САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет прикладной математики – процессов управления

Е. А. КАЛИНИНА, Л. А. СВИРКИНА

ВВЕДЕНИЕ
В НАЧАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2011

УДК: 517.1
М34

Р е ц е н з е н т ы: д-р физ.-мат. наук, проф. *В.Ф. Зайцев* (Рос. гос. пед. ун-т им. А.И. Герцена); к-т физ.-мат. наук, доц. *И.А. Моисеев* (С.-Петерб. гос. у-нт)

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета

ISBN 5-98340-008-8

Введение в начальные главы математического анализа: Учеб. пособие / Калинина Е.А., Свиркина Л.А. — СПб., 2011. — 68 с.

В настоящем пособии излагаются элементы начальных глав математического анализа, знание которых является необходимым для изучения курса высшей математики в целом. Приводится большое число различных примеров и иллюстраций. Кроме того, имеются задачи и примеры для самостоятельного решения, помогающие закрепить изученный материал.

Книга предназначена для студентов младших курсов университетов и вузов по специальности "прикладная математика и информатика" и разработана в рамках факультативного курса "Элементарная математика", разработанного для студентов первого курса. Она также может быть полезна школьникам старших классов, занимающихся самообразованием.

Библиогр. 5 назв. Ил. 51.

Числа не управляют миром,
но показывают, как управляется мир.
(И.В.Гете)

Дорогой друг!

Данное учебное пособие написано авторами в помощь студентам младших курсов физико-математических специальностей. Вот все экзамены позади, поступление тоже, и ты оказался на студенческой скамье, где с первых же дней своей студенческой жизни окунулся в водоворот сложных математических понятий. В твоей жизни появляется новое и странное — к возникающим задачам не приложено вариантов решений, в которых "нужное следует отметить галочкой". Приходится **думать самостоятельно**... Тут-то и придет тебе на помощь это пособие, которое кому-то поможет вспомнить старое (особенно для случаев, когда в ЕГЭшной суете его так и не успели восстановить в памяти), кому-то поможет разъяснить пройденное, ну а кому-то даст что-то новое. Своеобразный подход к написанию пособия, предусматривающий некоторую недосказанность, заставляет читателя не только воспринимать материал, но и быть как бы его соавтором. Например, в первом параграфе нет четких пунктов операций, но все операции присутствуют. Так сколько же их? А в Примере 1.9 вдруг ни с того ни с сего появляется X и Y. Зачем? А вот в этом-то и предстоит разобраться самостоятельно тебе, дорогой читатель-соавтор. Ну а достаточное количество наглядных примеров поможет в восприятии материала.

Учебное пособие написано нами, преподавателями факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета, которые сами когда-то были студентами, и прекрасно понимают ценность иллюстративного подхода в обучении.

В добрый путь!

Пособие написано по мотивам леций по математическому анализу, которые читал в ФМШ 45 при ЛГУ Б.М. Беккер.

ГЛАВА 1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА

§1. Операции над множествами

Множество — совокупность некоторых предметов, которые называются элементами, объединенных по некоторому признаку.

Множество — понятие неопределимое, основное понятие математики.

Приведем некоторые примеры множеств.

Пример 1.1. 1. Множество прямоугольников.

2. $A = \{1, 2, 3\}$.

3. Множество планет Солнечной системы.

4. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ — множество натуральных чисел.

Обозначения: $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел.

$x \in A$ — x — элемент множества A;

$\emptyset$ или $\{\ \}$ — пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента).

Способы задания множеств

I. Множество задается перечислением всех его элементов

Пример 1.2. 1. $A = \{2; 5; 3; 4\}$.
2. $B = \{1; 2; 3; \dots; 1000\}$.
3. $C = \{2; 4; 6; 8; \dots; 20\}$.

II. Множество задается выражением с указанием значений, принимаемых входящими в это выражение переменными.

Для примера приведем множества, заданные выражением, а затем выпишем элементы этих множеств.

Пример 1.3. 1. $A = \{2n + 5 | n \in \mathbb{N}\}$, $A = \{7; 9; 11; 13; \dots\}$.

2. $B = \{3n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\dots; -5; -2; 1; 4; 7; \dots\}$.

3. $X = \{n^2 + n - 2 | n \in \mathbb{Z}; -3 \le n \le 3\}$, $X = \{4; 0; -2; 10\}$.

III. Множество задается **характеристическим свойством** его элементов.

Характеристическое свойство — свойство, которым обладают все элементы множества и больше ничего.

Пример 1.4. 1. $A = \{x | x^2 = 4\}$.
В этом случае довольно легко для множества A указать все его элементы. Действительно, $A = \{-2; 2\}$. Однако, это далеко не всегда можно сделать так же просто, как видно из следующих примеров.
2. $B = \{x | x^5 + 5x + 5 = 0\}$
3. C — множество всех натуральных n, для которых уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

разрешимо в натуральных числах.

Пример 1.5. Верно или нет следующее

1. $2 \in \left\{x | 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0\right\}$?
Неверно, так как $2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 \neq 0$.

2. $-3 \in \left\{x | \dfrac{x^3-1}{x^2+2} < -2\right\}$?
Верно, так как $\dfrac{(-3)^3-1}{(-3)^2+2} < -2$.

3. $3 \in \left\{\dfrac{2n+1}{3n-2} | n \in \mathbb{N}\right\}$?
Верно, так как $\dfrac{2n+1}{3n-2} = 3$ при $n = 1 \in \mathbb{N}$.

Определение. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A.

Обозначение. $B \subset A$.

Считают, что пустое множество является подмножеством любого множества A: $\varnothing \subset A$. Действительно, так как пустое множество не содержит ни одного элемента, то в нем нет и элементов, не принадлежащих множеству A.

Определение. Объединением множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, которые входят хотя бы в одно из этих множеств.

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пример 1.6. 1. $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5\}$,

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5\}.$$

2. $A = \{2n+1 | n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$, $A \cup B = \mathbb{Z}$.

3. $A = \{n \in \mathbb{Z} | n \not\vdots 6\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} | n \not\vdots 9\}$,

$$A \cup B = \{n \in \mathbb{Z} | n \not\vdots 18\},$$

$$A \cup B = \{\ldots; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 \ldots\}.$$

Для наглядности операции над множествами будем иллюстрировать рисунками. Множества будем изображать в виде кругов на плоскости.

Замечание. Такие рисунки называются **диаграммами Эйлера — Венна**.[1]

На рис. 1 приведена диаграмма Эйлера — Венна, поясняющая определение объединения множеств A и B.

---

[1]Леонард Эйлер(1707–1783) — выдающийся математик, механик и физик, длительное время живший и работавший в Петербурге.

Джон Венн (1834–1923) — английский логик.

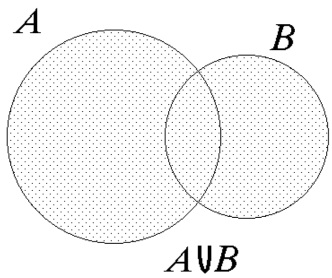

Рис. 1

Определение. Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств.

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

На рис. 2 приведена диаграмма Эйлера — Венна, поясняющая определение пересечения множеств A и B.

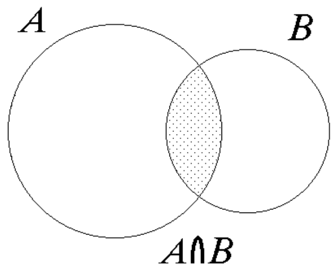

Рис. 2

Пример 1.7. 1. $A = \{n \in \mathbb{Z} | n \vdots 5\},\ B = \{n \in \mathbb{Z} | n \vdots 3\}$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{Z} | n \vdots 15\}$$

2. $A = \{2n | n \in \mathbb{Z}\},\ B = \{7n | n \in \mathbb{Z}\}$

$$A \cap B = \{14n | n \in \mathbb{Z}\}.$$

3. A — множество всех ромбов, B — множество всех прямоугольников, $A \cap B$ — множество всех квадратов.

4. $B \subset A,\ A \cap B = B,\ A \cup B = A$.

Определение. Разностью множеств A и B называется множество всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B.

Обозначение. $A \setminus B = \{x \in A | x \notin B\}$.

На рис. 3 приведена диаграмма Эйлера — Венна, поясняющая определение разности множеств A и B.

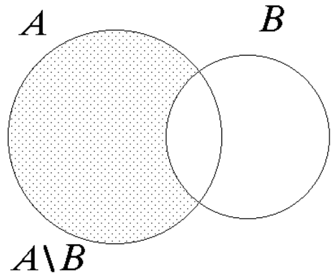

Рис. 3

Пример 1.8. 1. $A = \{2n | n \in \mathbb{Z}\},\ B = \{4n + 2 | n \in \mathbb{Z}\}$

$$A \setminus B = \{4n | n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. A — множество ромбов, B — множество прямоугольников, $A \setminus B$ — множество ромбов, не являющихся квадратами.

Пример 1.9. Знание определений операций над множествами позволяет доказывать равенство множеств, полученных в результате применения этих операций. Так, например, докажем свойство операций объединения и пересечения

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Для доказательства равенства множеств X и Y нам необходимо доказать, что каждый элемент множества X является элементом множества Y и обратно, каждый элемент множества Y является элементом множества X.

Пусть $x \in A \cup (B \cap C)$. Тогда либо $x \in A$, либо $x \in B \cap C$. Если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, а следовательно, по определению пересечения множеств, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Следовательно, $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$, откуда $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тем самым, мы доказали, что

$$A \cup (B \cap C) \supset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Пусть $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Тогда $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in A$, или $x \in B$ и $x \in C$, откуда, по определению объединения множеств, $x \in A \cup (B \cap C)$. Тем самым, мы доказали, что

$$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Следовательно, имеем равенство

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Замечание. Диаграмма Эйлера — Венна, иллюстрирующая свойство операции над множествами, ни в коем случае доказательством **не является**! Это просто иллюстрация к тому, о чем говорится.

§2. Эквивалентность множеств. Счетные и несчетные множества

Определение. **Мощностью** конечного множества называется число элементов в этом множестве.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Мощность множества A будем обозначать $N(A)$.

Любые два конечные множества можно сравнивать по их мощности.

Пример 2.1. Пусть $A = \{5, 4, 3, 2, 1\}$, $B = \{2, 4, 6\}$. Тогда $N(A) > N(B)$, так как $N(A) = 5, N(B) = 3$.

Однако для бесконечных множеств такой способ сравнения не подходит (рассмотрим, например, множество прямоугольников и множество рациональных чисел).

Рассмотрим способ сравнения множеств, применимый как для конечных, так и для бесконечных множеств. Для этого нам понадобится следующее определение.

Определение. Говорят, что между множествами A и B установлено **взаимно-однозначное соответствие**, если:

1) каждому элементу множества A соответствует только один элемент множества B;

2) каждый элемент множества B при этом соответствует некоторому элементу множества A;

3) разныи элементам множества A соответствуют разные элементы множества B.

Тогда можно определить и эквивалентные множества:

Определение. Множества A и B называются **эквивалентными** или **равномощными**, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

Таким образом, мы имеем теперь возможность сравнивать по количеству элементов как конечные, так и бесконечные множества.

Приведем несколько примеров.

Пример 2.2. Покажем, что множество натуральных чисел эквивалентно множеству четных положительных чисел. Для этого установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

иначе: каждому элементу $n \in \mathbb{N}$ поставим в соответствие элемент $2n$ множества четных положительных чисел.

Так как множество четных положительных чисел является подмножеством натуральных чисел, то этот пример показывает, что бесконечное множество может быть эквивалентно своему подмножеству. В случае конечных множеств такая ситуация невозможна: между конечными множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие тогда и только тогда, когда $N(A) = N(B)$.

Пример 2.3. Покажем, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ эквивалентно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$. Для этого установим между этими множествами взаимно однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & \dots & n & -n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 2n & 2n+1 & \dots \end{array}$$

иначе: каждому элементу $n \in \mathbb{Z}$ поставим в соответствие элемент $2n$, если $n > 0$, и элемент $-2n+1$, если $n \leq 0$ множества натуральных чисел.

Определение. Множество называется **счетным**, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

Иначе говоря, множество счетно, если все элементы этого множества можно занумеровать. Таким образом, множества четных положительных чисел и множество целых чисел счетны.

Пример 2.4. Покажем, что множество положительных рациональных чисел счетно. В самом деле, запишем каждое положительное рациональное число в виде несократимой дроби, запишем его в бесконечную таблицу, а затем перенумеруем числа в таблице способом, указанным на рис. 4:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & \dots \end{array}$$

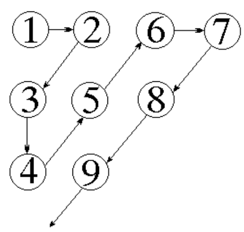

Рис. 4

Пример 2.5. Множества

$$A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \text{ и } B = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

счетны, а следовательно, эквивалентны. В самом деле, установим взаимно-однозначное соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{N} & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & \dots \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \\
B & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \dots
\end{array}$$

Пример 2.6. Любой отрезок $[a,b], a \neq b$ эквивалентен отрезку $[0,1]$. Искомое взаимно однозначное соответствие можно установить как аналитически, например, формулой:

$$x \in [0,1],\ x \leftrightarrow y = (b-a)x + a,\ y \in [a,b],$$

так и геометрически (см. рис. 5):

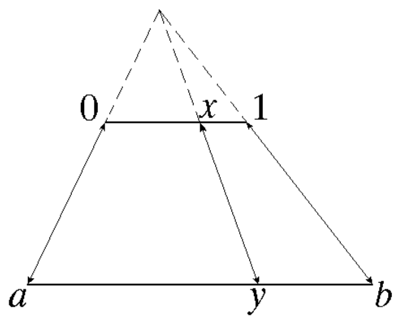

Рис. 5

Пример 2.7. Установим взаимно однозначное соответствие между точками интервала $(0,1)$ и точками полуинтервала $[0,1)$. Заметим, что множество $(0,1) \setminus A$ и множество $[0,1) \setminus B$ равны (множества A и B определены в примере 2.5); обозначим $C = (0,1) \setminus A = [0,1) \setminus B$. Тогда $(0,1) = A \cup C$, $[0,1) = B \cup C$. Пусть $x \in (0,1)$. Если $x \in A$, то поставим ему в соответствие $y \in B$ по закону, описанному в примере 2.5; если же $x \in C$, то поставим ему в соответствие себя: $y = x \in C$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между $(0,1)$ и $[0,1)$. Следовательно, множества $(0,1)$ и $[0,1)$ эквивалентны.

В заключение заметим, что не все бесконечные множества являются счетными. Так, например, можно доказать, что множество точек любого отрезка $[a,b], a \neq b$ не является счетным.

§3. Числовая прямая

Рассмотрим числовую прямую (рис. 6):

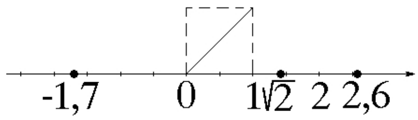

Рис. 6

Рассмотрим множество рациональных чисел

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Каждое рациональное число изображается некоторой точкой на числовой оси. Так, на рисунке отмечены числа $-1,7; 0; 1; 2; 2,6$.

Докажем, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Доказательство. Пусть существует дробь $\frac{p}{q}$: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Мы вправе считать эту дробь несократимой. Так как $p^2 = 2q^2$, то p — число четное: $p = 2r$ $(r \in \mathbb{Z}) \implies q$ — нечетное. Подставляя вместо p его выражение, найдем: $q^2 = 2r^2$, откуда следует, что q — четное число. Получили противоречие, которое доказывает утверждение. ■

Итак, не все точки числовой оси изображают рациональные числа. Те точки, которые не изображают рациональные числа, изображают числа, называемые иррациональными.

Любое число вида $\sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $a > 0, a \in \mathbb{Z}$ является либо целым, либо иррациональным.

§4. Десятичная запись вещественного числа

Определение. Числа рациональные и иррациональные называют вещественными или действительными числами.

$\mathbb{R}$ (real) — множество вещественных чисел.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$.

Найдем наибольшее целое число a, не превосходящее α: $a \in \mathbb{Z}, a \leq \alpha$. Предположим, что у нас получилось $a = 4$, $a \leq \alpha < < a + 1$ (см. рис. 7):

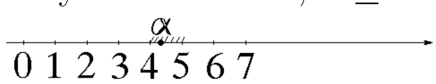

Рис. 7

Разобьем отрезок $[a; a+1]$ на 10 равных частей и выберем ту из этих частей, которая содержит α (рис. 8):

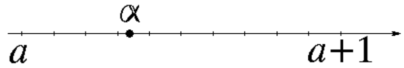

Рис. 8

$$[a; a+1], \ \alpha \in \left[a, c_1; a, c_1 + \frac{1}{10}\right],$$

где c_1 — десятичная цифра.

Разобьем отрезок на 10 равных частей и выберем ту из этих частей, которая содержит α (рис. 9):

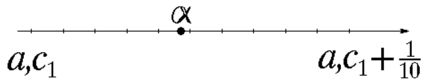

Рис. 9

$$\alpha \in \left[a, c_1c_2; a, c_1c_2 + \frac{1}{10^2}\right],$$

и т.д.

Если $\alpha = \sqrt{2}$, то получим

$$a = 1, c_1 = 4, c_2 = 1, c_3 = 4, c_4 = 2,$$

Определение. Бесконечная десятичная дробь $a, c_1c_2c_3\ldots$, где $a, c_1, c_2, c_3, \ldots$ получаются указанным способом, называется десятичной записью числа α.

$$\alpha = a, c_1c_2c_3\ldots$$

Возникает вопрос: одна ли десятичная запись у числа α?

Если в процессе построения десятичной записи α никогда не окажется на границе двух отрезков, то α имеет одну десятичную запись. Если же α на каком-либо шаге оказалось на границе двух отрезков (так будет, если α — конечная десятичная дробь и только в этом случае), то можно выбрать любой из этих отрезков. Если выберем правый отрезок, то на всех следующих шагах будет выбираться самый левый из 10 отрезков и, следовательно, все следующие цифры в десятичной записи — нули. Если же выберем левый отрезок, то на всех следующих шагах придется выбирать самый правый из десяти отрезков и, следовательно, все следующие цифры — девятки.

Пример 4.1. Рассмотрим оба варианта записи на примере $\alpha = 7{,}48$. На рис. 10 приведен первый вариант (выбирается все время левый отрезок), а на рис. 11 — второй вариант (выбиратся все время правый отрезок).

I случай.

Рис. 10

и т.д.

$\alpha = 7{,}480000\ldots$

II случай.

Рис. 11

и т.д.
$\alpha = 7{,}479999\ldots$

Обычно в этих случаях запись с девятками не используется.

Можно доказать, что если $\alpha = 0{,}c_1c_2c_3\ldots$, то $10\alpha = c_1{,}c_2c_3c_4\ldots$

Пусть $0 < \alpha < 1$. Строим десятичную запись

$$\begin{aligned} &c_1 = [10\alpha], && \alpha_1 = 10\alpha - c_1,\\ &c_2 = [10\alpha_1], && \alpha_2 = 10\alpha_1 - c_2,\\ &c_3 = [10\alpha_2], && \alpha_3 = 10\alpha_2 - c_3,\\ &\ldots \end{aligned}$$

Пояснение

$$\begin{aligned} &10\alpha = c_1{,}c_2c_3\ldots,\\ &\alpha_1 = 10\alpha - c_1 = 0{,}c_2c_3c_4\ldots,\\ &10\alpha_1 = c_2{,}c_3c_4c_5\ldots,\\ &\alpha_2 = 10\alpha_1 - c_2 = 0{,}c_3c_4c_5\ldots,\\ &\ldots \end{aligned}$$

§5. Десятичная запись рационального числа

Пусть $\alpha = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$.

Тогда $\alpha_1 = \frac{10m}{n} - c_1 = \frac{10m - c_1n}{n} = \frac{m_1}{n}$.

Так как $\alpha_1 < 1$, то α_1 — правильная дробь со знаменателем n. По той же причине $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ — правильные дроби со знаменателем n. Правильных дробей с данным знаменателем конечное число, следовательно, найдутся такие k и l $k \neq l$, что $\alpha_k = \alpha_l$. Тогда

$$\begin{aligned} &c_{k+1} = c_{l+1}\\ &\alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}\\ &c_{k+2} = c_{l+2}\\ &\ldots, \end{aligned}$$

то есть начиная с некоторого места цифры десятичной записи числа α начнут повторяться. Таким образом, рациональное число записывается бесконечной периодической десятичной дробью.

Пример 5.1. $\alpha = \frac{17}{35}$.

$$\begin{array}{l|l} 170 & 35 \\ \cline{2-2} \underline{140} & 0{,}4(857142) \\ \;\;300 & \\ \;\;\underline{280} & \\ \;\;\;\;200 & \\ \;\;\;\;\underline{175} & \\ \;\;\;\;\;\;250 & \\ \;\;\;\;\;\;\underline{245} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50\\ \underline{35}\\ 150\\ \underline{140}\\ 100\\ \underline{70}\\ 30 \end{array}$$

Обратно: любая периодическая десятичная дробь является десятичной записью некоторого рационального числа.

Пример 5.2. $\alpha = 0{,}207(16)$.

$$\begin{aligned} &1000\alpha = 207{,}(16),\\ &100000\alpha = 20716,(16),\\ &99000\alpha = 20509,\\ &\alpha = \tfrac{20509}{99000}. \end{aligned}$$

§6. Свойства множества вещественных чисел

1. Вещественные числа можно складывать, и при этом выполняются следующие законы:

$$\begin{array}{ll} \alpha+\beta=\beta+\alpha & \text{(коммутативный)},\\ (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) & \text{(ассоциативный)},\\ \exists\, 0:\ \alpha+0=0, & \\ \exists\,(-\alpha):\ \alpha+(-\alpha)=0. & \end{array}$$

Определение. Определим разность вещественных чисел α и β следующим образом:

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta).$$

2. Вещественные числа можно перемножать, и при этом выполняются следующие законы:

$$\begin{array}{ll} \alpha\beta=\beta\alpha & \text{(коммутативный)},\\ (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma) & \text{(ассоциативный)},\\ \exists\, 1:\ \alpha\cdot 1=\alpha, & \\ \forall\alpha\neq 0\ \exists \text{ обратное число } \tfrac{1}{\alpha}:\ \alpha\cdot\tfrac{1}{\alpha}=1. & \end{array}$$

Определение. Если $\beta\neq 0$, то определим частное чисел α и β следующим образом:

$$\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}.$$

Дистрибутивный закон (сложение и умножение)

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

$$1 \neq 0.$$

3. Каждое вещественное число $\neq 0$ либо положительно, либо отрицательно. При этом сумма и произведение положительных чисел — положительное числа. Если α — положительное число, то $(-\alpha)$ — отрицательное, а если α — отрицательное число, то $(-\alpha)$ — положительное.

4. Каждое вещественное число можно записать в виде бесконечной десятичной дроби, и при этом каждая бесконечная десятичная дробь является записью некоторого вещественного числа. Разные вещественные числа имеют разные десятичные записи.

Пример 6.1. Пусть α и β — отрицательные числа. Доказать, что их произведение $\alpha\beta$ — положительное число.

Доказательство. Так как α — отрицательное число, то $-\alpha$ — число положительное. Число $(-\alpha)\beta$ — число, противоположное числу $\alpha\beta$, поскольку

$$(-\alpha)\beta + \alpha\beta = ((-\alpha) + \alpha)\beta = 0 \cdot \beta = 0.$$

Аналогично, число $(-\alpha)(-\beta)$ противоположно числу $(-\alpha)\beta$. Так как $(-\alpha)(-\beta)$ положительное число, то число $(-\alpha)\beta$ отрицательное, и $\alpha\beta$ — положительное число.

§7. Свойства неравенств

Определение. $a > b$ означает, что $a - b$ — положительное число, $a < b$ означает, что $a - b$ — отрицательное число, $a \geq b$ означает, что $a > b$ или $a = b$.

Свойства

Свойства неравенств следуют из свойств вещественных чисел.

1. Для любых чисел a и b справедливо одно и только одно из следующих трех утверждений (трихотомия)

$$a > b, a = b, a < b.$$

2. a положительно $\Leftrightarrow\ a > 0$
a отрицательно $\Leftrightarrow\ a < 0$.

3. Транзитивность

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ b > c \end{array}\right| \Longrightarrow a > c.$$

4. $a > b \Leftrightarrow b < a$.

Доказательство.

$$a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow b < a,$$
$$b < a \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow a > b.$$

5. $a > b \Rightarrow a + c > b + c$.

Доказательство.

$$a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Rightarrow a + c > b + c.$$

6. $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} &a > b \Rightarrow a - b > 0, \\ &c > d \Rightarrow c - d > 0. \end{aligned}$$

Сложение положительных чисел

$$(a - b) + (c - d) > 0 \Rightarrow a + c > b + d.$$

7. а) $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$,
б) $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$.

Доказательство. $a > b \Rightarrow a-b > 0$. Пользуемся свойствами умножения положительных чисел.

$$\begin{aligned} &\text{Если } c > 0, \text{ то } (a - b)c > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow ac > bc, \\ &\text{если } c < 0, \text{ то } (a - b)c < 0 \Rightarrow ac - bc < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow ac < bc. \end{aligned}$$

8. $a > b \geq 0, c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc \\ c > d, b \geq 0 \Rightarrow bc \geq bd \end{array}\right| \Rightarrow ac > bd.$$

Следствие 7.1. $a > b \geq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow a^n > b^n$.

Доказательство. *Нужно перемножить неравенство* $a > b$ n *раз.*

9. $a > b, a, b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Доказательство.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} \\ b - a < 0, \text{ так как } a > b \\ ab > 0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{b - a}{ab} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}.$$

§8. Несколько полезных неравенств

1. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac = \tfrac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - \\ &-2ab - 2ac - 2bc) = \tfrac{1}{2}[(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + \\ &+(b^2 - 2bc + c^2)] = \tfrac{1}{2}[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] \geq 0. \end{aligned}$$

2. $a, b > 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Доказательство.

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0.$$

3. $a, b, c, d > 0 \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$.
Доказательство.

$$\begin{aligned} &\tfrac{a+b+c+d}{4} = \tfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \tfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \\ &\geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}. \end{aligned}$$

4. $a, b, c > 0 \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.
Доказательство. *Положим*

$$\begin{aligned} &m = \frac{a+b+c}{3}. \text{ Тогда} \\ &m = \tfrac{a+b+c+m}{4} \geq \sqrt[4]{abcm}, \\ &m^4 \geq abcm, \\ &m^3 \geq abc, \\ &m \geq \sqrt[3]{abc}. \end{aligned}$$

Пример 8.1. Доказать

1. $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$.

$$\begin{aligned} &a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq \\ &\geq ab\cdot bc + ab\cdot ac + ac\cdot bc = abc(a+b+c). \end{aligned}$$

2. $a, b, c \geq 0 \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.

$$\left.\begin{aligned} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{bc} \\ a+c \geq 2\sqrt{ac} \end{aligned}\right| \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc.$$

3. $a, b, c > 0 \Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$.

$$\begin{aligned} &a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \\ &\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}, \\ &(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9. \end{aligned}$$

§9. Модуль вещественного числа

Определение.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Свойства модуля

1. $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$,
$|a+b|=|a|+|b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.

2. $|ab|=|a|\cdot|b|$.

3. $|a-b|$ — это расстояние между точками a и b на числовой оси.

Доказательство.

1. Докажем сначала, что $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Рассмотрим несколько случаев (в этих случаях по-разному раскрываются модули):

$$
\begin{aligned}
&a, b \geq 0,\\
&|a+b|=a+b \quad |a|+|b|=a+b,\\
&|a+b| \leq |a|+|b|,\\
&a, b<0,\\
&|a+b|=-a-b \quad |a|+|b|=-a-b,\\
&|a+b| \leq |a|+|b|,\\
&a \geq 0, b<0, a+b>0,\\
&|a+b|=a+b \quad |a|+|b|=a-b,\\
&a+b<a-b,\\
&|a+b| \leq |a|+|b|,\\
&a \geq 0, b<0, a+b<0,\\
&|a+b|=-a-b \quad |a|+|b|=a-b,\\
&-a-b<a-b,\\
&|a+b| \leq |a|+|b|.
\end{aligned}
$$

Левая часть неравенства получается, если в доказанном неравенстве заменить a на $a+b$, b — на $-b$, а затем a — на $a+b$, а b — на $-a$.

2.

$$
\begin{aligned}
&|ab|=|a|\cdot|b|,\\
&a, b \geq 0,\\
&|ab|=ab \quad |a|\cdot|b|=ab \Rightarrow |ab|=|a|\cdot|b|,\\
&a, b<0,\\
&|ab|=(-a)\cdot(-b)=ab \quad |a|\cdot|b|=(-a)\cdot(-b)=ab,\\
&a \geq 0, b<0,\\
&|ab|=a(-b)=-ab \quad |a|\cdot|b|=a(-b)=-ab,\\
&|ab|=|a|\cdot|b|.
\end{aligned}
$$

§10. Решение уравнений с модулем

Наиболее часто используемый способ решения задач с модулем состоит в том, что модуль раскрывается на основании определения. Для этого находим, при каких значениях переменной выражение, стоящее под модулем, неотрицательно, а при каких — отрицательно. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 10.1. Решить уравнение

$$|x+3| = 2x-3.$$

Решение. Рассмотрим первый случай $x+3 \geq 0$, то есть $x \geq -3$ (выражение под модулем неотрицательно). Уравнение в этом случае принимает вид $x+3 = 2x-3$, его решение $x = 6$. Это решение удовлетворяет условию $x \geq -3$. Таким образом, 6 — корень исходного уравнения.

Во втором случае $x+3 < 0$, то есть $x < -3$. В этом случае уравнение преобразуется к виду $-x-3 = 2x-3$, его решение $x = 0$. Этот корень не удовлетворяет условию $x < -3$, таким образом, 0 не является корнем исходного уравнения.

Ответ. $\{6\}$.

Пример 10.2. Решить уравнение

$$|x^2-2x-4| = 3x-2.$$

Решение. Сначала найдем корни уравнения $x^2-2x-4 = 0$. Это $1 \pm \sqrt{5}$. Следовательно, условие $x^2-2x-4 \geq 0$ выполняется при $x \leq 1-\sqrt{5}$ и при $x \geq 1+\sqrt{5}$, а условие $x^2-2x-4 < 0$ — при $1-\sqrt{5} < x < 1+\sqrt{5}$. Рассмотрим два случая:

1) $x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{5}\right] \cup \left[1+\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Исходное уравнение на этом множестве имеет вид $x^2-2x-4 = 3x-2$. Его корни $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{33}}{2}$. Из них только $\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ попадает под наш случай. Докажем это:

$$1-\sqrt{5} < \frac{5-\sqrt{33}}{2} < 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2-2\sqrt{5} < 5-\sqrt{33} < 2+2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2-2\sqrt{5} < -\sqrt{33} < -3+2\sqrt{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3+2\sqrt{5} > \sqrt{33} > 3-2\sqrt{5}.$$

Так как $\sqrt{5} > 2$, то $3-2\sqrt{5} < 0$, и, действительно, $\sqrt{33} > 0 > 3-2\sqrt{5}$. Для доказательства левой части двойного неравенства возведем его в квадрат (это можно сделать, поскольку обе части неравенства неотрицательны):

$$\sqrt{33} < 3+2\sqrt{5} \Leftrightarrow 33 < 9+12\sqrt{5}+20.$$

Так как $12\sqrt{5} > 4$, последнее неравенство также выполняется, и корень $\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}$ — посторонний. Из очевидной цепочки неравенств

$$1+\sqrt{5} < \frac{5+\sqrt{33}}{2} \Leftrightarrow 2+2\sqrt{5} < 5+\sqrt{33} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} < 3+\sqrt{33} \Leftrightarrow$$

$20 < 9+6\sqrt{33}+33$ следует, что $\dfrac{5+\sqrt{33}}{2}$ является корнем уравнения.

2) $x \in \left(1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}\right)$.

В этом случае $x^2 - 2x - 4 < 0$, и от исходного уравнения мы переходим к уравнению $-x^2 + 2x + 4 = 3x - 2$. Решения этого уравнения: -3 и 2. Из них только число 2 попадает на указанный промежуток:

$$0 < 2 < 1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 1 < \sqrt{5},$$
$$-3 < 1-\sqrt{5} \Leftrightarrow 3 > -1+\sqrt{5} \Leftrightarrow 4 > \sqrt{5}.$$

корень -3 — посторонний.

Ответ. $\left\{2; \frac{5+\sqrt{33}}{2}\right\}$.

Пример 10.3. Решить уравнение

$$|x-1| + |x-2| = x+3.$$

Решение. Корни выражений, стоящих под модулем, — 1 и 2. Числовая ось разбивается точками 1 и 2 на три промежутка, изображенных на рис. 12:

Рис. 12

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $x \geq 2$. Поскольку оба выражения, стоящие под модулем, неотрицательны на рассматриваемом промежутке, исходное уравнение преобразуется к виду $x - 1 + x - 2 = x + 3$. Решение этого уравнения $x = 3$. Этот корень попадает на промежуток $[2, +\infty)$ и поэтому является решением исходного уравнения.

