом распределена масса. Средней плотностью какого-либо участка такой кривой называют отношение его массы к длине, а плотностью распределения массы кривой в данной точке называют предел средней плотности участка, содержащего эту точку при стягивании последнего к данной точке. Тогда масса всей кривой будет равна этому интегралу. (Плотность распределения массы в (x,y,z) равна f(x,y,z))

1) Значение криволинейного интеграла по длине дуги не зависит от направления кривой AB;
2) Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла;
3) Криволинейный интеграл от суммы 2-х функций равен сумме интегралов от этих функций;
4) Если кривая AB точкой C разбита на 2 части: AC и CB, то $\int_{\mathrm{AB}} f(x,y,z)ds = \int_{\mathrm{AC}} f(x,y,z)ds + \int_{\mathrm{CB}} f(x,y,z)ds$;
5) Если в точке кривой AB $f_1(x,y,z) \le f_2(x,y,z)$, то интеграл по кривой AB $\int_{\mathrm{AB}} f_1(x,y,z)ds \le \int_{\mathrm{AB}} f_2(x,y,z)ds$;
6) $|\int_{\mathrm{AB}} f(x,y,z)ds| \le \int_{\mathrm{AB}} |f(x,y,z)|ds$;
7) Если f(x,y,z)≡1, то $\int_{\mathrm{AB}} ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = S$, где S-длина кривой AB;
8) Теорема о среднем: если f(x,y,z) непрерывна на кривой AB, то на этой кривой существует точка с координатами (α,β,γ) такая, что $\int_{\mathrm{AB}} f(x,y,z)ds = f(\alpha,\beta,\gamma)S$, где S – длина кривой AB.

14. **Связь между криволинейным интегралом 1 рода и обыкновенным интегралом.**

$\int_{\text{AB}} f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$ (4).

15. Криволинейный интеграл 2 рода. Определение, свойства, вычисление криволинейного интеграла 2 рода.

Пусть АВ – непрерывная кривая в пространстве xyz (в частности на плоскости xy), а P(x,y,z) – произвольная функция, определённая на этой кривой. Разобьём дугу АВ точками $M_0..M_n$ в направлении от А к В на n дуг. M_i $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$

Сумма $\sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\,\Delta x_i$ называется интегральной суммой для функции P(x,y,z) на дуге АВ по переменной x. Её предел называют криволинейным интегралом по переменной x, от функции P(x,y,z) по кривой АВ в направлении от А к В и обозначают символом $\int_{\text{AB}} P(x,y,z)dx$

Криволинейные интегралы по переменным x,y,z называют криволинейными интегралами 2 рода(типа). Сумму криволинейных интегралов по каждой переменной также называют криволинейным интегралом 2 рода и обозначают $\int_{\text{AB}} P(x,y,z)dx$+ $\int_{\text{AB}} Q(x,y,z)dy$+ $\int_{\text{AB}} R(x,y,z)dz$
Пусть x=φ(t), y=Ψ(t), z=γ(t) тогда $\int_{\text{AB}} f(x,y,z)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t),\Psi(t),\gamma(t)\big)\varphi'(t)dt$

В случае замкнутого контура $\int_{\text{K}}\ Pdx+Qdy$ (К-замкнутая) предполагается положительный обход контура (область остаётся слева), При отрицательном обходе знак меняется

16. **Понятие неявной функции. Случай 1-го уравнения. Формулировки теорем (2 теоремы).**

F($x_1..x_n$)=0-неявная функция n переменных

Теорема 1. Пусть 1) функция F(x,y) определена и непрерывна вместе со своими частными производными F'_x и F'_y в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$;

2) F(x_0,y_0)=0;

3) $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, тогда:

а) в некоторой окрестности $D_0 = (x_0-\Delta, x_0+\Delta; y_0-\Delta', y_0+\Delta')$ точки $M_0(x_0,y_0)$ уравнение (1) определяет y как однозначную функцию от x: y=f(x);

б) в интервале $(x_0-\Delta, x_0+\Delta)$ эта функция F(x) непрерывна;

в) она имеет в этом интервале непрерывную производную.

Теорема 2. Пусть 1) функция F(x_1,x_2,… x_n,y) определена и непрерывна в n+1 мерном параллелепипеде. D=[$x_1^{(0)}-\Delta_1, x_1^{(0)}+\Delta_1; \dots x_n^{(0)}-\Delta_n, x_n^{(0)}+\Delta_n; y^{(0)}-\Delta', y^{(0)}+\Delta'$] с центром в точке $M_0\,(x_1^{(0)},\dots x_n^{(0)},y^{(0)})$;

2) частные производные $F'_{x_1,\dots}F'_{x_n};F'_y$ существуют и непрерывны в D;

3) F в точке ($x_1^{(0)},\dots x_n^{(0)},y^{(0)}$) обращается в 0.

4) Производная F'_y в этой точке ≠0, тогда

а) в некоторой окрестности точки ($x_1^{(0)},\dots x_n^{(0)},y^{(0)}$) уравнение (4) определяет y как однозначную функцию от x_1,x_2,… x_n: y=f(x_1,… x_n);

б) при $x_1 = x_1^{(0)}, \dots x_n = x_n^{(0)}$, эта функция принимает значения y_0: $f\left(x_1^{(0)}, \dots x_n^{(0)}\right) = y_0$;

в) функция f($x_1, \dots x_n$) непрерывна (по совокупности своих аргументов);

г) имеет непрерывные частные производные: $f'_{x_1,\dots} f'_{x_n}$.

<u>17.</u> Понятие неявной функции (систем уравнений).

В общем случае может быть дана система из m уравнений с n+m переменными $F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots\ y_m) = 0 \dots F_n(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots\ y_m) = 0$. Здесь речь идет об определении этой системы m переменных $y_1, \dots\ y_m$ как неявных функций от n переменных $x_1, \dots, x_n$; $y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \dots\ y_m = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$. При подстановке в получатся тождества:

$F_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$=0 … $F_m(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$=0

<u>18.</u> Задача об объёме цилиндрического тела. Определение двойного интеграла.

Рассмотрим в пространстве xyz тело V, ограниченное сверху поверхностью S (заданной уравнением z=f(x,y), где f(x,y) – непрерывная функция), сбоку - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси oz, снизу - областью σ плоскости xy (σ-проекция поверхности S на плоскость xy). Тогда объём равен пределу суммы $\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i, \eta_i)\, \Delta\sigma_i$=$\iint_\sigma f(x,y)\,d\sigma$ или $\iint_\sigma f(x,y)\,dx\,dy$.

<u>19)</u> Свойства двойного интеграла

1) Интегрируемая в области σ функция ограничена в σ,

2) если функция f(x,y) ограничена в замкнутой области σ и непрерывна в ней всюду, кроме конечного числа кусочно-гладких линий, то $\iint_\sigma f(x,y)\,d\sigma$ существует.

1) постоянный множитель k можно выносить за знак двойного интеграла: $\iint_\sigma k \cdot f(x,y)dxdy = k \iint_\sigma f(x,y)dxdy$;
2) двойной интеграл от суммы 2-х функций равен сумме двойных интегралов слагаемых;
3) если область σ разбита на 2 не имеющие общих внутренних точек области σ_1 и σ_2, то:

$$\iint_\sigma f(x,y)d\sigma = \iint_{\sigma_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{\sigma_2} f(x,y)d\sigma$$

4) если всюду в области σ $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$, то $\iint_\sigma f_1(x,y)d\sigma \le \iint_\sigma f_2(x,y)d\sigma$
5) $\left|\iint_\sigma f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_\sigma |f(x,y)|d\sigma$

Геометрический смысл двойного интеграла состоит в том, что $\iint_\sigma f(x,y)d\sigma$ от неотрицательной непрерывно замкнутой области σ функции f(x,y) равен объёму цилиндрического тела с основанием σ, ограниченного сверху поверхностью z=f(x,y).

<u>20)</u> Вычисление двойного интеграла

Если функция f(x,y) непрерывна в замкнутой области σ, ограничена линиями x=a, x=b, a<b, y=ϕ(x), y=ψ(x) (ϕ(x) и ψ(x) – непрерывные функции на отрезке [a,b], ϕ(x)≤ψ(x) на [a,b]), то имеет место: $\iint_\sigma f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy)dx$=$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$.

21) Формула Грина

Формула Грина устанавливает связь между двойными и криволинейными интегралами 2-го рода. Рассмотрим в плоскости XY область σ, ограниченную контуром L(ABCDA), состоящим из кривых $y = \varphi(x), y = \psi(x) (\varphi(x)$ и $\psi(x) -$ непрерывные функции на $[a, b]$, причём $\varphi(x) \leq \psi(x))$ и отрезков прямых x=a, x=b. В частности, отрезки прямых AD и BC могут выродиться в точку. Пусть функция P(x,y) и её частная производная по y непрерывны в замкнутой области σ. При этих условиях существует двойной интеграл $\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy$, причём

$$\iint_\sigma \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy = -\int_L P(x,y)dx$$

И, аналогично $\iint_\sigma \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y} dxdy = \int_L Q(x,y)dy.$

Тогда $\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy$ –Формула Грина

22) Преобразование плоских областей

Предположим, что даны две плоскости, отнесённые одна к прямоугольным осям x,y, другая – к прямоугольным осям α,β. Рассмотрим 2 ограниченные замкнутые области: D на (x,y), Δ на (α,β). Контур или границу каждой из этих областей мы будем представлять простой кусочно-гладкой кривой. Обозначим её символом S для D и Σ для Δ. Допустим, что в Δ дана система непрерывных функций x=x(α,β), y=y(α,β) (1), которая в каждой точке (α,β) области Δ относит 1 определённую точку области D, причём ни одна точка (x,y) из D не будет пропущена, так что каждая точка отнесена хотя бы в 1 точку (α,β) из Δ. Если различным точкам (α,β) отвечают различные же точки (x,y), то (1) однозначно разрешима относительно α и β. α и β являются однозначными функциями от x и y в области D: α= α(x,y) ; β= β(x,y) (2)

23) Выражение площади в криволинейных координатах

Предположим, что на плоскости XY задана некоторая область D, ограниченная простым кусочно-гладким контуром S. Пусть ф-и x=x(α,β), y=y(α,β) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между этой областью и областью Δ на плоскости αβ, ограниченной подобным контуром Σ. Будем предполагать, что существуют и непрерывны в области Δ смешанные производные 2-го порядка для какой-либо функции из (1), напр.,

$D = \iint_\Delta \left|\frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}\right| d\alpha d\beta$ (под интегралом Якобиан)

24) Замена переменных в двойном интеграле

$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(\alpha,\beta), y(\alpha,\beta)) \, |I(\alpha,\beta)| d\alpha d\beta$ где $I(\alpha,\beta) = \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$

25. Задача о массе тела. Определение тройного интеграла и его свойства.

В пространстве XYZ дана замкнутая ограниченная материальная область (тело) V. В каждой (.) (X,Y,Z), известна плотность распределения массы μ=μ(x,y,z). Будем предполагать, что μ(x,y,z) – непрерывная функция. Требуется вычислить массу m этого неоднородного тела.

Масса равна пределу суммы $\sum_{i=1}^{n} \mu(ai, bi, ci)\Delta Vi = \iiint_V \mu(x,y,z)dV = \iiint_V \mu(x,y,z)dxdydz$
Свойства 3-х интегралов от ф-й в непрерывных областях.

1) Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла
2) Интеграл суммы равен сумме интегралов
3) Если область V разбита на 2 области V1 и V2, не имеющих общих внутренних (.), то интеграл по V равен сумме интегралов по V1 и V2

4) Если подинтегральная ф-ия ,>=0, то интеграл тоже >=0
5) Если f1<=f2 во всей V. То интеграл от f1<=интеграла от f2 в области V
6) Модуль интеграла меньше или равен интеграла от модуля
7) Если функция f непрерывна в замкнутой V, то в ней существует такая точка M, что интеграл от f по области V=f(M)*V (где V-объём области)

№ 26. Вычисление тройных интегралов.

