

**Вопросы, выносимые на экзамен по дисциплине  
«Теория функций комплексного переменного»  
2 курс, 4 семестр**

**Тема 1. Комплексные числа и действия над комплексными числами.**

Поле комплексных чисел (операции сложения, вычитания, умножения и деления), векторная интерпретация компл-го числа (алгебраическая, тригонометрическая и показательная). Аргумент компл-х чисел, главное значение аргумента. Модуль комплексного числа, неравенство для модуля суммы и разности двух комплексных чисел. Инверсия относительно единичной окружности. Извлечение корня из комплексного числа. Бесконечна удаленная точка. Стереографическая проекция. Сфера Римана. Последовательность комплексных чисел, необходимые и достаточные условия сходимости, предел последовательности

– . Области их границы. Связность области.

**Тема 2. Функции комплексного переменного.**

Однозначные и многозначные функции. Определение предела функции  $f(z)$  в точке  $z=z_0$ . Непрерывность функции. Определение производной функции  $f(z)$  в точке  $z$ . Необходимые и достаточные условия регулярности функции  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ . Вывод соотношений Коши-Римана в декартовой системе координат. Инвариантность условий Коши-Римана относительно поворота декартовой системы координат. Условия Коши-Римана в полярной системе координат. Определения регулярной функции  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$  по заданной вещественной или мнимой части.

**Тема 3. Элементарные функции комплексного переменного.**

Функции  $w = 1/2(z + 1/z)$ . Точки ветвления. Римановы поверхности. Области однолиственности. Показательная функция, ее свойства. Функция  $\ln(z)$ , ее свойства. Тригонометрические и гиперболические функции. Функция  $\operatorname{arccos}(z)$ , представление через логарифм. Общая степенная функция  $(c=a+ib)$ , ее свойства.

Функция Жуковского  $w = -z - 1/z$ , ее свойства.

**Тема 4. Конформные отображения.**

Геометрический смысл модуля производной регулярной функции. Геометрический смысл аргумента производной регулярной функции. Точка скрещивания  $n$ -го порядка (теорема). Свойства конформного отображения. Простейшие конформные отображения: целая степенная функция, показательная функция, логарифмическая функция, функция Жуковского, Дробно-линейная функция, ее свойства. Отображение верхней полуплоскости в единичный круг. Отображение полосы  $0 < \operatorname{Im} z < 1$  на круг. Теорема Римана о конформ. отображении.

**Тема 5. Интегрирование функций комплексного переменного.**

Определенный и неопределенный интеграл от функции комплексного переменного. Интегралы вида  $\int_{\gamma} f(z) dz$ , где  $\gamma$  – окружность радиуса  $R$ . Доказательство теоремы Коши для односвязной и многосвязной области. Доказательство интегральной формулы Коши для конечной области. Доказательство интегральной формулы Коши для бесконечной области. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Формулы Коши для производных. Доказательство теоремы Лиувилля. Доказательство основной теоремы алгебры.

**Тема 6. Интегралы типа Коши.**

Интегралы Коши и интегралы типа Коши. Значение интеграла типа Коши на линии интегрирования. Главное значение интеграла по Коши на замкнутой и разомкнутой кривой. Граничные значения интеграла типа Коши, доказательство леммы. Вывод формулы Сохоцкого-Племеля.

**Тема 7. Представление регулярных функций рядами.**

Бесконечные числовые ряды с комплексными членами. Представление регулярной функции в круге рядом Тейлора. Доказательство теоремы Абеля. Ряд Лорана. Теорема Вейерштрасса о функциональных рядах. Изолированные особые точки, их квалификация. Свойства ряда Лорана в окрестности особых точек. Существенно особая точка (теорема). Понятие вычета, доказательство теоремы Коши о вычетах. Формулы для определения вычета. Комплексная форма ряда Фурье. Разложение функций в комплексный ряд Фурье. Связь ряда Фурье с рядом Лорана. Аналитическое продолжение (по Вейерштрассу), теорема Римана об аналитическом продолжении, принцип симметрии.

### Тема 8. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Контурный интеграл от логарифмической производной. Число полюсов и нулей регулярной функции внутри замкнутого контура. Число нулей многочлена внутри данной кривой и в открытой комплексной плоскости. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.

Интегралы вида  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz$  Интеграл от дроби вида  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz$  .

Интегралы типа  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz$  ,  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz$  ,  $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz$  .

Доказательство леммы Жордана. Представление единичной функции контурным интегралом вида:

$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz$   $\int_{\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} dz$

### Тема 9. Операционное исчисление. Единичная функция Хэвисайда. Дельта функция Дирака, ее свойства.

Преобразование Лапласа. Основные свойства преобразования Лапласа. Интегральная формула определения оригинала по заданному изображению (формула обращения). Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа.