Министерство высшего образования РФ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Д. НОГИН

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

Санкт-Петербург 1994

УДК 517.2

Введение в математический анализ: Учеб. пособие / В. Д. Ногин; Санкт-Петерб. гос. политехн. ун-т. — СПб., 1994. 62 с.

Изложены начальные главы математического анализа, посвященные пределам и непрерывным функциям.

Предназначено студентам первого курса экономического факультета, но может быть использовано преподавателями и студентами других факультетов.

Ил.19, библиогр. 2 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс математики для студентов экономических специальностей имеет свои особенности. С одной стороны, вследствие ограниченности числа учебных часов он должен включать лишь жестко отобранный круг наиболее важных понятий и теорем, взаимоувязанных в цельном, внутренне гармоничном изложении. С другой — в нем желательно достаточно полно представить раздел по теории оптимизации, находящей в настояшее время широкое применение при решении различного рода экстремальных экономических задач. Попытки учета этих противоречивых требований привели к разработке общего подхода единообразного введения всех основных понятий дифференциального исчисления функции одной переменной, согласно которому все они связываются с решением некоторой задачи локальной аппроксимации.

Пособие содержит три главы. В первой — вводятся и обсуждаются такие фундаментальные для всей математики понятия, как множество и функция. Кроме того, здесь разъясняется использование некоторых наиболее употребительных логических символов и условных обозначений.

Во второй главе представлена теория пределов. Ее основу составляет понятие бесконечно малой функции, строгое определение которой предваряет неформальное обсуждение задачи локальной аппроксимации. Понятие предела базируется на определении бесконечно малой функции. Прослеживается связь предела с задачей локальной аппроксимации. Рассматриваются свойства предела, доказываются теоремы о пределе монотонной функции, о вложенных отрезках и теорема Больцано-Вейерштрасса.

В третьей главе изучаются непрерывные функции и их свойства. При этом понятие непрерывности вновь увязывается с задачей локальной аппроксимации. Изложение завершается введением класса элементарных функций.

В конце каждой главы приведен перечень вопросов, обычно предлагаемых на экзамене хорошо подготовленным студентам в качестве дополнительных. Многие из них намеренно сформулированы недостаточно четко и допускают неоднозначные ответы. Часть из этих вопросов заимствована из [1].

В дальнейшем предполагается выпуск в свет второй части учебного пособия под названием «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», где на основании предложенного подхода будет построен аппарат дифференциального исчисления. При этом понятие производной также будет введено в тесной связи с задачей локальной аппроксимации, которая найдет свое окончательное решение после вывода формулы Тейлора — вершины дифференциального исчисления.

Знаком ◯ отмечается начало доказательства теорем и лемм, а знаком ⊗ — конец доказательства. В пособии принята двойная нумерация формул и рисунков; первый номер означает номер главы, а второй — порядковый номер формулы или рисунка.

Автор приносит глубокую признательность всем сотрудникам кафедры высшей математики СПбГПУ, общение с которыми было не только приятным, но и крайне полезным для выработки и уточнения избранного способа изложения. Особая благодарность — Альберту Боревичу, изучившему рукопись и высказавшему целый ряд тонких замечаний, которые заметно улучшили изложение.

Глава 1. *НАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ*

Начни с корня, доберёшься и до вершины. [1]

В этой главе вводятся общие понятия, играющие принципиально важную роль в курсе математики. Их изучение было начато еще в школе.

1^0. Множества. Под *множеством* понимают набор (или совокупность) элементов. Природа элементов, составляющих множество, может быть самой различной. Например, можно говорить о множестве мыслей, о множестве свойств данного объекта и т.д. В математике часто рассматривают множества, элементами которых являются числа, т.е. *числовые* множества. Встречаются *конечные* множества, содержащие конечное число элементов, и *бесконечные* множества.

Элементы множества обычно указывают в фигурных скобках. Например, $X = \{1; 2; \sqrt{5}\}$ — конечное множество, элементами которого являются числа 1, 2, $\sqrt{5}$, а $\mathbf{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$— бесконечное множество натуральных чисел.

То, что элемент x принадлежит множеству X записывают в виде *включения* $x \in X$.

Если во множестве нет ни одного элемента, то его называют *пустым множеством* и обозначают $\emptyset$.

В том случае, когда каждый элемент множества X является элементом множества Y, пишут $X \subset Y$ и говорят, что X есть *подмножество* множества Y. На рис.1.1 приведена геометрическая иллюстрация включения $X \subset Y$, где X, Y —множества точек плоскости.

Два множества считают *равными* и при этом пишут $X = Y$, если каждый элемент множества X является элементом множества Y и, наоборот, каждый элемент множества Y является элементом множества X. Таким образом, равенство множеств $X = Y$ означает, что выполняется как включение $X \subset Y$, так и включение $Y \subset X$.

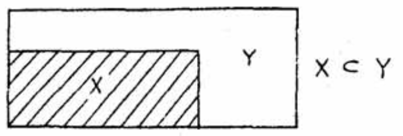

Рис. 1.1

Множества можно объединять, пересекать и вычитать одно из другого. Напомним соответствующие определения.

Объединением двух множеств X, Y называют множество, обозначаемое $X \cup Y$, элементами которого являются элементы множества X или элементы множества Y. Например,

$$\{1; 2; \sqrt{5}\} \cup \{1; 3\} = \{1; 2; 3; \sqrt{5}\}.$$

---

[1] Использованные пословицы и поговорки приведены по книге «Русские пословицы и поговорки» (М.: Художественная литература, 1988).

Пересечением множеств X и Y называют множество, обозначаемое $X \cap Y$, которое состоит из элементов, принадлежащих как множеству X, так и множеству Y. Например,

$$\{1; 2; \sqrt{5}\} \cap \{1; 3\} = \{1\}.$$

Разностью множеств X и Y называют множество, обозначаемое $X \setminus Y$, элементами которого являются элементы множества X, не принадлежащие множеству Y. Например,

$$\{1; 2; \sqrt{5}\} \setminus \{1; 3\} = \{2; \sqrt{5}\}.$$

В случае, когда X и Y — множества точек плоскости, геометрические иллюстрации введенных операций объединения, пересечения и разности даны на рис. 1.2.

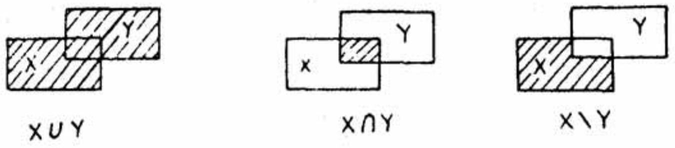

Рис. 1.2

Множество тех элементов x множества X, для которых имеет место некоторое свойство (высказывание) $P(x)$, обозначают в виде $\{x \in X | P(x)\}$.

Например, $\{x \in \mathbf{R} | 0 \leqq x \leqq 1\}$ — это отрезок оси от 0 до 1, т.е. [0,1] (здесь $\mathbf{R}$— множество вещественных чисел).

2^0. Логические символы и условные обозначения. Для сокращения записи в математике используют следующие логические символы:

$\forall$ — символ всеобщности (читается как *любой, всякий, каждый*);

$\exists$ — символ существования (читается как *существует, найдется, некоторый*);

$\Rightarrow$ — символ следования (запись $A \Rightarrow B$ читается как *из* A *следует* B);

$\Leftrightarrow$ — символ эквивалентности (читается как *необходимо и достаточно; тогда и только тогда, когда*).

Кроме перечисленных стандартных логических символов, будем использовать следующие вспомогательные знаки:

◯ — знак начала доказательства;

⊗ — знак окончания доказательства;

$:=$ —знак равенства по определению.

Пусть $P(x, y)$ — некоторое высказывание, зависящее от букв x и y. Запись

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y) : P(x, y) \tag{1.1}$$

следует читать так: для любого элемента x множества X существует такой элемент y множества Y, что выполнено высказывание $P(x, y)$. Например, запись

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists n \in \mathbf{N}) : n > x, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{N}$ есть множество натуральных чисел, означает, что для любого вещественного числа x существует такое натуральное число n, что справедливо неравенство $n > x$; другими словами, для всякого вещественного числа x можно указать натуральное число n, большее, чем x.

Заметим, что запись

$$(\exists y \in Y)(\forall x \in X) : P(x, y) \tag{1.1a}$$

в общем случае не означает то же самое, что и запись (1.1). Так, например, высказывание

$$(\exists n \in \mathbf{N})(\forall x \in \mathbf{R}) : n > x \tag{1.2a}$$

читается следующим образом: существует такое натуральное число n , что для всех вещественных чисел x выполняется неравенство $n > x$. Высказывания (1.2) и (1.2a) не являются эквивалентными. Если высказывание (1.2) истинное, то высказывание (1.2a) ложное, так как невозможно найти натуральное число, которое было бы больше любого вещественного числа.

3^0. Числовые множества. Нам известны следующие числовые множества:

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел ($\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$);

$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел ($\mathbf{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$);

$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел (т.е. таких чисел, которые можно представить в виде дроби p/q, где $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}$);

$\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел (оно содержит все рациональные и все иррациональные числа).

Указанные множества связаны друг с другом следующим образом:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \quad \mathbf{N} \neq \mathbf{Z} \neq \mathbf{Q} \neq \mathbf{R}.$$

Пусть $a, b \in \mathbf{R}$, причем $a < b$. Введем числовые подмножества:

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R} | a \leqq x \leqq b\},$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbf{R} | a \leqq x < b\},$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbf{R} | a < x \leqq b\},$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}.$$

Первое множество называют *отрезком*, второе и третье — *полуинтервалами*, а последнее множество называют *интервалом*. Каждое из указанных множеств называют *промежутком*; для обозначения промежутка нередко используется запись $\langle a, b \rangle$.

Полуинтервалы и интервалы могут быть *бесконечными* (бесконечной длины):

$$[a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} | x \geqq a\},$$

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} | x > a\},$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} | x \leqq b\},$$

$$(-\infty, +\infty) := \mathbf{R}.$$

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbf{R} | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

называют *ε–окрестностью точки* $a \in \mathbf{R}$ (рис. 1.3).

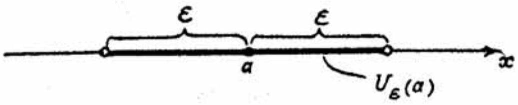

Рис. 1.3

Нетрудно понять, что пересечение (а также объединение) любого конечного числа различных окрестностей $U_{\varepsilon_1}(a), U_{\varepsilon_2}(a), \ldots, U_{\varepsilon_n}(a)$, представляет собой некоторую ε–окрестность точки a, где $\varepsilon = min\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \ldots; \varepsilon_n\}$ $(\varepsilon = max\{\varepsilon_1; \varepsilon_2; \ldots; \varepsilon_n\})$.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество

$$\dot{U}_\varepsilon := \{x \in \mathbf{R} | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon, \ x \neq a\}$$

называют *проколотой ε–окрестностью* точки a.

Пересечение, (а также объединение) любого конечного числа проколотых окрестностей точки a также является некоторой проколотой окрестностью точки a.

Определение. Числовое множество X называют *ограниченным сверху (ограниченным снизу)*, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$, называемое *верхней гранью (нижней гранью)*, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $x \leqq M (x \geqq M)$. Используя логические символы, определение ограниченного сверху множества X можно записать так:

$$(\exists M \in \mathbf{R})(\forall x \in X) : x \leqq M.$$

Если множество ограничено сверху и снизу, то его называют *ограниченным. Неограниченным* называют множество, не являющееся ограниченным. Таким образом, чтобы получить определение неограниченного множества, нужно составить отрицание к определению ограниченного множества. Например, определение неограниченного сверху множества имеет вид

$$(\forall M \in \mathbf{R})(\exists x \in X) : x > M.$$

Примером ограниченного снизу множества может служить $\mathbf{N}$ (его нижней гранью является любое число $M \leqq 1$). Это же множество $\mathbf{N}$ не является ограниченным сверху, т.е. неограничено сверху. А множество $\mathbf{R}$ неограничено и сверху, и снизу.

Определение. Если числовое множество ограничено и сверху, и снизу, то его называют *ограниченным множеством.*

Примером ограниченного множества является произвольный промежуток $\langle a, b \rangle$, где $a < b$.

Если M — верхняя грань множества X, то любое число, большее M, также является верхней гранью этого множества. Таким образом, ограниченное сверху множество имеет бесконечное множество верхних граней.

Определение. Пусть X— ограниченное сверху числовое множество. Наименьшую из всех верхних граней данного множества называют его *точной верхней гранью* (или *супремумом*) и обозначают $\sup X$.

Более подробно это определение можно сформулировать следующим образом. Число α называется *точной верхней гранью* множества $X, X \subset \mathbf{R}$ (и при этом пишут $\alpha = \sup X$), если выполняются следующие два условия:

1) $(\forall x \in X) : x \leqq \alpha$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in X) : x' > \alpha - \varepsilon$.

Первое условие означает, что α — верхняя грань множества X; а второе — гарантирует, что α — наименьшая из всех верхних граней.

Например,

$$\sup[a, b] = \sup[a, b) = b,$$

где $a < b$.

Аналогично вводится понятие *точной нижней грани (инфимума)* множества $X, X \subset \mathbf{R}$, как наибольшей из всех нижних граней множества X.

Инфимум множества X обозначают $\inf X$. Более подробно запись $\beta = \inf X$ означает выполнение следующих двух условий:

1) $(\forall x \in X) : x \geqq \beta$;

2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in X) : x' < \beta + \varepsilon$.

Например, $\inf \mathbf{N} = 1$.

Из приведенных определений не ясно, в каких случаях точные грани существуют и определяются ли они однозначно. Однако, справедливо утверждение, доказательство которого можно найти в [2].

Теорема. *Любое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет и притом единственную точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Если множество X неограничено сверху (снизу), то пишут $\sup X = +\infty (\inf X = -\infty)$.

Например,

$$\sup \mathbf{N} = \sup \mathbf{Z} = \sup \mathbf{Q} = \sup \mathbf{R} \ = +\infty.$$

4^0. Функции.

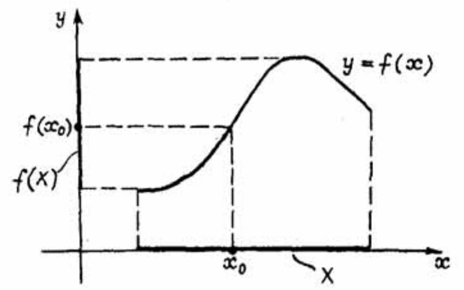

Рис. 1.4

Определение. Пусть имеются два множества X и Y и задано правило, согласно которому каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный определенный элемент $y \in Y$. В этом случае говорят, что на множестве X определена *функция* (задано *отображение*) и пишут $f : X \to Y$ или $y = f(x)$. Множество X называют *областью определения* функции f. Если $x_0 \in X$, то $f(x_0)$ называют *значением функции* f в точке x_0 или *образом элемента* x_0. Множество

$$f(X) := \{y \in Y | (\exists x \in X) : y = f(x)\}$$

называют *множеством значений* функции f, или ее *образом.*

Если X и Y — числовые множества, то функцию $f : X \to Y$ называют *числовой функцией* или *функцией одной переменной.*

Множество точек $\{(x, f(x)) | x \in X\}$ декартовой плоскости xOy называют *графиком функции* $y = f(x)$. С помощью графика можно получить наглядное представление о числовой функции (рис.1.4)

Напомним некоторые из основных определений, связанных с понятием функции. Пусть имеются две числовые функции f и g, определенные на одном и том же множестве $X, X \subset \mathbf{R}$.