Вычисление тройных интегралов производится путем последовательного вычисления интегралов меньшей кратности, путём установления границ, в виде зависимости одних переменных от других. Например, если область V ограничена по x [a;b], по y[φ(x); ψ(x)], по z [h(x,y); H(x,y)] то:

$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{h(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ (2)

№27. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (интегрирование по простому замкнутому контуру).
Если в односвязной области существуют и непрерывны P'_y и Q'_x, то для того, чтобы было выполнено интеграл не зависел от пути интегрирования,что возможно только при равенстве его нулю, необходимо и достаточно, чтобы они были равны т.к $\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_L Pdx + Qdy$ (ф-ла Грина)

<u>28.</u> Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (независимость от пути интегрирования).

Если в односвязной области существуют и непрерывны P'_y и Q'_x, то для того, чтобы было выполнено интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы они были равны

<u>№29.</u> Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (связь с вопросом о полном дифференциале).

Для того чтобы $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция Φ(x,y), что Φ'_x=P и Φ'_y=Q

<u>№30.</u> Касательная плоскость и нормаль поверхности, заданная явным уравнением.

Касательной плоскостью называется плоскость, содержащая все касательные к поверхности в данной точке. Нормалью поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через N_0 перпендикулярно касательной плоскости поверхности в этой точке. Для поверхности z=f(x,y) уравнение касательной поверхности: z-z0= f'_x(x0,y0)*(x-x0)+ f'_y(x0,y0)*(y-y0)

Уравнение нормали: (x-x0)/ f'_x(x0,y0)= (y-y0)/ f'_y(x0,y0)=-(z-z0)

31.Параметрическое представление поверхности. Касательная плоскость и нормаль оверхности.
Параметрическое представление поверхности осуществляется с помощью трёх уравнений
$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \gamma(u,v) \end{cases}$ (1) , где функции φ, ψ, γ определены и непрерывны в некоторой области Δ на плоскости параметров u, v. Параметры u и v носят название криволинейных координат соответствующих точек. Если зафиксировать один из параметров(пусть u),то получим координатную кривую

Уравнение касательной поверхности: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$$

Уравнение нормали: $\frac{x-x0}{f\prime x} = \frac{y-y0}{f\prime y} = \frac{z-z0}{f\prime z}$

Направляющие косинусы нормали $\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

32. Сторона поверхности.

Если поверхность задается явным уравнением вида $z = f(x,y)$, то можно говорить о верхней стороне или о нижней стороне поверхности. Если поверхность ограничивает некоторое тело, то легко представить себе её 2 стороны – внутреннюю, обращенную к телу, и внешнюю, обращенную наружу. . Взяв на поверхности опрееленную точку M_0, проведем в ней нормаль, которой припишем одно из двухвозможных направлений. Предположим теперь, что какова бы ни была точка M_0 и каков бы ни был замкнутый контур, проходящий через M_0 и не пересекающий границы поверхности, после обхода его мы возвращаемся в исходную точку M_0 к исходному направлению нормали. При этих условиях поверхность называется двусторонней. Классический пример односторонней поверхности-лист Мёбиуса

33. Площадь кривой поверхности, заданная явным уравнением.

Пусть поверхность S задана явным уравнением $z = f(x,y)$ (1), при этом x и y изменяются в некоторой области D, ограниченной простым кусочно-гладким контуром и в этой области функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные $P = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $Q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Тогда $S = \iint_D \sqrt{1+P^2+Q^2}\,dxdy$

34.Площадь поверхности (общий случай)

Рассмотрим простую гладкую (т.е.без особых точек) поверхность, заданную параметрически

тогда $$S = \iint_\Delta \left(\sqrt{EG - F^2}\right) dudv$$

где $x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = E \quad x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = G \quad x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = F$

35.Поверхностный интеграл 1 рода (определение, связь с двойным интегралом).

Пусть в точке некоторой двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности S ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция $f(M) = f(x,y,z)$. Разобьем поверхность S с помощью сетки произвольно проведенных кусочно-гладких кривых на части $s_1, s_2, \ldots s_n$, взяв в каждой части s_i , по произвольной точке $M_i(x_i y_i, z_i)$ составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot S_i$$

. Предел этой суммы называется поверхностным интегралом (первого типа) от функции $f(M) = f(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается символом

$$\iint_S f(m)dS = \iint_S f(x,y,z)dS$$

Связь с двойным: $\iint\limits_S f(x,y,z)dS = \iint\limits_\Delta f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\sqrt{EG-F^2}dudv$ где

$x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2=E \quad x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2=G \quad x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'=F$

36.Поверхностный интеграл 2 рода (определение, связь с двойным интегралом).

Пусть в точках кусочно-гладкой двусторонней поверхности S задана некоторая функция $f(x,y,z)$. Выберем определенную сторону. Разложим поверхность S сетью кусочно-гладких кривых на части $S_1S_2\ldots S_n$. В пределах каждой части s_i. Выберем по произвольной точке $M_i(x_iy_iz_i)$. Вычислим $f(x_iy_i,z_i)$ и умножим на площадь проекции D_i части S_i на плоскость xy снабженную знаком. Именно, если в точках поверхности s_i нормаль, отвечающая выбранной стороне поверхности составляет с осью Oz острый угол, то через D_i обозначают площадь поверхности s_i, взятой со знаком «+», если же упомянутая нормаль составляет с Oz тупой угол, то через D_i будем обозначать площадь проекции, взятой со знаком «-». Составим сумму

$\sigma=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)D_i$.её предел равен $\iint\limits_S f(x,y,z)dxdy$. В этом символе нет однако указания на то, какую именно сторону поверхности имеют в виду, так, что последнее приходится указывать особо. Из определения следует, что при изменении стороны интеграл меняет знак.

1)Если поверхность S задана явным уравнением $z=f(x,y),(x,y)\in D$, причем функция z непрерывна вместе со своими частными производными $P=\frac{\partial z}{\partial x}$ и $Q=\frac{\partial z}{\partial y}$

то $\iint_S f(x,y,z)\,dxdy = \iint_D f\left(x_i,y_i,z(x_i,y_i)\right)dxdy$ (3). Для верхней стороны, и то же, но с противоположным знаком для нижней

2) Если поверхность S – цилиндрическая, с образуюшими, параллельными оси OZ, то проекции всех частей S_i имеют площадь 0 (мы считаем, что направлением плоскости XY служит простая кривая, поэтому будет $\sigma=0$ и интеграл (1) существует и равен 0: $\iint_S f(x,y,z)\,dxdy=0$.

37.Поверхностный интеграл 2 рода (связь с двойным интегралом и поверхностным двойным интегралом 1 рода).

Связь с двойным смотри в предыдущем(36) билете

$\iint_S \; P\,dydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S \; (Pcos\,\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)ds$ справа фигурируют направляющие косинусы нормали соответствующие стороне поверхности, по которой взят интеграл слева. $|cosa|=\frac{1}{\sqrt{1+x'^2_z+x'^2_y}}$ знак зависит от угла с Ox(+если острый)

38. Формула Остроградского.

Ф-ла Остроградского является аналогом ф-лы Грина,но устанавливает связь между поверхностным инт. 2 рода по замкнутой поверхности и тройным интегралом по пространственной области, огр. этой поверхностью.

$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=\iint \quad Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$ или$=\iint \quad (Pcos\alpha+Qcos\beta+Rcos\gamma)ds$

39. Формула Стокса.

Фомула Стокса устанавливает связь между криволинейным и поверхностным интегралами (второго рода).

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

Или $\int_L\ Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S\ (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})cos\gamma]ds$

40. Элементы теории поля(Определение производной по заданному направлению, градиент).

Если с каждой т.М определённой пространственной области, которая может охватить и всё пространство, связана некоторая векторная или скалярная величина, то говорят, что задано поле этой величины, соответственно векторное или скалярное. Примером скалярного служит поле температуры. Поле скалярной величины U равносильно просто заданию функции u(x,y,z). . Примером векторного поля может служить силовое поле. Если частные производные не обращаются одновременно в ноль, то уравнение u(x,y,z)=C определяет некоторую поверхность(без особых точек), вдоль которой величина u сохраняет постоянное значение. Такая поверхность называется поверхностью уровня. Векторной линией наз-ся кривая, направление которой в каждой её точке М совпадает с направлением вектора А $^{\rightarrow}$, отвечающего этой точке. Если А не обр-ся в ноль то вся рассм. область заполняется непересекающимися векторными линиями.

Производная по заданному направлению: Пусть дано скалярное поле U(M). Во многих вопросах представляет интерес скорость изменения этой функции в точке или «производная» по любому заданному направлению. На произв. напр. прямой возьмём постоянную т. M_0 и переменную М. Под M_0M будем понимать величину напр. отрезка от M_0M, т.е. длину его со знаком «+» если напр. M_0M совпадает с напр.оси l , и «-» в обратном случае. Пусть $M \to M_0$. Производная от функции U(M) в т. M_0 по направлению l называется $\lim_{M\to M_0}\left(\frac{U(M)-U(M_0)}{M_0M}\right)$. Он обозначается символом $\frac{\partial U(M)}{\partial l}$

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}cos\gamma$$

Градиент-это вектор $(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z})$. Его модуль равен наибольшему значению производной в данной точке

<u>41.</u> Элементы теории поля (Поток вектора, формула Остроградского, дивергенция, циркуляция, формула Стокса).

$\iint_S\ (A_x cos\alpha +\ A_y cos\beta +\ A_z cos\gamma)ds$ называется потоком вектора $\vec{A}$ через пов-ть S в указ. сторону. Этот интеграл можно переписать в виде: $\iint_S\ A_n ds$

Дивергенция: div $\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$. Если div=0,то поле называется соленоидальным(трубчатым.)

ф-ла Остроградского переписывается в виде $\iint_S\ A_n ds = \iiint_V\ (\mathrm{div}\,\vec{A})\,dV$

$\int_l\ A_x dx +\ A_y dy +\ A_z dz = \int_l\ A_l dl$ -лин. интеграл от вектора $\overrightarrow{A}$ вдоль кривой l. В случае замн. кривой этот интеграл наз. циркуляцией вектора $\overrightarrow{A}$ вдоль l.

По ф-ле Стокса циркуляция вектора $\overrightarrow{A}$ вдоль этого контура может быть выражена пов. интегралом: $\int_l \ A_l dl = \iint_S \{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) cos\alpha + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) cos\beta + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) cos\gamma\} ds$

43. Предельный переход под знаком интеграла (случай собственных интегралов).

Рассмотрим интеграл: У(у) = $\int_a^b f(x, y)$ dx Пусть Y, область изменения параметра у , имеет предельную точку: у0. Рассмотрим вопрос о пределе функции (3) при у→у0.

Теорема 1: Если функция f(x,y) при постоянном у непрерывна по х на [a,b] и при у→у0 стремится к предельной функции ϕ(х) равномерно относительно х є [a,b], то $\lim_{y\to y0} Y(y) = \int_a^b \phi(x) dx$

44. Правило Лейбница (случай собственных интегралов)

Формула $\lim_{y\to y0} Y(y) = \int_a^b \phi(x) dx$ (4) может быть переписана в виде - $\lim_{y\to y0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y\to y0} f(x, y)\, dx$. При некоторых условиях для вычисления производной - У'(у) может быть применена формула: У'(у) = $\int_a^b f'_y(x, y) dx$ (5).

Теорема 2(Правило Лейбница): Пусть функция f(x,y), определённая на [a,b;c,d], будет непрерывна по х на [a,b] при любом постоянном у є [c,d]. Пусть на [a,b;c,d] существует частная производная f 'y(x,y), непрерывная как функция двух переменных, тогда при любом у є [c,d] имеет место формула(5)

45. Интегралы вида $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$. Непрерывность, дифференцируемость.

Рассмотрим Y(y)= $\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$ (8)

Пусть функция f(x,y) определена и непрерывна в прямоугольнике[a,b;c,d], а кривые x =α(y),x=β(y) (c≤y≤d) непрерывны и не выходят за его пределы, тогда(8) непрерывная функция от y є [c,d].

Если в условиях предыдущей теоремы функция f(x,y) имеет в прямоугольнике [a,b;c,d] непрерывную производную f 'y(x,y), а также существуют производные α '(y) и β '(y), то интеграл (8) имеет производную по y, которая выражается:

У '(y)=$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx \ + \ \beta\ '(y) \cdot f(\beta(y), y)$–α '(y)· f(α(y),y)

46. Равномерная сходимость интегралов (определение, критерий сходимости, достаточный признак)

Пусть функция f(x,y) задана для всех значений x>=a и всех y из У. Пусть для любого y из У существует интеграл I(y)=$\int_a^\infty f(x, y) dx$

Интеграл I(y) называется равномерно сходящимся относительно y из У, если для любого ε >0 найдется число A_0>=a, что лишь только A>A_0, то будет выполнено неравенство: $\left|\int_a^\infty f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx\right| = \int_A^\infty f(x, y) dx < \varepsilon$

(Критерий Коши) Для того, чтобы интеграл (1) сходился равномерно относительно у У необходимо и достаточно, чтобы для любого   >0 нашлось такое число А0, чтобы неравенство выполнял ось одновременно для всех y лишь только A'>A0 и A>A0

Нетрудно сформулировать условия необходимые и достаточные для равномерной сходимости и установить достаточный признак (самим). O_o

48. Предельный переход под знаком интеграла (случай несобственного интеграла)

Т1. Пусть f(x,y), определенная для x>=a и y из Y непрерывная по x, при y->y0 стремится к предельной функции φ(x) равномерно относительно x в любом конечном промежутке [a,A] и, кроме того, интеграл I(y)= $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ равномерно сходится относительно y из Y, то $\lim_{y\to y0}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$

49. Непрерывность интеграла по параметру (несобств)

Пусть f(x,y) определена и непрерывна (как функция 2 переменных) для значений x ≥ a и значение y ∈[c,d]. Если I(y) = $\int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ сходится равномерно относительно y ∈[c,d], то он представляет собой непрерывную функцию параметра y в отр. [c,d].

50. Интегрирование интеграла по параметру (несобств)

В теореме из прошлого билета имеет место формула

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d dy\int_a^{\infty} f(x,y)dx = \int_a^{\infty} dx\int_c^d f(x,y)dy\ (3)$$

52. Бета-функция.

β(a,в) = $\int_0^1 \mathrm{x}^{\mathrm{a}-1}(1-\mathrm{x})^{\mathrm{в}-1}\,dx$ Где a,в > 0. рассмотренный интеграл для положительных значений «a» и «в» сходится

1) β-функция симметрична относительно «a» и «в» (подстановкой x =1-t получаем β(a,в)= β(в,a))

2) β(a,в) = $\frac{\mathrm{в}-1}{\mathrm{a}+\mathrm{в}-1}$β(a,в-1) (2)

3)последовательно применяя (2) получим β(m,n) = $\frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$

53. Гамма-функция.

интеграл Г(a) = $\int_0^{\infty} \mathrm{x}^{\mathrm{a}-1}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,dx$ (1) сходится при ∀ a > 0 и определяет функцию Г

1)Функция Г(a) при ∀ a > 0 непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков

2)aГ(a) = Г(a+1)

3) Г(a+n) = (a+n-1)(a+n-2)…(a+1)a Г(a)

4) Г(n+1) = n!

Функция Г является естественным распространением на область любых полож. значений аргумента функции факториала, определеннойлишь для натуральных значений.