Суммой двух функций f и g называют функцию (ее обозначают $f+g$), для которой выполняется равенство

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \text{ при всех } x \in X.$$

Произведением двух функций называют функцию, обозначаемую $f \cdot g$ и определяемую равенством

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \text{ при всех } x \in X.$$

Если $g(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то определено *частное* f/g двух данных функций:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \text{ при всех } x \in X.$$

Таким образом, чтобы получить значение суммы, произведения или частного двух функций f и g в точке x, нужно сложить, перемножить или разделить значения $f(x)$ и $g(x)$.

Числовую функцию f, определенную на промежутке $\langle a, b\rangle$, где $a < b$ (причем может быть $a = -\infty$ или $b = +\infty$), называют *возрастающей (убывающей)* на данном промежутке, если для любых точек $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle (x_1 < x_2)$, выполняется неравенство

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \quad (f(x_1) \geqq f(x_2)). \tag{1.3}$$

Если в (1.3) знак нестрогого неравенства $\leqq$ ($\geqq$) заменить на знак строгого неравенства $<$ ($>$), то получим определение *строго возрастающей (строго убывающей)* функции.

На рис. 1.5 приведен график некоторой строго возрастающей функции f.

Числовую функцию $f : X \to \mathbf{R}$ называют *ограниченной* на множестве X, если существует такое число $M > 0$, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $|f(x)| \leqq M$, т.е. если $(\exists M > 0)(\forall x \in X) : |f(x)| \leqq M$. Ограниченность функции равносильна ограниченности множества ее значений $f(X)$.

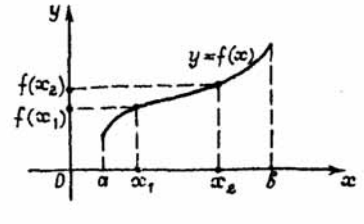

Рис. 1.5

На рис. 1.5 изображен график ограниченной функции, где в качестве M можно взять любое число, которое больше либо равно $f(b)$.

Говорят, что числовая функция $y = f(x)$, достигает своего *максимального* (*минимального*) *значения* на множестве X в точке x_0 и пишут

$$f(x_0) = \max_{x \in X} f(x), \quad (f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)),$$

если

$$f(x_0) \geqq f(x) \quad (f(x_0) \leqq f(x)) \text{ при всех } x \in X.$$

Здесь элемент $f(x_0)$ является *наибольшим* (*наименьшим*) *элементом* множества значений $f(X)$, но существует он не всегда (в этом можно убедиться на примере функции $f(x) = 1/x$, которая не достигает ни максимального, ни минимального значений на множестве положительных чисел).

Можно говорить не только о максимуме или минимуме, но и о супремуме или инфимуме числовой функции. Так, запись $\sup_{x\in X} f(x)$ $(\inf_{x\in X} f(x))$ означает точную верхнюю (нижнюю) грань множества значений функции f:

$$\sup_{x\in X} f(x) = \sup f(X) \quad (\inf_{x\in X} f(x) = \inf f(X)).$$

В соответствии с приведенной выше теоремой, если числовая функция ограничена сверху (снизу) на некотором множестве, то ее точная верхняя (нижняя) грань на этом множестве существует и является конечной, в противном случае эта грань равна $+\infty(-\infty)$.

Вопросы

1. Какие из перечисленных равенств являются истинными:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap B = A \cap (B \setminus A),$$
$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B),$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)?$$

2. Имеется ли среди высказываний

$$(\forall x \in X)(\forall y \in Y) : P(x, y),$$

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y) : P(x, y),$$

$$(\exists x \in X)(\forall y \in Y) : P(x, y),$$

$$(\exists x \in X)(\exists y \in Y) : P(x, y)$$

пара эквивалентных в том смысле, что одно из этой пары высказываний истинно тогда и только тогда, когда истинно второе высказывание?

3. Составить отрицание к высказыванию (1.1).

4. Найти $\inf\{x \in \mathbf{Q} | (\exists n \in \mathbf{N}) : \ x = 1/n\}$.

5. Задают ли равенства $y^2 = x$ и $y = \pm\sqrt{x^2}$ функции типа $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$?

6. Существует ли функция, которая является одновременно

а) возрастающей и убывающей;

б) строго возрастающей и строго убывающей;

в) ограниченной и неограниченной?

7. Найти точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $y = 1/x$ на множестве $(0, +\infty)$.

8. Какое из следующих соотношений является истинным:

$$\max_{x\in X}(f(x) + g(x)) = \max_{x\in X} f(x) + \max_{x\in X} g(x);$$

$$\max_{x\in X}(f(x) + g(x)) \geqq \max_{x\in X} f(x) + \max_{x\in X} g(x);$$

$$\max_{x\in X}(f(x) + g(x)) \leqq \max_{x\in X} f(x) + \max_{x\in X} g(x)?$$

Глава 2. *ПРЕДЕЛЫ*

Понятие предела функции, которое вводится в этой главе, является основополагающим в курсе математического анализа; с его помощью впоследствии будет определена непрерывная функция, производная и другие фундаментальные понятия, используемые в математике и ее приложениях.

2.1. Бесконечно малые функции

Мал телом, да велик делом.

1^0. Определение бесконечно малой функции. В дальнейшем изложении будут часто упоминаться функции α, которые в окрестности заданной точки x_0 принимают значения, близкие к нулю, т.е. такие функции, для которых приближенное равенство $|\alpha(x)| \approx 0$ выполнено для всех точек x, расположенных вблизи x_0. Более того, будут рассматриваться не просто «малые функции», а *бесконечно малые функции.* Точное определение бесконечно малой функции будет дано далее, а здесь с помощью конкретных примеров поясним различие между малой и бесконечно малой функциями.

Рассмотрим постоянную функцию $y = 10^{-10}$. Ее значения малы (близки к нулю) в любой точке и, в частности, в окрестности точки $x_0 = 1$. Теперь представим, что мы смотрим на часть графика функции, соответствующей указанной окрестности, через толстое увеличительное стекло (рис. 2.1.).

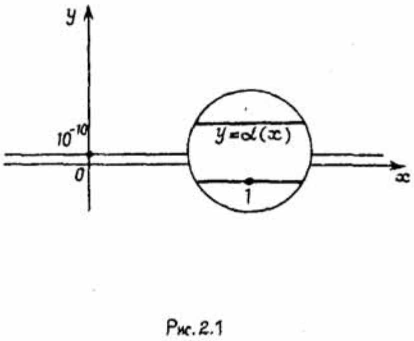

Рис.2.1

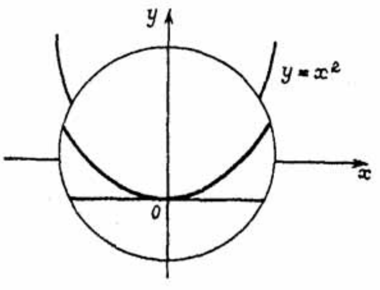

Рис.2.2

В этом случае линия графика уже не будет находиться вблизи оси абсцисс, а будет отстоять от нее на некотором внушительном расстоянии. Таким образом, «при более близком рассмотрении» данная функция теряет свойство быть малой вблизи точки $x_0 = 1$, тогда как бесконечно малая функция должна сохранять свойство быть малой в окрестности данной точки при увеличении любой сколь угодно большой кратности. С этих позиций функция $y = 10^{-10}$, будучи малой, бесконечно малой не является.

Если же обратиться к функции $y = x^2$, то нетрудно понять, что в результате увеличения сколь угодно большой кратности в пределах окрестности точки $x_0 = 0$ свойство линии графика (т.е. параболы) располагаться вблизи оси абсцисс не нарушится (рис.2.2).

Это свидетельствует о том, что функция $y = x^2$ является бесконечно малой в окрестности точки $x_0 = 0$ (и только в окрестности этой точки!).

Определение. Пусть функция $y = \alpha(x)$ определена на некоторой проколотой окрестности точки x_0. Функцию α называют *бесконечно малой функцией* (сокращенно: б.м.ф.) в окрестности точки x_0 (при стремлении $x \to x_0$), если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ выполняется для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$. Другими словами, функция α называется *б.м.ф.* в окрестности точки x_0, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) \ : |\alpha(x)| < \varepsilon \tag{2.1}$$

Главным в высказывании (2.1) является неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Запись, предшествующая этому неравенству, разъясняет, с каким именно логическим знаком $\forall$ или $\exists$ и из каких множеств должны выбираться символы ε, δ и x (δ присутствует «неявно» — через переменную x).

Геометрически выполнение этого неравенства означает, что линия графика функции $y = \alpha(x)$, отвечающая точкам $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$, находится внутри горизонтальной полосы шириной 2ε, посредине которой проходит ось абсцисс (рис.2.3).

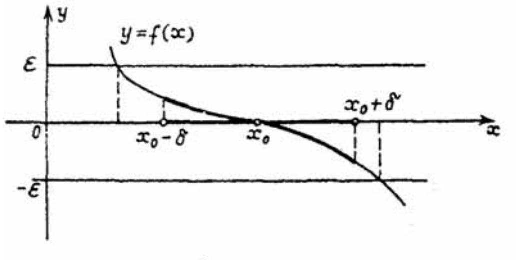

Рис. 2.3

В соответствии с изложенным получаем еще одну геометрическую иллюстрацию понятия б.м.ф.: какой бы узкой ни была указанная горизонтальная полоса, для б.м.ф. должна найтись такая проколотая δ-окрестность точки x_0, что линия графика функции, соответствующая точкам этой проколотой окрестности, располагается целиком внутри указанной полосы.

Замечание 1. Высказывание (2.1) иначе можно переписать так:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : \{(x \in \dot{U}_\delta(x_0)) \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon\}. \tag{2.1a}$$

Замечание 2. В приведенном определении б.м.ф. рассматривается не просто окрестность точки, но проколотая окрестность. Таким образом, функция α в самой точке x_0 может быть и не определена. Если же α определена в этой точке, то значение, которое она в ней принимает, никак не влияет на свойство данной функции быть или не быть б.м.ф. в окрестности данной точки.

Замечание 3. Зафиксируем произвольное положительное число M. Если в определении б.м.ф. всюду вместо ε написать $M \cdot \varepsilon$, то, очевидно, получим определение, равносильное исходному, так как от замены букв, участвующих в определении, его смысл не нарушится. В силу $M > 0$ неравенство $\varepsilon > 0$ равносильно неравенству $M \cdot \varepsilon > 0$, поэтому получаем следующее определение б.м.ф., эквивалентное исходному:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) \ : |\alpha(x)| < M \cdot \varepsilon \tag{2.1b}$$

для любого фиксированного положительного M.

Далее, в тех случаях, когда это окажется удобным, вместо определения (2.1) будет использоваться равносильное ему определение (2.1b).

Пример 1. Для постоянной функции $\alpha(x) \equiv 0$ неравенство $|\alpha(x)\ | < \varepsilon$ имеет место для всех $x \in \mathbf{R}$ при любых положительных ε. Следовательно, эта функция является б.м.ф. в окрестности каждой точки.

Пример 2. Зафиксируем произвольное число x_0. Проверим, что функция $\alpha(x) = x - x_0$ является б.м.ф. в окрестности точки x_0. Для этого выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. В данном случае неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ принимает вид $|x - x_0| < \varepsilon$ и заведомо выполняется для всех точек $x \in \dot{U}_\varepsilon(x_0)$. Следовательно, верно высказывание

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta := \varepsilon > 0)(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) : |x - x_0| < \varepsilon.$$

По определению это означает, что функция $y = x - x_0$ является бесконечно малой в окрестности точки x_0.

На рис. 2.4 изображены графики различных б.м.ф. в окрестностях точек x_1, x_2, x_3, x_4, причем в самих этих точках данные функции не определены.

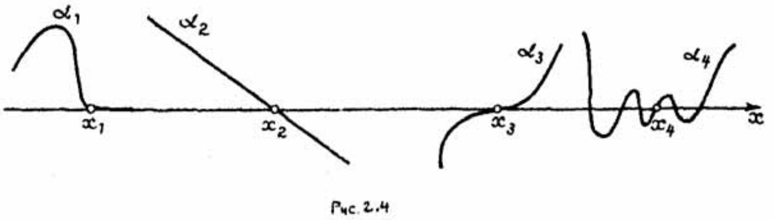

Рис. 2.4

2^0. Свойства б.м.ф. Как показывает следующая теорема, алгебраическая сумма двух б.м.ф. в окрестности одной той же точки сама является б.м.ф. в этой точке.

Теорема 1. *Пусть α и β — б.м.ф. в окрестности точки x_0. Тогда их алгебраическая сумма $\alpha \pm \beta$ является б.м.ф. в окрестности той же самой точки x_0.*

○ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу замечания 3 к определению б.м.ф. существуют положительные числа δ_1 и δ_2, такие, что:

$$|\alpha(x)| < \varepsilon/2 \;\text{ при всех }\; x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0), \tag{$*$}$$

$$|\beta(x)| < \varepsilon/2 \;\text{ при всех }\; x \in \dot{U}_{\delta_2}(x_0). \tag{$**$}$$

Пусть для определенности $\delta_1 \leqq \delta_2$ (случай $\delta_1 > \delta_2$ разбирается аналогично). Используя известное свойство модуля и неравенства $(*)-(**)$, получаем

$$|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leqq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

для всех точек $x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0)$. Таким образом, в итоге имеем

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0)) : |\alpha(x) \pm \beta(x)| \; < \varepsilon.$$

Это означает, что функция $\alpha \pm \beta$ является б.м.ф. в окрестности точки x_0. ⊗

Теорема 2. *Пусть α — б.м.ф. в окрестности точки x_0, а функция f ограничена на некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$. Тогда произведение $f \cdot \alpha$ является б.м.ф. в окрестности точки x_0.*

○ Ограниченность функции f на окрестности $\dot{U}(x_0)$ означает существование такого числа $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqq M \;\text{ при всех } x \in \dot{U}(x_0). \tag{$*$}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Функция α — б.м.ф., поэтому существует число $\delta > 0$, при котором

$$|\alpha(x)| < \frac{1}{M} \cdot \varepsilon \;\text{ при всех } x \in \dot{U}_{\delta}(x_0). \tag{$**$}$$

Теперь на основании известного свойства модуля с помощью неравенств $(*) - (**)$ получаем

$$|f(x) \cdot \alpha(x)| = |f(x)| \cdot |\alpha(x)| < \; M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

что выполняется для всех точек $x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0)$. Здесь $\dot{U}_{\delta_1}(x_0)$ означает пересечение проколотых окрестностей $\dot{U}(x_0)$ и $\dot{U}_{\delta}(x_0)$.

В итоге приходим к требуемому результату

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta_1 > 0)(\forall x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0)) : |f(x)\cdot\alpha(x)| < \varepsilon. \bigotimes$$

Теорема 3. *Пусть α и β — б.м.ф. в окрестности точки x_0. Тогда произведение $\alpha\cdot\beta$ является б.м.ф. в окрестности точки x_0.*

◯ Для доказательства достаточно убедиться в том, что, например, функция β ограничена на некоторой проколотой окрестности точки x_0, и затем воспользоваться утверждением теоремы 2. По определению б.м.ф. для любого положительного числа ε и, в частности, для $\varepsilon = 1$ должно существовать такое число $\delta > 0$, что неравенство $|\beta(x)| < 1$ выполняется для всех точек $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$. Полученное и означает ограниченность функции β на множестве $\dot{U}_\delta(x_0)$. ⊗

Свойства двух б.м.ф., содержащиеся в теоремах 1 и 3, с помощью метода математической индукции могут быть легко распространены на любое конечное число слагаемых и множителей.

3^0. Односторонние б.м.ф. Если в приведенном ранее определении б.м.ф. проколотую окрестность заменить на левую (или правую) половину этой окрестности, то получим определение левосторонней (правосторонней) б.м.ф.

Определение. Пусть функция α определена на некотором интервале $(x_0-\gamma, x_0)$ (или интервале $(x_0, x_0+\gamma)$), где γ —некоторое положительное число. Функция α называется *б.м.ф. слева (б.м.ф. справа)* в окрестности точки x_0, если

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0-\delta, x_0)) \ : |\alpha(x)| < \varepsilon;$$

$$((\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in (x_0, x_0+\delta)) \ : |\alpha(x)| < \varepsilon),$$

где, разумеется, $\delta < \gamma$.

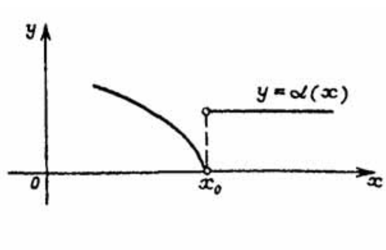

Рис.2.5

На рис. 2.5 приведен график некоторой функции $y = \alpha(x)$, которая является б.м.ф. слева в окрестности точки x_0, но не является б.м.ф. справа в окрестности этой же точки.

Ясно, что б.м.ф. является б.м.ф. как слева, так и справа в окрестности данной точки. Справедливо и обратное: если α является б.м.ф. одновременно и слева и справа в окрестности точки x_0, то она будет б.м.ф. в окрестности этой точки.

Отметим также, что установленные в предыдущем пункте свойства б.м.ф. распространяются и на односторонние б.м.ф. Чтобы получить соответствующие доказательства, нужно в доказательствах теорем 1–3 всюду вместо проколотых окрестностей писать их левые и правые половинки; при этом схема доказательств полностью сохраняется.

Важный класс односторонних б.м.ф. составляют б.м.ф. в $+\infty$ и $-\infty$. Для того, чтобы сформулировать соответствующие определения, введем множества (где $\Delta > 0$):

$$\dot{U}_\Delta(+\infty) := (\Delta, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} |\ x > \Delta\};$$

$$\dot{U}_\Delta(-\infty) := (-\infty, -\Delta) = \{x \in \mathbf{R} |\ x < -\Delta\};$$

$$\dot{U}_\Delta(\infty) := \{x \in \mathbf{R} | |x| > \Delta\},$$

которые будем называть Δ-*окрестностями* (или просто *окрестностями*) $+\infty$, $-\infty$ и ∞, соответственно.

Определение. Пусть функция α определена на некоторой окрестности $+\infty$. Эту функцию называют *б.м.ф. в окрестности* $+\infty$, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\Delta(+\infty)) : |\alpha(x)| < \varepsilon;$$

Совершенно аналогично определяется б.м.ф. в окрестности $-\infty$, а также в окрестности ∞. Графики некоторых б.м.ф. в окрестности $+\infty$ представлены на рис. 2.6.

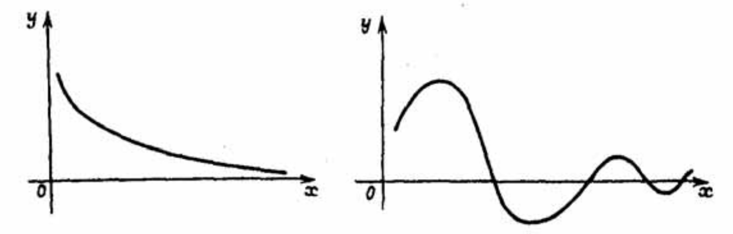

Рис. 2.6

Необходимо отметить, что свойства б.м.ф. содержащиеся в теоремах 1–3, распространяются и на б.м.ф. в окрестностях $+\infty$, $-\infty$ и ∞.

2.2. Бесконечно малые последовательности

Тот же шиворот, да навыворот.

1^0. Определение бесконечно малой последовательности.

Определение. Функцию вида $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ натурального аргумента $n \in \mathbf{N}$ называют *числовой последовательностью* и вместо $f(n)$ обычно пишут $x_n, n = 1, 2, \ldots$ При этом x_n называют *n- ым членом последовательности.* Для обозначения последовательности используют также запись $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, или короче $\{x_n\}$.

Пример 1. Пусть $f(n) = 1/n$, так что $x_1 = 1, x_2 = 1/2, \ldots$ График данной последовательности представляет собой бесконечное множество точек, удаляющихся вправо от начала координат и постепенно приближающихся к оси абсцисс (рис. 2.7,а).

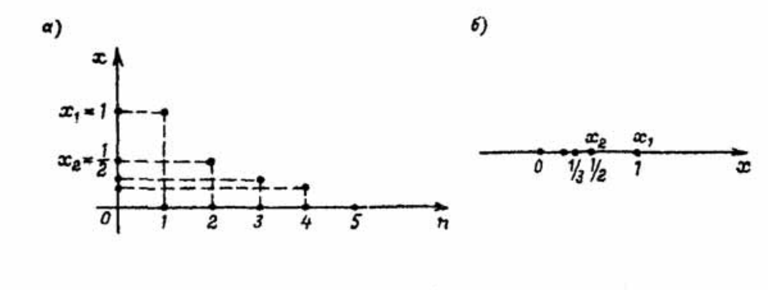

Рис. 2.7

Значительно чаще вместо подобного графического представления числовой последовательности на плоскости используют изображение членов последовательности лишь на оси ординат (см. рис. 2.7,б), располагая ее горизонтально слева направо.

Область определения функции, задающей числовую последовательность (т.е. множество натуральных чисел), «слишком разрежено» — оно не содержит ни одной точки вместе с некоторой своей окрестностью, поэтому для последовательности понятие бесконечно малой имеет смысл рассматривать лишь в окрестности $+\infty$, т.е. при $n \to +\infty$ (и то с определенной оговоркой, так как эта окрестность не является интервалом, а значит в соответствии с приведенным ранее определением окрестностью не является).

Свойство линии графика б.м.ф. в некоторой проколотой окрестности располагаться сколь угодно близко к оси абсцисс применительно к последовательности будет означать, что точки последовательности сколь угодно близко «подходят» к нулю или, другими словами, «сгущаются вблизи нуля».

Определение. Числовая последовательность α_n называется *бесконечно малой последовательностью (б.м.п.)*, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой номер n_ε, что неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$ будет справедливо для всех номеров $n > n_\varepsilon$, т.е.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$ иначе можно записать в виде $\alpha_n \in U_\varepsilon(0)$. Поэтому определение б.м.п. геометрически означает, что какую бы (сколь угодно малую) окрестность нуля $U_\varepsilon(0)$ на оси, где изображаются точки α_n, не выбрать, начиная с некоторого номера $n = n_\varepsilon + 1$, все члены последовательности α_n «попадут» в эту окрестность, а за ее пределами останется лишь какое-то число членов из $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_\varepsilon}$ (возможно все они).

Иначе говоря, если взять сколь угодно малую окрестность $U_\varepsilon(0)$ и для рассмотрения подвергнуть ее увеличению сколь угодно большой кратности, то свойство членов б.м.п. «сгущаться» вблизи нуля сохранится.

Из определения б.м.п. следует, что добавление или отбрасывание любого конечного числа начальных членов последовательности не влияет на ее свойство быть бесконечно малой. В этом проявляется локальный характер приведенного определения.

Замечание. Полезно сравнить определение б.м.п. с определением б.м.ф. в окрестности $+\infty$:

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) : |\alpha_n| < \varepsilon.$$

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\Delta > 0)(\forall x > \Delta) : |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Определение б.м.п. получается из определения б.м.ф. путем формальной замены x на n, $\alpha(x)$ на α_n и переобозначения n_ε вместо Δ; при этом вместо неравенства $n_\varepsilon > 0$ записывается включение $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, так как n_ε — номер, а значит, он должен быть элементом натурального ряда. Таким образом, между б.м.п. и б.м.ф. в окрестности $+\infty$ существует тесная связь. Можно сказать, что б.м.п. — это б.м.ф. в окрестности $+\infty$, рассматриваемая лишь при натуральных значениях аргумента. Наличие этой связи дает возможность утверждать, что все результаты, установленные для б.м.ф. в окрестности $+\infty$, справедливы и для б.м.п. При этом соответствующие доказательства для последовательностей получаются непосредственно из доказательств для б.м.ф. в окрестности $+\infty$ путем указанной ранее замены и переобозначений.

Пример 2. Проверим, что последовательность $x_n = 1/n, n = 1, 2, \ldots$ является б.м.п. Для этого возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Введем натуральное число $n_\varepsilon = [1/\varepsilon]+1$. Здесь запись $[x]$ означает *целую часть числа* x, т.е. наибольшее целое не превосходящее x. Нетрудно понять, что для любого номера $n > n_\varepsilon$ будет выполнено соотношение $n > n_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1 > 1/\varepsilon$, откуда следует неравенство $n > 1/\varepsilon$, которое равносильно неравенству $|1/n| < \varepsilon$. Таким образом, верно

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon = [1/\varepsilon] + 1 \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) \ : |\frac{1}{n}| < \varepsilon.$$

Полученный результат свидетельствует о том, что $\{1/n\}$ — б.м.п.

2^0. Свойства б.м.п. В соответствии с замечанием к определению б.м.п. свойства б.м.п. аналогичны соответствующим свойствам б.м.ф. и не требуют специальных доказательств.

Теорема $1'$. *Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — б.м.п. Тогда последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$, представляющая собой алгебраическую сумму двух данных последовательностей, является б.м.п.*

Теорема $2'$. *Пусть $\{\alpha_n\}$ — б.м.п., а последовательность $\{x_n\}$ — ограниченная. Тогда последовательность $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ является б.м.п.*

Ограниченность последовательности $\{x_n\}$ в теореме 2 означает существование такого числа $M > 0$, что неравенство $|x_n| \leqq M$ выполняется для всех $n = 1, 2, \dots$ Для того, чтобы последовательность была ограниченной, достаточно, чтобы указанное неравенство при любом фиксированном номере $n_0 \in \mathbf{N}$ было бы справедливо для всех номеров $n > n_0$ (проверить это!).

Теорема $3'$. *Пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — б.м.п. Тогда последовательность $\{\alpha_n \cdot \beta_n\}$, представляющая собой произведение двух данных последовательностей, является б.м.п.*

Определение. Если из последовательности извлечь бесконечное число членов в том порядке, в котором они находились первоначально, то получим последовательность, называемую *подпоследовательностью* данной последовательности.

Пример 3. Приведем несколько подпоследовательностей последовательности $\{1/n\}$:

$$1, 1/3, 1/5, 1/7, \dots, 1/(2n-1), \dots$$
$$1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \dots, 1/(2n), \dots$$
$$1, 1/4, 1/9, 1/16, \dots, 1/n^2, \dots$$
$$1, 1/2, 1/4, 1/16, \dots, 1/2^{n-1}, \dots$$

Теорема 4. *Любая подпоследовательность б.м.п. сама является б.м.п.*

○ Пусть $\{\alpha_n\}$ —б.м.п., а $\{\alpha'_m\}$ —ее произвольная подпоследовательность.

По определению б.м.п. выполнено

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) \ : |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Члены α'_m подпоследовательности составлены из членов α_n исходной последовательности, поэтому для каждого номера m можно указать такой номер $n(n \geqq m)$, что $\alpha'_m = \alpha_n$. Следовательно, если для любого номера $n > n_\varepsilon$ справедливо неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, то для любого номера $m > n_\varepsilon$ тем более будет верно неравенство $|\alpha'_m| < \varepsilon$. В результате получаем требуемое

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall m > n_\varepsilon) \ : |\alpha'_m| < \varepsilon. \quad \bigotimes$$

На основании утверждения теоремы 4 приведенные выше последовательности $\{1/(2n-1)\}, \{1/(2n)\}, \{1/n^2\}, \{1/2^{n-1}\}$ являются б.м.п., как подпоследовательности б.м.п. $\{1/n\}$.

2.3. Предел функции и предел последовательности

Всякое дело мера красит.

1^0. Определение предела функции.

Определение. Пусть функция f определена на некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ (здесь вместо x_0 может быть и ∞). Число А называют *пределом функции f в точке x_0* (или *при стремлении x к x_0* : $x \to x_0$), если разность $f - A$ является б.м.ф. в окрестности точки x_0, или, иначе говоря, если справедливо равенство

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ при всех } x \in \dot{U}(x_0). \tag{2.2}$$

где α— некоторая б.м.ф. в окрестности точки x_0.

Если число А является пределом функции f в точке x_0, то записывают

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \ \text{ или } \ f(x) \longrightarrow A \ (x \to x_0).$$

В том случае, когда существует некоторое число А, для которого справедливо равенство (2.2), считают что предел функции f в точке x_0 *существует* или, что функция f в точке x_0 *имеет предел.* Если же ни для какого числа А функцию f представить в виде (2.2) невозможно, то считают, что предел функции f в точке x_0 *не существует.*

Из приведенного определения следует, что существование и конкретное значение предела функции в точке x_0 зависит лишь от поведения этой функции в пределах некоторой проколотой окрестности данной точки. Это указывает на ярко выраженный окрестностный или локальный характер понятия предела функции. В частности, если $f(x) = g(x)$ для всех $x \in \dot{U}(x_0)$, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$, при условии, что указанные пределы существуют.

Смысл равенства (2.2) заключается в том, что на проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ функция f отличается от константы А лишь на некоторую б.м.ф., и значит, при всех x, достаточно близких к x_0, справедливо приближенное равенство $f(x) \approx$ A. Таким образом, в пределах некоторой достаточно малой проколотой окрестности точки x_0 исходная функция $y = f(x)$ может быть приближена (или, как говорят, аппроксимирована) постоянной функцией $y = A$. Геометрически это означает, что линия графика функции $y = f(x)$ соответствующая точкам, расположенных вблизи x_0, «близка» к горизонтальной линии $y = A$ (рис.2.8).

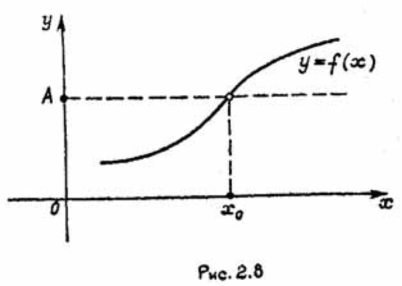

Рис. 2.8

График функции $y = f(x)$, имеющей при $x \to x_0$ предел А, представляет собой график некоторой б.м.ф., смещенный вдоль оси ординат на величину А.

Пусть α — б.м.ф. Тогда $\alpha(x) = 0+\alpha(x)$, поэтому для указанной функции справедливо равенство $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. И наоборот, если для некоторой функции α верно равенство $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, то по определению предела функции это означает, что α — б.м.ф. в окрестности точки x_0.

Пример 1. Пусть $f(x) \equiv c$ — const. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \mathbf{R}$. Имеем $f(x) = c + \alpha(x)$, где $\alpha(x) := 0$ — б.м.ф. в окрестности точки x_0. Следовательно, предел константы есть сама эта константа:

$$\lim_{x\to x_0} c = c.$$

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = x$ и произвольную точку $x_0 \in \mathbf{R}$. Выполнены равенства $f(x) = x_0 + (x - x_0) = x_0 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) := x - x_0$ — б.м.ф. в окрестности точки x_0 (см. разд. 2.1). Следовательно,

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

На основе введенного ранее определения односторонней б.м.ф. можно сформулировать определение одностороннего предела.

Определение. Пусть функция f определена на некотором интервале слева (справа) от точки x_0. Число A называют *пределом функции* f *слева (справа) в точке* x_0, если разность $f - A$ является б.м.ф. слева (справа) в точке x_0, т.е. если

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ при всех } x \in (x_0 - \delta, x_0) \ (x \in (x_0, x_0 + \delta)),$$

где δ — некоторое положительное число, а α — некоторая б.м.ф. слева (справа) в окрестности точки x_0.

Если A является пределом функции f слева в точке x_0, то записывают

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = A \text{ или } f(x) \longrightarrow A(x \to x_0-).$$

А для предела справа используют запись

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = A \text{ или } f(x) \longrightarrow A(x \to x_0+).$$

Односторонние пределы данной функции в одной и той же точке могут существовать независимо друг от друга, причем при наличии обоих этих пределов они могут оказаться как равными, так и различными. Например, на рис.2.5 изображен график функции, которая имеет в точке x_0 оба односторонних предела, не равных между собой.

Очевидно, если предел функции существует и равен A , то оба односторонних предела в той же точке также существуют и равны A.

Рассмотрим ситуацию, когда $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = A$. В этом случае верно равенство $f(x) = A + \alpha_1(x)$ для всех точек x некоторого интервала $(x_0 - \delta_1, x_0)$ слева от точки x_0 и равенство $f(x) = A + \alpha_2(x)$ для всех точек некоторого интервала $(x_0, x_0 + \delta_2)$ справа от точки x_0, где α_1 и α_2 — соответствующие односторонние б.м.ф. Введем б.м.ф. вида

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1(x) & \text{при } x_0 - \delta < x < x_0; \\ \alpha_2(x) & \text{при } x_0 < x < x_0 + \delta; \end{cases}$$

где $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда равенство $f(x) = A + \alpha(x)$ будет выполнено для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$. Это означает, что $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

Полученый результат устанавливает связь между пределом функции f и односторонними пределами: *обычный предел функции* f *в точке* x_0 *существует и равен* A *тогда и только тогда, когда оба односторонних предела данной функции в этой точке существуют и равны A.*

Замечание. В определении односторонних пределов в качестве x_0 может быть $+\infty$ или $-\infty$. Так например, запись $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ A означает, что равенство $f(x) = A + \alpha(x)$ выполняется для всех точек $x \in \dot{U}(+\infty)$, где α — некоторая б.м.ф. в окрестности $+\infty$.

2^0. Свойства предела функции. Пусть функция f определена на некоторой проколотой окрестности точки x_0 (при этом не исключен случай, когда вместо x_0 рассматривается ∞).

Теорема 1 (о единственности предела). *Если предел функции существует, то он единственный.*

○ Пусть

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ при всех } x \in \dot{U}'(x_0), \tag{2.3a}$$

$$f(x) = B + \beta(x) \text{ при всех } x \in \dot{U}''(x_0). \tag{2.3b}$$

Почленно вычитая из первого равенства второе, получим

$$0 = A - B + [\alpha(x) - \beta(x)],$$

или

$$B - A = \alpha(x) - \beta(x) \text{ при всех } \quad x \in \dot{U}'(x_0) \cap \dot{U}''(x_0).$$

Предел правой части последнего равенства при $x \to x_0$ равен нулю, значит и предел левой части так же равен нулю, т.е. $B - A = 0$, или $A = B$. ⊗

Теорема 2 (о предельном переходе в неравенстве). *Предположим, что неравенство $f(x) \geqq g(x)$ верно для всех $x \in \dot{U}(x_0)$. Если пределы функций f и g в точке x_0 существуют, то они связаны неравенством*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \geqq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

○ Для доказательства допустим противное:

$$f(x) = A + \alpha(x) \text{ при всех } x \in \dot{U}'(x_0),$$

$$g(x) = B + \beta(x) \text{ при всех } x \in \dot{U}''(x_0),$$

где α и β — б.м.ф., причем $A < B$.

Почленно вычитая из первого равенства второе, получим

$$f(x) - g(x) = A - B + [\alpha(x) - \beta(x)] \tag{2.4}$$

для всех точек $x \in \dot{U}'(x_0) \cap \dot{U}''(x_0)$. Функции α и β — б.м.ф. поэтому их разность также является б.м.ф., а значит для числа $\varepsilon := B - A > 0$ по определению б.м.ф. существует число $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\alpha(x) - \beta(x) \leqq |\alpha(x) - \beta(x)| < B - A$$

выполнено для всех точек $x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subset \dot{U}(x_0)$. С учетом изложенного из равенства (2.4) следует

$$f(x) - g(x) < A - B + B - A = 0$$

для всех точек $x \in \dot{U}_\delta(x_0) \cap \dot{U}'(x_0) \cap \dot{U}''(x_0)$. Полученный результат не совместим с тем, что по условию теоремы неравенство $f(x) \geqq g(x)$ справедливо для всех точек $x \in \dot{U}(x_0)$. $\bigotimes$

Теорема 3 (о сжатой переменной). *Предположим, что неравенства* $\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x)$ *верны для всех* $x \in \dot{U}(x_0)$, *где* φ, f *и* ψ *— некоторые функции, определенные на* $\dot{U}(x_0)$. *Кроме того, пусть* $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = A$. *Тогда* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

$\bigcirc$ По условию теоремы

$$\varphi(x) = A + \alpha(x) \text{ при всех } x \in \dot{U}'(x_0);$$

$$\psi(x) = A + \beta(x) \text{ при всех } x \in \dot{U}''(x_0).$$

Поэтому из неравенств $\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x)$ следует

$$A + \alpha(x) \leqq f(x) \leqq A + \beta(x) \text{ при всех } \quad x \in \dot{U}'''(x_0),$$

или

$$\alpha(x) \leqq f(x) - A \leqq \beta(x) \text{ при всех } \quad x \in \dot{U}'''(x_0),$$

где $\dot{U}'''(x_0) = \dot{U}(x_0) \cap \dot{U}'(x_0) \cap \dot{U}''(x_0)$. Функция β — б.м.ф., поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_1 > 0$, такое, что

$$f(x) - A \leqq \beta(x) < \varepsilon \text{ при всех } x \in \dot{U}_{\delta_1}(x_0) \cap \dot{U}'''(x_0). \tag{2.5}$$

Аналогично, существует число $\delta_2 > 0$ такое, что

$$f(x) - A \geqq \alpha(x) > -\varepsilon \text{ при всех } \quad x \in \dot{U}_{\delta_2}(x_0) \cap \dot{U}'''(x_0). \tag{2.6}$$

В итоге из неравенств (2.5) – (2.6) следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0. Это означает, что функция $f - A$ является б.м.ф.$\bigotimes$

Теорема 4 (об арифметических свойствах предела). *Пусть* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B$. *Тогда*

$$a)\ \lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$b)\ \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B;$$

$$c)\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0}f(x)}{\lim_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

○ а) равенства $f(x)\pm g(x)=A+\alpha(x)\pm B\pm\beta(x)=A\pm B+[\alpha(x)\pm\beta(x)]$ выполняются для всех точек x из некоторой проколотой окрестности точки x_0. Алгебраическая сумма двух бесконечно малых функций является б.м.ф., поэтому из приведенных выше равенств следует $\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

b) справедливость утверждения вытекает из равенств $f(x)\cdot g(x)=(A+\alpha(x))\cdot(B+\beta(x))=A\cdot B+[A\cdot\beta(x)+B\cdot\alpha(x)+\alpha(x)\cdot\beta(x)]$ с учетом того, что в квадратных скобках записана сумма б.м.ф., сама являющаяся б.м.ф.;

c) равенства

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{A}{B}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha(x)-A\beta(x)}{B}\cdot\frac{1}{B+\beta(x)}$$

выполняются для всех точек x из некоторой проколотой окрестности точки x_0. Для доказательства достаточно убедиться в том, что последнее выражение в цепочке выписанных выше равенств представляет собой б.м.ф. На основании теорем 1-3 из разд. 2.1 первый множитель является б.м.ф., поэтому остается проверить ограниченность функции $1/(B+\beta(x))$ на некоторой проколотой окрестности точки x_0 и сослаться на упомянутую ранее теорему 2. Функция β является б.м.ф., поэтому для числа $\varepsilon := |B|/2>0$ при всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0 верно неравенство $|\beta(x)|<|B|/2$. С учетом этого неравенства получаем

$$|\frac{1}{B+\beta(x)}|\ \leqq\ \frac{1}{|B|-|\beta(x)|}\ <\frac{1}{|B|-|B|/2}=\frac{2}{|B|};$$

что означает ограниченность функции $1/(B+\beta(x))$ на некоторой проколотой окрестности точки x_0.⊗

На основании утверждения b) теоремы 4, учитывая, что предел константы есть сама эта константа, приходим к следствию.

Следствие. *Пусть* $\lim_{x\to x_0}f(x)=$ А. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0}c\cdot f(x)=c\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=c\cdot A\quad(c-const),$$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

Анализ доказательств теорем 1-4 показывает, что они сохраняют свою силу и в случае, если содержащиеся в них пределы понимать в одностороннем смысле. В частности, теоремы 1-4 имеют место при $x\to+\infty$ или $x\to-\infty$.

3^0. Предел последовательности. Определение предела последовательности по аналогии с пределом функции формулируется на основе введенного ранее понятия б.м.п.

Определение. Число А называют *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если последовательностьность $\{x_n - A\}$ является б.м.п., или, другими словами, если верно равенство

$$x_n = A + a_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

где α_n — некоторая б.м.п. При этом записывают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \ \text{ или } \ x_n \longrightarrow A \ (n \to \infty).$$

и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к* А. Если же ни для какого числа А равенство (2.7) не выполняется, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *расходится*, или что предел данной последовательности *не существует.*

Определение предела последовательности, так же как и определение предела функции носит локальный характер. Это выражается в том, что конечное число начальных членов последовательности не влияют на сходимость и величину предела данной последовательности. Другими словами, сходимость последовательности определяется поведением n–го члена последовательности при достаточно больших n.

Пример 3. Рассмотрим последовательность $x_n = (n+1)/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $x_n = 1 + 1/n$, причем $\{1/n\}$ — б.м.п. (см. разд.2.2). Поэтому $\lim_{n\to\infty}(n+1)/n = 1$.

Полезно сравнить данное ранее определение предела функции при $x \to +\infty$ с определением предела последовательности. В силу приведенного выше замечания к определению б.м.п. второе определение получается из первого в результате указанной ранее замены и переобозначений, причем все результаты, установленные для предела функции при $x \to +\infty$, можно переформулировать для предела последовательности.

Используя свойства предела функции при $x \to +\infty$, приведем соответствующие свойства предела последовательности.

1. *Если предел последовательности существует, то он единственный.*

2. *Предположим, что неравенство $x_n \geqq y_n$ выполняется для всех номеров $n > n_0 \in \mathbf{N}$. Если пределы последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}$ существуют, то они связаны неравенством $\lim_{n\to\infty} x_n \geqq \lim_{n\to\infty} y_n$.*

3. *Предположим, что неравенства $x_n \leqq y_n \leqq z_n$ верны для всех номеров $n > n_0 \in \mathbf{N}$. Кроме того, пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$. Тогда*

$\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

4. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim_{n\to\infty} y_n = B$. *Тогда выполнено:*

$$a) \lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = A \pm B;$$

$$b) \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = A \cdot B;$$

$$c) \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0).$$

Установим еще одно свойство сходящейся последовательности. Согласно теореме 4 из разд.2.2 любая подпоследовательность б.м.п. является б.м.п. Поэтому если для последовательности $\{x_n\}$ справедливо равенство (2.7), то для любой ее подпоследовательности будет выполнено аналогичное равенство. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

5. *Если последовательность имеет предел, то любая ее подпоследовательность имеет и притом тот же самый предел.*

Пример 4. Рассмотрим последовательность $\{(2^m+1)/2^m\}$. Эта последовательность является подпоследовательностью рассмотренной ранее последовательности $\{(n+1)/n\}$ при $n = 2^m$, предел которой равен 1. Следовательно, $\lim_{m\to\infty}(2^m+1)/2^m = 1$.

Пример 5. Пусть $x_n = (-1)^n, n = 1, 2, \ldots$ Выделим из этой последовательности две подпоследовательности — с четными и нечетными номерами: $x_{2n} = 1, x_{2n-1} = -1, n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\lim_{n\to\infty} x_{2n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = -1$. Таким образом, из данной последовательности извлечены две сходящиеся подпоследовательности с различными пределами. Согласно свойству 5 предела последовательности это означает, что исходная последовательность $\{(-1)^n\}$ не является сходящейся, т.е. предел $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

4^0. Определение предела функции на языке последовательностей. Как показывает следующая лемма, тому факту, что предел функции существует, можно дать определенную интерпретацию в терминах специального вида последовательностей.

Лемма. *Равенство* $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ *верно тогда и только, когда для любой последовательности* $\{x_n\}$ *вида*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0; \quad x_n \neq x_0, n = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

выполняется равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

○ Необходимость. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность вида (2.8). По определению предела функции равенство

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

справедливо для всех x из некоторой проколотой окрестности точки x_0. Не уменьшая общности, можно считать, что все точки указанной последовательности принадлежат этой проколотой окрестности (в противном случае можно просто отбросить те члены последовательности, которые не принадлежат данной проколотой окрестности вместе со всеми предшествующими членами). Поэтому

$$f(x_n) = A + \alpha(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

и остается убедиться в том, что $\{\alpha(x_n)\}$ — б.м.п. Так как α — б.м.ф., то

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) : |\alpha(x)| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Но $x_n \longrightarrow x_0 (n \to \infty)$, следовательно, для указанного δ верно

$$(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) : x_n \in \dot{U}_\delta(x_0),$$

что вместе с высказыванием $(*)$ влечет требуемое

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) \ : |\alpha(x_n)| < \varepsilon.$$

Достаточность. Предположим напротив, что равенство $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ не верно. Это означает, что функция $f - A$ не является б.м.ф., т.е.

$$(\exists\varepsilon > 0)(\forall\delta > 0)(\exists x \in \dot{U}_\delta(x_0)) : |f(x) - A| \geqq \varepsilon.$$

В соответствии с этим для каждого $\delta_n := 1/n$ существует точка $x_n \in \dot{U}_{\delta_n}(x_0)$, такая, что

$$|f(x_n) - A| \geqq \varepsilon, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{$**$}$$

Тем самым, образована последовательность $\{x_n\}$, которая в силу $\delta_n \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ имеет вид (2.8), причем верно $(**)$. Справедливость неравенства $(**)$ означает, что $\{f(x_n) - A\}$ не является б.м.п., а значит равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ не выполняется, тогда как по условию леммы оно должно быть выполнено для любой последовательности (2.8). $\bigotimes$

В соответствии с доказанной леммой сформулируем эквивалентное определение предела функции *на языке последовательностей.*

Определение. Пусть функция f определена на некоторой проколотой окрестности точки x_0. Число A называют *пределом функции f в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ вида (2.8) справедливо равенство $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Заметим, что на языке последовательностей также можно сформулировать определение левостороннего и правостороннего пределов функции.

Часто определение предела на языке последовательностей оказывается удобным для установления отсутствия предела у функции.

Пример 6. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ в окрестности $+\infty$. Очевидно,

$$x'_n := \pi n \longrightarrow +\infty \qquad x''_n := \frac{\pi}{2} + 2\pi n \longrightarrow +\infty \ (n \to \infty);$$

причем

$$f(x'_n) = 0, \quad f(x''_n) = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

В соответствии с определением предела функции на языке последовательностей это означает, что предел $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ не существует, так как имеются две последовательности, стремящиеся к $+\infty$ и обладающие тем свойством, что пределы соответствующих значений функции на этих последовательностях различны.

5^0. Бесконечно большие функции и последовательности. Бесконечно большая функция — это своего рода антипод бесконечно малой функции. Если б.м.ф. в проколотой окрестности данной точки принимает сколь угодно малые (по абсолютной величине) значения, то бесконечно большая функция в проколотой окрестности рассматриваемой точки должна принимать сколь угодно большие (по абсолютной величине) значения.

Определение. Пусть функция f определена на некоторой проколотой окрестности точки x_0. Функция f называется *бесконечно большой функцией (б.б.ф.)* в окрестности точки x_0, если для любого положительного числа E можно указать такое положительное число δ, что неравенство $|f(x)| > E$ будет выполнено для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$, т.е. если

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) : |f(x)| > E. \tag{2.9}$$

Для указания того, что f — б.б.ф. используют запись

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ \text{ или } \ f(x) \longrightarrow \infty (x \to x_0),$$

и во избежание путаницы с обычным пределом написанный предел называют *несобственным пределом.*

Сравним определение б.б.ф. с определением б.м.ф. Если формально в последнем неравенстве определения б.м.ф. (2.2) знак $<$ поменять на знак $>$ и вместо буквы ε записать E, то из определения б.м.ф. (2.2) получим определение б.б.ф. (2.9). Таким образом, «внешнее» различие между этими определениями незначительное. Однако по содержанию они почти противоположны. В определении б.м.ф. важным является то, что ε может быть сколь угодно малым положительным числом. Тогда как в определении б.б.ф. существенно, что E может быть сколь угодно большим положительным числом (именно поэтому в определениях для обозначения этих чисел используются различные буквы).

Если в определении (2.9) неравенство $|f(x)| > E$ заменить неравенством $f(x) > E$ (или $f(x) < -E$), то получим определение несобственного предела, для которого используют запись

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \ \ (\lim_{x\to x_0} f(x) \ = -\infty).$$

В приведенных определениях в качестве x_0 может использоваться и ∞. Например, запись $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ на языке $E - \Delta$ «расшифровывается» так:

$$(\forall E > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\Delta(\infty)) : f(x) > E.$$

Все упомянутые определения можно сформулиривать и в «одностороннем варианте». Так, запись $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ означает, что

$$(\forall E > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\Delta(+\infty)) : f(x) < -E.$$

Все остальные возможные комбинации

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = +\infty, \lim_{x\to x_0-} f(x) = +\infty, \lim_{x\to x_0+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = -\infty, \lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty, \lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty,$$

предлагается «расшифровать» самостоятельно.

Между б.б.ф. и б.м.ф. существует тесная связь, которая раскрывается в следующей теореме.

Теорема 5 (о связи между б.м.ф. и б.б.ф.). 1. *Если f — б.б.ф. в окрестности точки x_0, то $1/f$ — б.м.ф. в окрестности той же самой точки.*

2. *Если α — б.м.ф. в окрестности точки x_0 со значениями, отличными от нуля на некоторой проколотой окрестности данной точки, то $1/\alpha$ — б.б.ф. в окрестности той же точки x_0.*

○ 1. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как f — б.б.ф., то для числа $E := 1/\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \ \text{ при всех } \ x \in \dot{U}_\delta(x_0),$$

или

$$|\frac{1}{f(x)}| < \varepsilon \ \text{ при всех } \ x \in \dot{U}_\delta(x_0).$$

Это означает, что $1/f$ — б.м.ф.

Вторая часть теоремы проверяется аналогично.⊗

Символически содержание теоремы 5 можно представить в форме:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad\qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Если сюда добавить еще утверждение теоремы 5, сформулированное в «одностороннем варианте», то получим соотношения:

$$\frac{1}{+\infty} = 0+, \qquad \frac{1}{-\infty} = 0-, \qquad \frac{1}{0+} = +\infty, \qquad \frac{1}{0-} = -\infty.$$

где $0+$ и $0-$ символизируют б.м.ф. справа и слева в окрестности данной точки.

Замечание. Используя определение б.б.ф. при $x \to +\infty$ нетрудно сформулировать определение *бесконечно большой последовательности (б.б.п.)*:

$$(\forall E > 0)(\exists n_E \in \mathbf{N})(\forall n > n_E) : |x_n| > E.$$

При этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если в данном определении б.б.п. неравенство $|x_n| > E$ заменить на $x_n > E$ (или $x_n < -E$), то получим определение несобственного предела вида $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (или $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$). Отметим также, что утверждения теоремы 5 распространяются и на последовательности.

Пример 7. Последовательность $\{1/n\}$ является б.м.п., поэтому на основании теоремы 5, сформулированной для последовательностей, верно равенство $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

2.4. Теорема о пределе монотонной функции и ее применения

Выше меры и конь не скачет.

1^0. Предел монотонной функции. Напомним, что функция $f : X \longrightarrow \mathbf{R}$, где $X \subset \mathbf{R}$, *ограничена сверху (снизу)* на множестве X, если существует число $M > 0$, для которого неравенство $f(x) \leqq M$ $(f(x) \geqq M)$ выполняется при всех $x \in X$.

Теорема 1 (о пределе монотонной функции). *Предположим, что функция f возрастает (убывает) на интервале (a, b) (где может быть и $b = +\infty$) и ограничена сверху (снизу) на этом интервале. Тогда односторонний предел $\lim_{x\to b-} f(x)$ существует, причем*

$$\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f((a, b)) \qquad (\lim_{x\to b-} f(x) = \inf f((a, b))),$$

где под пределом $\lim_{x\to b-} f(x)$ в случае $b = +\infty$ понимается $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

○ Прежде чем переходить к доказательству, напомним, что

$$f((a, b)) := \{y \in \mathbf{R} | (\exists x \in (a, b)) : y = f(x)\}.$$

Пусть для определенности функция f — возрастающая и ограниченная сверху на интервале (a, b), где $b \in \mathbf{R}$ или $b = +\infty$. Ограниченность функции f сверху означает, что множество значений $f((a, b))$ ограничено сверху. Поэтому у данного множества существует точная верхняя грань (гл. 1, 3^0), т.е. найдется такое число A, что $\sup f((a, b)) = A$.

Установим равенство

$$\lim_{x\to b-} f(x) = A.$$

Для этого достаточно убедиться в том, что функция $A - f$ является б.м.ф. слева в окрестности b.

Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. A — точная верхняя грань, поэтому по определению точной верхней грани существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что выполнено неравенство

$$A - \varepsilon < f(\xi) \leqq A$$

(см. гл.1, 3^0). Отсюда с использованием условия возрастания функции f получаем неравенства

$$A - \varepsilon < f(\xi) \leqq f(x) \leqq A \qquad \text{при всех } x \in (\xi, b),$$

или

$$-A \leqq -f(x) < -A + \varepsilon \qquad \text{при всех } x \in (\xi, b).$$

Поэтому

$$0 \leqq A - f(x) < \varepsilon \qquad \text{при всех } \ x \in (\xi, b).$$

Таким образом,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta := b - \xi > 0)(\forall x \in (b - \delta, b)) \ : |A - f(x)| < \varepsilon.$$

Это означает, что $A - f$ — б.м.ф. слева в окрестности b. $\otimes$

Геометрическая иллюстрация теоремы 1 дана на рис.2.9.

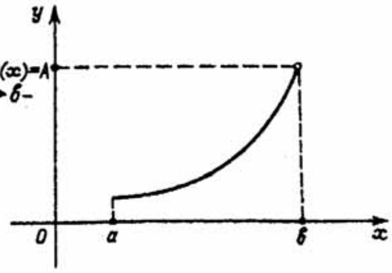

Рис.2.9

Необходимо отметить, что утверждение теоремы 1 аналогично формулируется для правостороннего предела при $x \to a+$ (причем может быть и $a = -\infty$).

Теорему 1 в случае $b = +\infty$ можно записать и для последовательностей. Для этого уточним понятие монотонной последовательности. Возрастание последовательности $f(n) = x_n, n = 1, 2, \ldots$ согласно приведенному в гл. 1 определению возрастающей функции означает, что справедливо неравенство

$$x_n \leqq x_m \qquad \text{при всех } \; n, m \in \mathbf{N}, \; n < m. \tag{2.10}$$

В частности, для $m = n + 1$ должно выполняться неравенство

$$x_n \leqq x_{n+1} \qquad \text{при всех } \; n \in \mathbf{N}. \tag{2.11}$$

Наоборот, если верно неравенство (2.11), то, очевидно, будет выполнено и неравенство (2.10). Следовательно, высказывание (2.11) эквивалентно высказыванию (2.10). Именно высказывание (2.11) обычно принимают за определение *возрастающей последовательности.*

Если в (2.11) знак неравенства $\leqq$ заменить на знак $\geqq$, то получим определение *убывающей последовательности.*

Теорема $1'$ (о пределе монотонной последовательности). *Если возрастающая (убывающая) последовательность ограничена сверху (ограничена снизу), то она имеет предел.*

2^0. Теорема о вложенных отрезках.

Теорема 2 (о вложенных отрезках). *Пусть имеется последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, вложенных друг в друга:*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots, \tag{2.12}$$

причем длина n-го отрезка при $n \to \infty$ стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Тогда указанная последовательность отрезков имеет и притом единственную точку c, принадлежащую одновременно всем данным отрезкам:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{c\}.$$

○ Рассмотрим последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. В силу (2.12) выполнены неравенства

$$a_n \leqq a_{n+1}, \qquad b_n \geqq b_{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

которые означают, что последовательность $\{a_n\}$ — возрастающая, а последовательность $\{b_n\}$ — убывающая. Кроме того, первая последовательность ограничена сверху, а вторая — снизу, так как

$$a_n \leqq b_1, \qquad b_n \geqq a_1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

По теореме $1'$ пределы указанных последовательностей существуют. Обозначим их через a и b соответственно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Неравенство $a_n \leqq b_n$ справедливо для всех n, следовательно, $a \leqq b$ и с формальной точки зрения существует отрезок $[a, b]$.

Далее, в силу неравенств $a_n \leqq b$, $b_n \geqq a$ включение $[a, b] \subset [a_n, b_n]$ выполнено для всех натуральных n. Таким образом, каждая точка отрезка $[a, b]$ принадлежит пересечению $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. С другой стороны, с помощью рассуждения от противного можно установить, что каждая точка этого пересечения входит в отрезок $[a, b]$. Следовательно, рассматриваемое пересечение совпадает с отрезком $[a, b]$. Осталось проверить, что $a = b$.

По определению предела последовательности

$$a_n = a + \alpha_n, \qquad b_n = b + \beta_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ — б.м.п. Отсюда следует равенство

$$b_n - a_n = b - a + (\beta_n - \alpha_n), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{\beta_n - \alpha_n\}$ — б.м.п. (как разность двух б.м.п.). По определению предела последовательности выполнение этого равенства означает, что $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a$, причем по условию теоремы этот предел равен нулю, т.е. $a = b$. ⊗

Замечание. В ходе доказательства теоремы 2 было доказано соотношение

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

3^0. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Ранее было установлено, что последовательность $1, -1, 1, -1, \ldots$ предела не имеет. Однако из этой расходящейся последовательности легко выделить (и не одну!) сходящуюся подпоследовательность, например, $1, 1, 1, \ldots$. Как показывает следующая теорема, подобным свойством обладает любая ограниченная последовательность.

Теорема 3 (Больцано-Вейерштрасс). *Из любой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

○ Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена, т.е. для некоторого $M > 0$ выполняется неравенство $|x_n| \leqq M, n = 1, 2, \ldots$

Разделим отрезок $[-M, M]$ пополам. Хотя бы в одном из получающихся отрезков $[-M, 0]$ или $[0, M]$ должно содержаться бесконечное множество членов исходной последовательности. Обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$ и выберем в нем произвольно какой-нибудь член последовательности, обозначив его $x_{k_1}, k_1 \in \mathbf{N}$. Теперь пополам разделим отрезок $[a_1, b_1]$ и выберем ту его половину, обозначив ее $[a_2, b_2]$, в которой так же содержится бесконечное множество членов рассматриваемой последовательности. Выберем в $[a_2, b_2]$ произвольно какой–нибудь член x_{k_2} исходной последовательности с номером $k_2 > k_1$ (такой номер всегда найдется в силу бесконечного числа членов в $[a_2, b_2]$). Действуя аналогично, получим последовательность точек $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$, которая является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, причем

$$a_n \leqq x_{k_n} \leqq b_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.13}$$

Поскольку $b_n - a_n = M/2^{n-1} \longrightarrow 0 (n \to \infty)$, то по теореме о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n], n = 1, 2, \ldots$

В ходе доказательства теоремы 2 было установлено $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$. Поэтому из неравенств (2.13) на основании теоремы о сжатой переменной для последовательности получаем требуемое: $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = c$. ⊗

4^0. Число е. Установим одно вспомогательное неравенство.

Лемма. *Для всех чисел $t \geqq -1$ справедливо неравенство*

$$(1+t)^n \geqq 1 + nt, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.14}$$

называемое неравенством Бернулли.

◯ Для доказательства воспользуемся методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство (2.14) превращается в равенство $1 + t = 1 + t$, справедливость которого сомнений не вызывает. Предположим, что неравенство (2.14) имеет место при $n = k : (1 + t)^k \geqq 1 + kt, k \in \mathbf{N}$. Для доказательства справедливости неравенства (2.14) при $n = k + 1$ умножим последнее записанное неравенство на неотрицательное число $1 + t$:

$$(1 + t)^{k+1} \geqq (1 + kt) \cdot (1 + t) = 1 + (k + 1)t + kt^2.$$

А так как $kt^2 \geqq 0$, то из написанного ранее получаем неравенство $(1 + t)^{k+1} \geqq 1 + (k + 1)t$, совпадающее с неравенством (2.14) при $n = k + 1$. ⊗

Неравенство (2.14) можно переписать в форме

$$(1 + t)^{n+1} \geqq 1 + (n + 1)t, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.14a}$$

Теорема 4. *Предел последовательности $\{(1 + 1/n)^n\}$ существует.*

◯ Рассмотрим последовательность $y_n = (1 + 1/n)^{n+1}, n = 1, 2, \ldots$ Она ограничена снизу, так как $y_n \geqq 1, n = 1, 2, \ldots$ Проверим, что эта последовательность убывающая. Для $n = 2, 3, \ldots$ имеют место равенства

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n-1})^n}{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}} = \frac{n^n}{(n-1)^n}\Big/\frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} = \frac{n^{2n+2}}{(n^2-1)^{n+1}} \cdot \frac{n-1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Отсюда, используя неравенство Бернулли (2.14a) при $t = 1/(n^2 - 1)$, получаем

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} \geqq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1,$$

или $y_{n-1} \geqq y_n, n = 2, 3, \ldots$ Другими словами, верно неравенство $y_n \geqq y_{n+1}, n = 1, 2, \ldots$, которое означает убывание последовательности $\{y_n\}$. По теореме $1'$ предел этой последовательности существует. Обозначим этот предел через е. Тогда существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{(1 + 1/n)} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)} = \frac{e}{1} = e. \otimes$$

Доказанное утверждение позволяет ввести следующее определение.

Определение. Числом е называется предел последовательности $\{(1 + 1/n)^n\}$, т.е.

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.15}$$

Число e является иррациональным числом и приближенно равно:

$$e \approx 2,718281828.$$

Это число встречается во многих разделах математики. Для логарифма $\log_e a$ по основанию e используется специальное обозначение $\ln a$. Логарифм $\ln a$ называют *натуральным логарифмом.*

Можно доказать (см. [2]), что

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

а также

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

5⁰. Вычисление некоторых пределов. Установим равенство

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{если } |q| < 1, \\ \infty, & \text{если } |q| > 1. \end{cases}$$

○ Пусть $0 < q < 1$. В этом случае для некоторого числа $t > 0$ справедливо равенство $q = 1/(1+t)$, и при помощи неравенства Бернулли можно записать

$$0 \leqq q^n = \frac{1}{(1+t)^n} \leqq \frac{1}{1+tn} \leqq \frac{1}{tn}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$0 \leqq \lim_{n \to \infty} q^n \leqq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{tn} = \frac{1}{t} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{t} \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$, если $0 < q < 1$.

Предположим теперь, что $-1 < q < 0$. В этом случае $q^n = (-q_*)^n = (-1)^n \cdot q_*^n$, причем $0 < q_* = -q < 1$. Последовательность $\{(-1)^n\}$ ограничена, а последовательность $\{q_*^n\}$, согласно доказанному, является б.м.п. Следовательно, $\{q^n\}$ — б.м.п.(2.1, теорема 2).

Рассмотрим случай $|q| > 1$. Можно записать $q = 1/\widehat{q}$, причем $|\widehat{q}| < 1$. Так как $\{\widehat{q}^n\}$ — б.м.п., то последовательность $\{1/\widehat{q}^n\}$ — б.б.п., поэтому

$$\lim_{n \to \infty} q^n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\widehat{q}^n} = \infty. \otimes$$

При $q = 1$ указанный предел равен единице, а при $q = -1$ он не существует.

Теперь докажем равенство

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{c} = 1, \qquad c > 0.$$

○ При $c = 1$ равенство очевидно. Пусть $c > 1$. Положим

$$\alpha_n \; = \sqrt[n]{c} - 1 > 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

и докажем, что $\{\alpha_n\}$ — б.м.п. Согласно неравенству Бернулли

$$c = (1 + \alpha_n)^n \geqq 1 + n \cdot \alpha_n > n \cdot \alpha_n,$$

следовательно $0 \leqq \alpha_n \leqq c/n, \quad n = 1, 2, \ldots$ Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, получим требуемое равенство $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

Теперь пусть $0 < c < 1$. На основании ранее доказанного

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/c}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/c}} = \; \frac{1}{1} = 1. \bigotimes$$

Замечание. Проанализировав доказательство последнего предела, нетрудно понять, что аналогичным образом можно доказать предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{c} = 1, \qquad c > 0,$$

где вместо корня n-ой степени записан корень степени k_n, причем $\{k_n\}$ — произвольная последовательность натуральных чисел, предел которой равен $+\infty$.

2.5. Сравнение бесконечно малых

У всякой пташки свои замашки.

1^0. Основные определения. Предел каждой б.м.ф. равен нулю. Но характер стремления, или, как говорят, «скорость стремления» к нулю у разных б.м.ф. может быть различной.

Интуитивно ясно, что у б.м.ф. $y = x^2$ (при $x \to 0$) «скорость стремления» к нулю выше, чем у б.м.ф. $y = x$.

Следующее определение придает точный смысл сравнению двух б.м.ф. с точки зрения «скорости их стремления» к нулю.

Определение. Пусть α и β — б.м.ф. (при $x \to x_0$), причем функция β отлична от нуля на некоторой проколотой окрестности точки x_0. Функцию α называют *бесконечно малой высшего порядка по сравнению с* β, если $\lim_{x\to x_0} \alpha(x)/\beta(x) = 0$; при этом записывают

$$a(x) = o(\beta(x)) \qquad (x \to x_0).$$

Пример. Нетрудно понять, что $x^2/100 = o(x)$ $(x \to 0)$, а также $(x - x_0)^3 = o(x - x_0)$, $(x - x_0)^3 = o((x - x_0)^2)$ $(x \to x_0)$.

Определение. Пусть α и β — б.м.ф. (при $x \to x_0$), причем функция β отлична от нуля на некоторой проколотой окрестности точки x_0. Функции α и β называют *эквивалентными* и при этом пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$ $(x \to x_0)$, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Эквивалентность двух б.м.ф. означает, что несмотря на все возможные их различия, при $x \to x_0$ они изменяются одинаковым образом. Необходимо отметить, что из двух неэквивалентных б.м.ф. не обязательно одна является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с другой. Например, функции $y = 2x, y = x$ не эквивалентны при $x \to 0$, и в то же время ни одна из них не является бесконечно малой по сравнению с другой.

Введенные определения можно использовать и для последовательностей. Так, например, запись $\alpha_n \sim \beta_n$ для двух б.м.п. означает, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n/\beta_n = 1$.

2^0. <u>Предел $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x$.</u>

Теорема 5. *При* $x \to 0$ *справедливо соотношение* $\sin(x) \sim x$, *или, что то же самое,*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

○ Функция $\sin x/x$ — четная, а значит слева и справа в окрестности точки 0 она ведет себя одинаково. Поэтому для доказательства достаточно установить требуемое равенство для одностороннего предела:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{2.16}$$

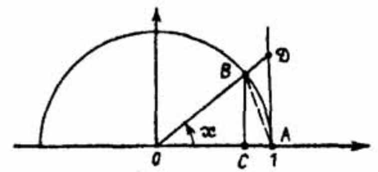

Рис. 2.10

Итак, пусть $0 < x < \pi/2$. Из рис.2.10 следует, что $\sin x = |BC| \leqq |\breve{AB}| = x$, так как дуга $\breve{AB}$ длиннее наклонной AB, которая, в свою очередь, длиннее перпендикуляра BC. Площадь сектора OBA, равная $x/2$, меньше площади треугольника $OДA$, т.е. $x/2 \leqq (\mathrm{tg} x)/2$. В итоге получаем неравенства

$$\sin x \leqq x \leqq \mathrm{tg} x,$$

разделив которые на положительное число $\sin x$, найдем

$$1 \ \leqq \ \frac{x}{\sin x} \ \leqq \ \frac{1}{\cos x},$$

откуда

$$\cos x \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq 1 \qquad \text{при всех} \;\; 0 < x < \pi/2. \tag{2.17}$$

Докажем, что верно равенство

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1. \tag{2.18}$$

В самом деле,

$$0 \leqq 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqq \; 2(\frac{x}{2})^2 = \frac{x^2}{2} \longrightarrow 0 \quad (x \to 0).$$

Следовательно, $1 - \cos x$ — б.м.ф. при $x \to 0$, а значит, равенство (2.18) доказано.

Теперь, если в (2.17) перейти к пределу при $x \to 0+$ и воспользоваться (2.18), то при помощи теоремы о сжатой переменной получим (2.16). $\bigotimes$

Из соотношения $\sin x \sim x$ с учетом равенства (2.18) вытекает

Следствие. *Справедливо соотношение:*

$$\mathrm{tg} x \sim x \qquad\qquad (x \to 0).$$

Вопросы

1. Будет ли высказывание (1.1) (см.разд. 2.1) определять б.м.ф., если в нем поменять местами первые две скобки: $(\forall \varepsilon > 0)$ и $(\exists \delta > 0)$?

2. Составить отрицание к определению б.м.ф., т.е. сформулировать определение функции, не являющейся б.м.ф.

3. Доказать, что функция $\alpha(x) = x - x_0$ не является б.м.ф. в окрестности любой точки x^* вида $x^* \neq x_0$.

4. Доказать, что функция будет б.м.ф. в точке x_0 тогда и только тогда, когда она является б.м.ф. одновременно слева и справа в окрестности рассматриваемой точки.

5. Написать на языке $\varepsilon - \delta$ определения б.м.ф. в окрестности $+\infty$ и $-\infty$.

6. Какие из следующих высказываний определяют б.м.п.:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n \geqq n_\varepsilon) \;\; : |\alpha_n| < \varepsilon,$$

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) \;\; : |\alpha_n| < \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) \;\; : |\alpha_n| \leqq \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall n > n_\varepsilon) \ : |\alpha_n| < M \cdot \varepsilon?$$

Здесь M — произвольное фиксированное положительное число.

7. Сохранит ли теорема о предельном переходе в неравенстве свою силу, если в ее формулировке:

а) неравенство $f(x) \geqq g(x)$ заменить строгим неравенством $f(x) > g(x)$;

б) оба участвующих в формулировке нестрогих неравенства заменить строгими неравенствами;

в) оба указанных неравенства заменить равенствами?

8. Будет ли сумма двух б.б.ф. сама б.б.ф.?

9. Может ли одна и та же функция (в одной точке или в различных точках) быть одновременно бесконечно малой и бесконечно большой?

10. Используя определение предела функции на языке последовательностей, доказать, что предел $\lim_{x\to+\infty} \cos x$ не существует.

11. Можно ли из ограниченной последовательности выделить бесконечное множество сходящихся подпоследовательностей?

12. Доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Глава 3. *НЕПРЕРЫВНОСТЬ*

Свойством непрерывности обладают многие функциональные зависимости, встречающиеся в технике и эконономике. В этой главе приводится ряд эквивалентных определений непрерывной функции и изучаются ее свойства.

3.1. Функции, непрерывные в точке. Точки разрыва

Где тонко, тут и рвется.

1^0. Четыре эквивалентных определения функции, непрерывной в точке. Подавляющее большинство функциональных зависимостей, встречающихся в технике или экономике, обладают важным свойством «плавного» («без скачков») изменения значения одного параметра (функции) при постепенном, «плавном» изменении другого параметра (аргумента). Такого рода примерами являются изменение координат ракеты или спутника в пространстве от времени, отсчитываемого с момента ее запуска, или рост затрат ресурсов при постепенном увеличении обьема производимой продукции.

Зафиксируем точку x_0 из области определении функции f и через $f(x_0)$ обозначим ее значение в данной точке. Как математически выразить «плавный» характер изменения значения данной функции в зависимости от аргумента? Для ответа на этот вопрос представим, что значение аргумента начинает постепенно увеличиваться или уменьшаться по сравнению с x_0. Для того, чтобы рассматриваемая функция обладала свойством непрерывности, ее значения при этом тоже должны меняться постепенно, оставаясь близкими к значению $f(x_0)$. Таким образом, в окрестности точки x_0 непрерывная функция $y = f(x)$ должна мало отличаться от постоянной функции $y = f(x_0)$. Иначе говоря, непрерывную функцию в пределах некоторой достаточно малой окрестности точки x_0 можно приблизить (аппроксимировать) постоянной функцией $y = f(x_0)$.

В соответствии с изложенным, сформулируем следующее определение.

Определение. Функцию f, определенную на некоторой окрестности точки x_0, называют *непрерывной в точке* x_0, если найдется такая б.м.ф. α в окрестности x_0, что

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x) \qquad \text{при всех } \ x \in \dot{U}(x_0). \tag{3.1}$$

где $\dot{U}(x_0)$ – некоторая проколотая окрестность точки x_0.

Заметим что высказывание (3.1) содержит проколотую окрестность, так как б.м.ф. α может быть не определена в самой точке x_0.

Очень часто вместо приведенного определения используют следующее ему эквивалентное определение.

Определение. Функцию f называют *непрерывной в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{3.2}$$

Подробно выполнение равенства (3.2) означает:

1) функция f определена в точке x_0 (следовательно, существует правая часть равенства (3.2));

2) существует конечный предел функции f в точке x_0 (а значит, имеет смысл левая часть равенства (3.2));

3) обе указанные части равенства (3.2) совпадают друг с другом.

Пример 1. Пусть $f(x) = c - const$. Для любой точки $x_0 \in \mathbf{R}$ выполняются равенства

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} c \ = c = f(x_0),$$

которые устанавливают непрерывность данной функции в каждой точке вещественной оси.

Пример 2. Пусть $f(x) = x$. Для любого $x \in \mathbf{R}$ справедливы равенства

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0),$$

свидетельствующие о непрерывности данной функции в каждой точке.

Из последнего определения можно получить еще одно определение, если воспользоваться языком $\varepsilon - \delta$.

Определение. Функцию f, определеную в некоторой окрестности точки x_0, называют *непрерывной в точке* x_0, если

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) \ : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Учитывая определение предела функции на языке последовательностей, можно сформулировать еще одно определение.

Определение. Функция f, заданная на некоторой окрестности точки x_0, называется *непрерывной в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ вида

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad x_n \neq x_0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Наряду с обычным пределом можно рассматривать левосторонний и правосторонний пределы (см. гл.2). Односторонний предел дает возможность ввести понятие односторонней непрерывности. Сформулируем эти определения, взяв за основу второе из приведенных ранее определений непрерывной функции.

Определение. Пусть функция f определена на левой (правой) половине некоторой окрестности точки x_0, причем в самой точке x_0 она также предполагается определенной. Функцию f называют *непрерывной слева (справа) в точке* x_0, если

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0) \quad (\text{соответственно } \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0)).$$

Согласно взаимосвязи, которая имеется между обычными и односторонними пределами (см. гл.2), *функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда она является непрерывной и слева, и справа в этой точке.*

Для иллюстрации введенных понятий рассмотрим функцию $y = [x]$ — целая часть числа x. В каждой целочисленной точке эта функция является непрерывной справа, а во всех остальных точках — просто непрерывной (рис. 3.1).

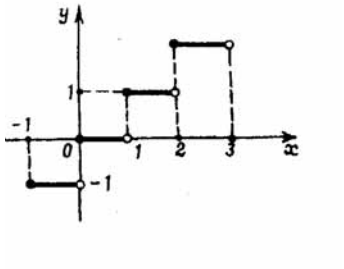

Рис. 3.1

2^0. Свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 1 (о сохранении знака). *Предположим, что функция f непрерывна в точке x_0, причем $f(x_0) > 0$. Тогда существует положительное число α и такая окрестность точки x_0, что для всех точек указанной окрестности выполняется неравенство $f(x) > \alpha$* (рис.3.2).

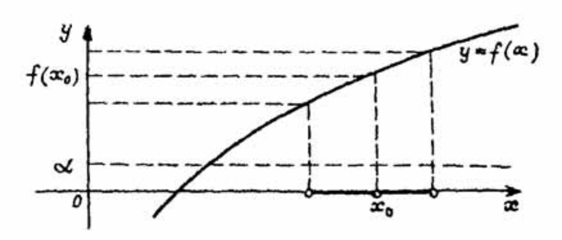

Рис.3.2

○ По определению непрерывности

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) \ : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

В частности, для указанных ε, δ и x справедливо неравенство

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Выберем произвольно положительное число ε_0 так, чтобы было выполнено неравенство $\varepsilon_0 < f(x_0)$, и введем число $\alpha := f(x_0) - \varepsilon_0 > 0$. Для выбранного ε_0 по определению непрерывности должно найтись положительное δ_0, такое, что

$$(\forall x \in \dot{U}_{\delta_0}(x_0)) : f(x) > f(x_0) - \varepsilon_0 \ = \alpha. \bigotimes$$

Замечание 1. Аналогичная теорема о сохранении знака верна и в случае $f(x_0) < 0$.

Замечание 2. Более того, обе разновидности теорем о сохранении знака справедливы «в одностороннем варианте», когда вместо окрестности точки x_0 в формулировке участвуют левый и правый полуинтервалы $(a, x_0]$ или $[x_0, b)$.

Теорема 2 (о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций). *Если функции f и g непрерывны в точке x_0 , то все функции $c\cdot f$, $c-const$, $f \pm g$, $f \cdot g$ и f/g, где $g(x_0) \neq 0$, также непрерывны в точке x_0.*

Утверждение теоремы сразу следует из соответствующих арифметических свойств предела функции.

С помощью метода математической индукции утверждение теоремы 2 можно распространить на любое конечное число слагаемых и множителей.

Пример 3. Степенная функция $y = x^n$ представляет собой произведение n непрерывных функций $y = x$, а значит, является непрерывной на всей вещественной оси.

Пример 4. Многочлен n–ой степени

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

как сумма непрерывных функций будет непрерывной функцией на всей оси.

Пример 5. Отношение двух многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. *рациональная дробь* $P_n(x)/Q_m(x)$, представляет собой функцию, непрерывную в каждой точке своей области определения.

3^0. Точки разрыва. Существуют функции, например, $y = [x]$, $y = 1/x$ и т.п., по тем или иным причинам имеющие точки, в которых нарушается условие непрерывности.

Классифицируем подобного рода «аномальные точки».

Определение. Пусть функция f определена на некоторой окрестности точки x_0 за исключением, возможно, самой точки x_0. Точку x_0 называют *точкой разрыва* функции f, если выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:

1) функция f не определена в точке x_0;

2) функция f определена в точке x_0, но не является в ней непрерывной.

Тот факт, что функция f определена в точке x_0, но не является в ней непрерывной, согласно второму из приведенных ранее определений непрерывности, означает реализацию одной и только одной из следующих двух возможностей:

а) предел функции f в точке x_0 не существует;

б) указанный предел существует, но он не равен $f(x_0)$.

Функция $y = 1/x$ определена в проколотой окрестности точки $x = 0$, но не определена в самой этой точке, поэтому данная точка есть точка разрыва. Функция $y = [x]$ определена на всей числовой оси, однако каждая целочисленная точка является точкой разрыва, так как предел указанной функции в целочисленных точках не существует.

Все точки разрыва в зависимости от типа разрыва подразделяются на два класса — точки разрыва первого и второго рода.

Определение. Пусть x_0 — точка разрыва функции f. В том случае, когда оба односторонних предела $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ и $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ существуют, x_0 называют *точкой разрыва первого рода*. Если, кроме того, оба указанных односторонних предела совпадают, то x_0 называют *точкой устранимого разрыва.*

В соответствии с приведенным определением каждая целочисленная точка области определения функции $y = [x]$ является точкой разрыва первого рода, но не является точкой устранимого разрыва.

Определение. Всякая точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода.*

Следовательно, точка разрыва будет точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim_{x\to x_0-} f(x)$ или $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ не существует.

Простейший пример разрыва второго рода представляет функция $y = 1/x$ в точке $x = 0$.

4^0. Непрерывность сложной функции. Приведем определение сложной функции.

Определение. Пусть имеются две функции $f : X \longrightarrow Y$ и $g : Y \longrightarrow Z$. В этом случае каждому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $z \in Z$ вида $z = g(y)$, где $y = f(x)$. Таким образом, на множестве X определена функция типа $X \longrightarrow Z$, которую называют *сложной функцией* (или *композицией* двух данных функций f и g) и обозначают $z = g[f(x)]$

или $g \circ f$.

Пример 6. Композиция функций $z = y^3 - 2$ и $y = \sin(x+1)$ имеет вид $z = \sin^3(x+1) - 2$.

Лемма (о композиции двух б.м.ф.). *Пусть α — б.м.ф. в проколотой окрестности точки x_0, а β — б.м.ф. в окрестности точки y_0, причем если функция α в каких-то точках указанной окрестности принимает нулевые значения, то $\beta(y_0) = 0$. При сделанных предположениях сложная функция $\beta[y_0 + \alpha(x)]$ является б.м.ф. в окрестности* точки x_0.

◯ Сначала рассмотрим случай, когда функция α не принимает нулевые значения ни в одной точке некоторой окрестности точки x_0. Так как α — б.м.ф., выбирая достаточно малую проколотую окрестность точки x_0, для всех точек этой окрестности можно добиться принадлежности точки вида $y_0 + \alpha(x)$ той проколотой окрестности точки y_0, в которой определена б.м.ф. β. Таким образом, сложная функция $\beta[y_0 + \alpha(x)]$ определена в некоторой достаточно малой проколотой окрестности точки x_0.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу того, что β — б.м.ф., должно найтись такое число $\gamma > 0$, что

$$(\forall y \in \dot{U}_\gamma(y_0)) : |\beta(y)| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

Но α — также б.м.ф., поэтому для указанного числа γ найдется такое число $\delta > 0$, что

$$(\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)) : |\alpha(x)| < \gamma.$$

В итоге для любого положительного числа ε установлено существование такого положительного числа δ, что для всех $x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \gamma$. Но тогда справедливо включение $y = y_0 + \alpha(x) \in \dot{U}_\gamma(y_0)$, а значит, в силу $(*)$ для всех указанных x имеет место неравенство

$$|\beta(y)| = |\beta(y_0 + \alpha(x))| < \varepsilon.$$

Если функция α принимает нулевые значения в некоторых точках окрестности точки x_0, то в этом случае доказательство леммы проводится совершенно аналогично с заменой проколотой окрестности $\dot{U}_\gamma(y_0)$ на простую окрестность $U_\gamma(y_0)$.⊗

Утверждение леммы может быть сформулировано и доказано для односторонних бесконечно малых функций.

Предположим, что верно соотношение (3.1), определяющее непрерывную функцию. Введем *приращение аргумента* $\Delta x = x - x_0$. Если $x \in \dot{U}(x_0)$, то приращение Δx принадлежит некоторой проколотой окрестности нуля $\dot{U}(0)$.

С учетом этого подставим $x = x_0 + \Delta x$ в (3.1):

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha[x_0 + \Delta x] \qquad \text{при всех} \;\; \Delta x \in \dot{U}(0).$$

На основании леммы о композиции двух бесконечно малых функция $\alpha[x_0 + \Delta x]$ аргумента Δx является б.м.ф. в окрестности нуля. Следовательно, и разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которую называют *приращением функции*, также является б.м.ф. в окрестности нуля, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{3.3}$$

При помощи аналогичных рассуждений из равенства (3.3) можно вывести соотношение (3.1). Полученный результат дает возможность сформулировать еще одно, пятое, определение непрерывной функции.

Определение. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если справедливо равенство (3.3), т.е. приращение функции является б.м.ф. при $\Delta x \to 0$.

Теорема 3 (о непрерывности сложной функции). *Предположим, что функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = g[f(x)]$ непрерывна в точке x_0, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} g[f(x)] = g[\lim_{x \to x_0} f(x)] = g[f(x_0].$$

○ На основании непрерывности можно записать:

$$y = f(x) = f(x_0) + \alpha(x) \qquad \text{при всех} \;\; x \in \dot{U}(x_0); \tag{$*$}$$

$$z = g(y) = g(y_0) + \beta(y) \qquad \text{при всех} \;\; y \in \dot{U}(y_0), \tag{$**$}$$

где α и β — соответствующие бесконечно малые функции. Доопределим б.м.ф. β в точке y_0 нулевым значением.

Функция α — б.м.ф., поэтому для всех точек x из достаточно малой окрестности $\dot{U}'(x_0)$, содержащейся в $\dot{U}(x_0)$, будет выполнено включение $[f(x_0) + \alpha(x)] \in \dot{U}(f(x_0)) = \dot{U}(y_0)$. Это означает, что сложная функция определена в каждой точке проколотой окрестности $\dot{U}'(x_0)$. По условию она определена и в самой точке x_0.

Используя $(*)$, из $(**)$ получаем равенство

$$g[f(x)] = g[f(x_0] + \beta[f(x_0) + \alpha(x)] \qquad \text{при всех} \;\; x \in \dot{U}'(x_0).$$

Для завершения доказательства достаточно сослаться на лемму о композиции двух бесконечно малых функций.⊗

Замечание. Применяя метод математической индукции, несложно доказать, что композиция любого конечного числа непрерывных функций является непрерывной функцией.

3.2. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Хороший товар сам себя хвалит.

1^0. Теорема Вейерштрасса. Обозначим через $\langle a, b\rangle$ произвольный числовой промежуток и распространим на этот промежуток понятие непрерывной функции.

Определение. Числовую функцию f называют *непрерывной на промежутке* $\langle a, b\rangle$, если она непрерывна в каждой внутренней точке этого промежутка, причем если $a \in \langle a, b\rangle($ и/или $b \in \langle a, b\rangle)$, то данная функция предполагается непрерывной справа в точке $x = a$ (соответственно, слева в точке $x = b$).

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на этом отрезке и, более того, достигает на нем своих точных верхней и нижней граней.*

◯ Докажем, что f ограничена сверху и достигает точной верхней грани. Обозначим через M точную верхнюю грань функции f на отрезке $[a, b]$:

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Сначала убедимся, что M — число, а не символ $+\infty$. Для этого предположим обратное, т.е., что функция f не является ограниченной сверху на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого натурального n должно существовать такое число $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > n. \tag{$*$}$$

Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, так как все ее члены принадлежат отрезку $[a, b]$. По теореме Больцано–Вейерштрасса (см. разд. 2.4) из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, которую обозначим через $\{x_{n_k}\} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Переходя к пределу в неравенствах $a \leqq x_{n_k} \leqq b$ при $k \to \infty$, получим $a \leqq x_0 \leqq b$. Так как функция f непрерывна в точке x_0, то должно выполняться равенство

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0),$$

что несовместимо с неравенством (∗), записанным для членов подпоследовательности x_{n_k}. Таким образом, ограниченность сверху доказана.

По определению точной верхней грани для любого числа $\varepsilon_n = 1/n,\ n = 1, 2, \ldots$ найдется такая точка $x_n \in [a, b]$, что

$$f(x_n) > M - 1/n.$$

Повторяя приведенные рассуждения, выделим из последовательности $\{x_n\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b]$. Для членов подпоследовательности выполняется неравенство

$$f(x_{n_k}) > M - 1/n_k.$$

Переходя в нем к пределу при $k \to \infty$, получим $f(x_0) \geqq M$. Но неравенство $f(x_0) > M$ по определению супремума невозможно. Следовательно, $f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. $\bigotimes$

Замечание 1. Доказательство теоремы Вейерштрасса устанавливает факт достижения точных нижней и верхней граней, но не содержит метода их нахождения. В этом смысле приведенное доказательство не является конструктивным.

Замечание 2. В силу доказательства теоремы 1 $x_0 \in [a, b]$, поэтому

$$f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Исходя из этого теорему Вейерштрасса нередко формулируют следующим образом: *непрерывная на отрезке функция достигает на нем своего минимального (наименьшего) и максимального (наибольшего) значения.*

2^0. Теорема о прохождении непрерывной функции через нуль.

Теорема 2 (о прохождении непрерывной функции через нуль). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, причем на концах отрезка она принимает значения противоположных знаков, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда внутри отрезка $[a, b]$ найдется такая точка ξ, что $f(\xi) = 0$.*

◯ Доказательство теоремы проводится *методом половинного деления.*

Пусть для определенности $f(a) < 0, f(b) > 0$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если $f((a + b)/2) = 0$, то полагаем $\xi = (a + b)/2$, и доказательство закончено. В противном случае $f((a + b)/2)$ — положительное либо отрицательное число. Рассмотрим ту половину отрезка $[a, b]$, на концах которой функция f принимает значения противоположные по знаку; обозначим эту половину через $[a_1, b_1]$. Имеем $f(a_1) < 0,\ f(b_1) > 0$. Теперь делим пополам отрезок $[a_1, b_1]$. Если $f((a_1 + b_1)/2) = 0$, то полагаем $\xi = (a_1 + b_1)/2$, и доказательство будет закончено.

В противном случае вновь выделим ту половину отрезка $[a_1, b_1]$, на концах которой функция f принимает значения противоположных знаков и обозначаем эту половину через $[a_2, b_2]$.

Действуя описанным способом, либо закончим доказательство на одном из шагов, либо процесс половинного деления будет продолжаться неограниченно, и в результате будет построена последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, обладающая тем свойством, что $b_n - a_n = (b - a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$. По теореме о вложенных отрезках (см. разд.2.4) найдется точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{\xi\},$$

причем $\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. По построению

$$f(a_n) \leqq 0, \qquad f(b_n) \geqq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Отсюда, используя непрерывность функции f в точке ξ на языке последовательностей, при $n \to \infty$ получаем неравенства $f(\xi) \leqq 0, f(\xi) \geqq 0$, из которых следует равенство $f(\xi) = 0$. Остается добавить, что $\xi \neq a$ и $\xi \neq b$, так как по условию теоремы $f(a) \cdot f(b) < 0$. $\bigotimes$

Теорема 2 допускает простую геометрическую иллюстрацию: график непрерывной функции обязательно пересечет ось абсцисс, если его концы расположены по разные стороны от нее (рис 3.3).

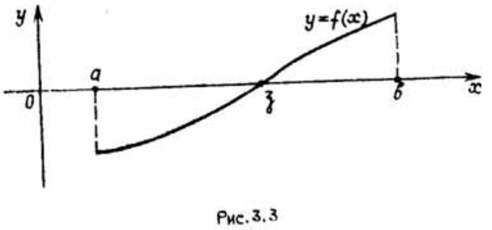

Рис.3.3

3^0. Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях.

Теорема 3 (Больцано-Коши). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A, f(b) = B$. Тогда каково бы ни было число C, заключенное между A и B, найдется такая внутренняя точка ξ отрезка $[a, b]$, что $f(\xi) = C$.*

$\bigcirc$ Пусть для определенности $A < C < B$ (случай $A > B$ рассматривается аналогично).

Введем функцию $\phi(x) = f(x) - C$. Она непрерывна на отрезке $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций. Кроме того:

$$\phi(a) = f(a) - C = A - C < 0,$$

$$\phi(b) = f(b) - C = B - C > 0,$$

В этих условиях применима теорема 2 о прохождении непрерывной функции через нуль, согласно которой найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $\phi(\xi) = f(\xi) - C = 0$. Отсюда $f(\xi) = C$. $\otimes$

Согласно теореме Больцано-Коши непрерывная функция принимает все промежуточные значения между A и B (рис.3.4).

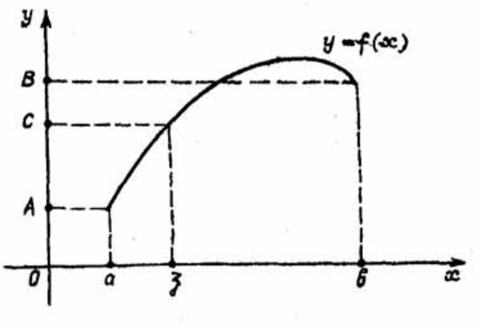

Рис. 3.4

Следствие. *Образом непрерывной на промежутке функции является промежуток.*

○ Пусть функция f непрерывна на промежутке $\langle a, b\rangle$. Напомним определение образа (множества значений):

$$f(\langle a, b\rangle) := \{y \in \mathbf{R} | (\exists x \in \langle a, b\rangle) : y = f(x)\}.$$

Очевидно, числовое множество будет промежутком тогда и только тогда, когда оно вместе с любыми двумя своими точками содержит и весь соединяющий их отрезок. Поэтому выберем две произвольные точки образа $y_1, y_2 \in f(\langle a, b\rangle)$. По определению образа должны найтись такие две точки $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, что $y_i = f(x_i), i = 1, 2$. По условию функция f непрерывна на отрезке $[x_1, x_2]$. Поэтому в силу теоремы Больцано-Коши образ $f(\langle a, b\rangle)$ вместе со своими двумя точками y_1, y_2 содержит и весь отрезок их соединяющий, т.е. $[y_1, y_2] \subset f(\langle a, b\rangle)$. $\otimes$

3.3. Непрерывность элементарных функций

Не рвалось бы да не ломалось,
куда бы все девалось?

1^0. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

Определение. Пусть имеется функция $f : X \to Y$, обладаюшая тем свойством, что для любого $y \in Y$ существует единственный элемент $x \in X$ такой, что $y = f(x)$. В этом случае каждому элементу $y \in Y$ соответствует единственный элемент $x \in X$, который связан с элементом y при помощи равенства $y = f(x)$. Тем самым на множестве Y будет определена функция, которую называют *обратной* для функции f и обозначают $f^{-1}, x = f^{-1}(y)$ (или с использованием привычных обозначений для зависимой и независимой переменных $y = f^{-1}(x)$).

Из определения обратной функции следует, что если точка $(x, f(x))$ принадлежит графику исходной функции, то точка $(f(x), x)$ должна принадлежать графику обратной функции. Геометрически это означает симметричность графиков исходной и обратной функций относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Непосредственно из приведенного определения обратной функции следуют равенства:

$$f[f^{-1}(y)] = y \qquad \text{при всех } \ y \in Y,$$
$$f^{-1}[f(x)] = x \qquad \text{при всех } \ x \in X.$$

Достаточные условия существования обратной функции содержатся в следующей теореме.

Теорема 1 (о существовании и непрерывности обратной функции). *Если функция f непрерывна и строго возрастает (строго убывает) на конечном или бесконечном промежутке $\langle a, b\rangle$, то обратная функция f^{-1} существует, строго возрастает (строго убывает) и непрерывна на промежутке $f(\langle a, b\rangle)$.*

○ Согласно следствию из теоремы Больцано-Коши образ $f(\langle a, b\rangle)$ действительно является промежутком. Для определенности предположим, что функция f строго возрастает (случай строгого убывания f рассматривается аналогично).

Существование обратной функции следует из строгого возрастания исходной функции, так как если некоторому $y \in f(\langle a, b\rangle)$ соответствуют два различных значения $x', x'' \in \langle a, b\rangle$, таких что $f(x') = y = f(x'')$, то получим равенство $f(x') = f(x'')$ при условии $x' \neq x''$, что несовместимо с условием строгого возрастания функции f.

Для проверки строгого возрастания обратной функции f^{-1} выберем две произвольные точки $y_1, y_2 \in f(\langle a, b\rangle)$ вида $y_1 < \ y_2$. По определению обратной функции существуют такие точки $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$, что $y_i = f(x_i), i = 1, 2$. Следует убедиться, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Если предположить выполнение противоположного неравенства, то его можно переписать в виде $x_1 \geqq x_2$, откуда, благодаря строгому возрастанию функции f, следует неравенство $y_1 \geqq y_2$, несовместимое с исходным неравенством $y_1 < y_2$.

Итак, в условиях теоремы обратная функция существует и является строго возрастающей на промежутке $f(\langle a, b\rangle)$.

Рассмотрим доказательство непрерывности. Выберем произвольную точку $y_0 \in f(\langle a, b\rangle)$, для которой должна найтись такая точка $x_0 \in \langle a, b\rangle$, что $y_0 = f(x_0)$, или $f^{-1}(y_0) = x_0$. Точка y_0 может быть либо внутренней, либо граничной точкой области определения обратной функции. В любом случае для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что один из односторонних, например, левосторонний предел функции f^{-1} в точке y_0, существует и равен $f^{-1}(y_0)$, т.е.

$$\lim_{y \to y_0-} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0). \tag{$*$}$$

Для доказательства равенства $(*)$ выберем произвольное положительное ε (не уменьшая общности, можно считать, что в случае конечного a выполняется неравенство $\varepsilon < x_0 - a$, так что $x_0 - \varepsilon > a$). Обозначим $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ и $\delta = y_0 - y_1$. Благодаря строгому возрастанию функции f справедливо $\delta > 0$.

Для всех точек y, удовлетворяющих $y_1 < y < y_0$, в силу строгого возрастания функции f^{-1}, выполняются неравенства

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0).$$

Следовательно,

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) < \ f^{-1}(y_0) + \varepsilon,$$

а значит

$$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon.$$

Таким образом, в итоге получаем

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in (y_0 - \delta, y_0)) \ : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon,$$

что означает выполнение равенства $(*)$. $\bigotimes$

Пример 1. Рассмотрим степенную функцию $y = x^n$ при четном натуральном показателе n на промежутке $[0, +\infty)$. Указанная функция строго возрастает и непрерывна, причем ее образ есть $[0, +\infty)$. В соответствии с теоремой 1 об обратной функции на промежутке $[0, +\infty)$ существует обратная функция, которую называют *корнем n-ой степени* и обозначают $y = \sqrt[n]{x}$, причем она строго возрастает и непрерывна на своей области определения.

Заметим, что для степенной функции $y = x^n$ и нечетного показателя n к аналогичному выводу можно придти на всем промежутке $(-\infty, +\infty)$.

2^0. Непрерывность основных элементарных функций.

Определение. *Основными элементарными функциями* называются следующие функции:

$y = c - const;$
$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1);$
$y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1);$
$y = x^\alpha \quad (\alpha \neq 0);$
$y = \sin x;$
$y = \cos x;$
$y = \mathrm{tg} x;$
$y = \mathrm{ctg} x :$
$y = \arcsin x;$
$y = \arccos x;$
$y = \mathrm{arctg} x;$
$y = \mathrm{arcctg} x.$

Изучение этих функций было начато еще в школьном курсе математики. Условимся считать известными их области определения, множества значений и промежутки монотонности (подобного рода информация имеется практически в каждом учебнике по математическому анализу).

Теорема 2. *Любая из основных элементарных функций является непрерывной в каждой точке своей области определения.*

○ Непрерывность постоянной функции была установлена в 1^0, разд.3.1.

Для доказательства непрерывности показательной функции сначало убедимся в справедливости равенства

$$\lim_{x \to 0+} a^x = 1 \tag{3.4}$$

при $a > 1$. Для того, чтобы воспользоваться определением непрерывной функции на языке последовательностей, выберем произвольную последовательность $\{x_n\}$ вида

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0, \qquad x_n > 0, \; n = 1, 2, \ldots;$$

и обозначим $k_n = [1/x_n], n = 1, 2, \ldots$, где квадратные скобки означают целую часть числа. Очевидно $0 < x_n \leqq 1/k_n, n = 1, 2, \ldots$, и в силу строгого возрастания показательной функции при $a > 0$ получаем

$$1 = a^0 < a^{x_n} \leqq a^{1/k_n} = \sqrt[k_n]{a}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{*}$$

В 5^0 разд.2.4 было установлено, что $\sqrt[kn]{a} \to 1$ при $n \to \infty$. По теореме о сжатой переменной из $(*)$ при $n \to \infty$ следует равенство (3.4).

Для любой последовательности $\{x_n\}$ вида

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad x_n < 0,\ n = 1, 2, \dots;$$

на основании доказанного выполняется

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a^{-x_n}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Значит верно равенство $\lim_{x\to 0-} a^x = 1$, которое вместе с равенством (3.4) влечет

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \tag{3.5}$$

Равенство (3.5) справедливо и в случае $0 < a < 1$, так как

$$\lim_{x\to 0} a^x = \frac{1}{\lim_{x\to 0}(1/a)^x} = \frac{1}{1} = 1,$$

где $1/a > 1$.

Из равенства (3.5), в частности, следует, что функция $a^x - 1$ является б.м.ф. в окрестности нуля. Для любого $x_0 \in \mathbf{R}$ функция

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0} \cdot (a^{\Delta x} - 1)$$

аргумента Δx как произведение ограниченной функции на б.м.ф. также является б.м.ф. в окрестности нуля. Полученный результат в соответствии с пятым определением непрерывной функции означает непрерывность показательной функции на всей числовой оси.

По теореме о существовании и непрерывности обратной функции из строгой монотонности и непрерывности показательной функции следует непрерывность логарифмической функции.

Степенная функция $y = x^\alpha$ непрерывна как композиция двух непрерывных функций $y = e^t$ и $t = \alpha \ln x$.

Рассмотрим доказательство непрерывности функции $y = \sin x$. В 2^0 разд. 2.5 было выведено неравенство

$$|\sin x| \leqq |x| \qquad \text{при всех} \quad x \in (0, \pi/2).$$

В силу четности обеих частей этого неравенства, оно также имеет место для всех $x \in (-\pi/2, 0)$. Таким образом, справедливо

$$0 \leqq |\sin x| \leqq |x| \qquad \text{при всех} \quad x \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Отсюда при $x \to 0$ по теореме о сжатой переменной

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0. \tag{3.6}$$

Из равенства (3.6) в силу леммы о композиции двух б.м.ф. следует, что функция $y = \sin(x/2)$ также является б.м.ф. в окрестности нуля. Таковой же будет и функция

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}$$

аргумента Δx как произведение ограниченной функции на б.м.ф. Тем самым, непрерывность функции $y = \sin x$ доказана.

Верно равенство $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, поэтому функция $y = \cos x$ непрерывна на всей числовой оси как композиция двух непрерывных функций.

Функции $y = \mathrm{tg} x$ и $y = \mathrm{ctg} x$ непрерывны на своих областях определения, так как представляют собой частное двух непрерывных функций.

Непрерывность обратных тригонометрических функций вытекает из непрерывности исходных тригонометрических функций на основании теоремы о существовании и непрерывности обратной функции.

3^0. Класс элементарных функций. Взяв за основу конечный набор перечисленных в предыдущем пункте основных элементарных функций, при помощи арифметических операций и операции композиции можно построить довольно широкий класс так называемых элементарных функций.

Определение. *Элементарной* называют такую функцию, которую можно получить при помощи конечного числа арифметических операций и конечного числа операций композиции над основными элементарными функциями. Все возможные элементарные функции составляют *класс элементарных функций.*

Пример 2. Функция

$$y = x^3 + \sqrt{\ln(1 + \mathrm{tg} x)}$$

может быть представлена в виде

$$y = f_1(x) + f_2[f_3[f_4(x) + f_5(x)]],$$

где $f_1(x) = x^3,\ f_2(u) = \sqrt{u},\ u = f_3(v) = \ln v,\ v = f_4(x) + f_5(x),\ f_4(x) = 1,\ f_5(x) = \mathrm{tg} x$, и поэтому является элементарной функцией.

Поскольку все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения, а применение арифметических операций и операций композиции к непрерывным функциям приводит к непрерывным функциям, получаем следующий результат.

Теорема 3 (о непрерывности элементарных функций). *Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в окрестности которой она определена.*

Вопросы

1. Исследовать на непрерывность функцию Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

2. Исследовать на непрерывность функцию Римана

$$f(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } x = m/n, \text{ где } m \text{ и } n \text{ - взаимно простые,} \\ 0, & \text{если } x \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

3. Исследовать на непрерывность функции:

$$f_1(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}, \qquad f_2(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+e^{nx})}{\ln(1+e^n)}.$$

4. Доказать, что уравнение $x^{1995} - 3x^{1949} + 2x = 1$ имеет по крайней мере один вещественный корень.

5. Доказать, что уравнение $xe^x = 1$ имеет и притом единственное решение.

6. Доказать, что любой многочлен четной степени достигает на своей области определения минимальное либо максимальное значение.

7. Доказать, что функция $y = 2x + \sin x$ имеет обратную на всей вещественной оси.

8. Найти обратную для функции $y = x + [x]$.

Список литературы

1. Демидович Б.П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* М.: Наука, 1977.

2. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа.* М.: Высш. школа, 1981. Т. 1.

Оглавление