2) $1 \leq x < 2$. Поскольку первое выражение, стоящее под модулем, положительно, а второе отрицательно на рассматриваемом промежутке, то исходное уравнение преобразуется к виду $x - 1 + 2 - x = x + 3$. Решение этого уравнения $x = -2$. Поскольку -2 не попадает на рассматриваемый промежуток $[1, 2)$, то этот корень — посторонний.

3) $x < 1$. Поскольку оба выражения, стоящие под модулем, отрицательны на рассматриваемом промежутке, исходное уравнение преобразуется к виду $1-x+2-x = x+3$. Решение этого уравнения $x = 0$. Этот корень принадлежит промежутку $(-\infty, 1)$ и является решением исходного уравнения.

Ответ. $\{0; 3\}$.

Пример 10.4. Решить уравнение

$$||x+3| + x| = 1.$$

Решение. Для решения этого уравнения раскроем модули, начиная с внутреннего. Рассмотрим два случая: 1) $x \geq -3$ и 2) $x < -3$.

1) В этом случае $|x + 3| = x + 3$, и исходное уравнение преобразуется к виду $|2x + 3| = 1$. Решая это уравнение, получаем корни -2 и -1.

2) При $x < -3$ раскрываем внутренний модуль: $|x+3| = -x-3$. Получаем уравнение $|-3| = 1$, которое решений не имеет.

Ответ. $\{-2; -1\}$.

Пример 10.5. Решить уравнение

$$|x-3| + |x+3| = 6.$$

Решение. Из геометрических свойств модуля имеем: $|x-3|$ — это расстояние между точкой x и точкой 3, $|x+3|$ — расстояние между точкой x и точкой -3. Таким образом, $|x-3| + |x+3|$ — это сумма расстояний от точки x до точек -3 и 3. Поскольку расстояние между точками -3 и 3 равно 6, то любя точка x, лежащая на числовой оси между точками -3 и 3, удовлетворяет условию. Точек, лежащих вне отрезка $[-3; 3]$, удовлетворяющих условию, не существует, поскольку сумма расстояний от этих точек до концов данного отрезка очевидно больше 6.

Ответ. $[-3; 3]$.

§11. Решение неравенств с модулем

Для решения неравенств с модулем следует раскрыть модуль так же, как это делалось при решении уравнений, а затем решить полученные неравенства на соответствующих множествах (иными словами, решить полученные системы неравенств).

Пример 11.1. Решить неравенство

$$|x^2 - 5x| < 6.$$

Решение. Рассмотрим два случая: 1) $x^2 - 5x \geq 0$ и 2) $x^2 - 5x < 0$.

1) В этом случае неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0, \\ x^2 - 5x < 6 \end{cases}$$

преобразуя первое неравенство к виду $x(x-5) \geq 0$, получим (см. рис. 13):

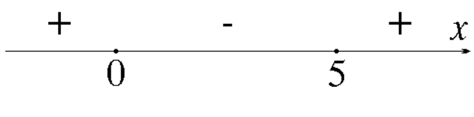

Рис. 13

Решение неравенства $(-\infty; 0] \cup [5; +\infty)$.

Преобразуя второе неравенство $(x+1)(x-6) < 0$, получим (см. рис. 14):

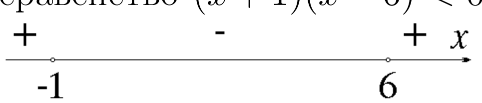

Рис. 14

Решение неравенства $(-1;6)$. Решением системы является пересечение решений неравенств, то есть $(-1;0] \cup [5;6)$.

2) В этом случае неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^2 - 5x < 0, \\ -(x^2 - 5x) < 6. \end{cases}$$

Решение первого неравенства $(0;5)$ (см. рисунок к случаю 1)). неравенство преобразуется к $(x-2)(x-3) > 0$, его решение $(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$ (см. рис. 15):

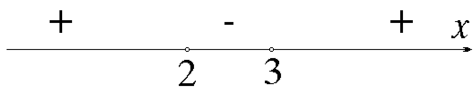

Рис. 15

Решение системы — пересечение множеств решений двух неравенств, то есть $(0;2) \cup (3;5)$.

Общее решение исходного неравенства — объединение решений обоих случаев.

Ответ. $(-1;2) \cup (3;6)$.

Замечание. В данном случае проще было из определения модуля получить двойное неравенство $-6 < x^2 - 5x < 6$, а затем его решить.

Пример 11.2. Решить неравенство

$$|x-3| + |x+3| \leq 9.$$

Решение. Точки -3 и 3 (корни выражений, стоящих под модулем) разбивают всю числовую ось на три интервала, на каждом из которых следует раскрыть модули.

1) При $x \geq 3$ выполняется $\begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x+3 > 0 \end{cases}$, и неравенство имеет вид $2x \leq 9$, то есть $x \leq 4.5$. В этом случае ответ $[3;4.5]$.

2) При $-3 \geq x < 3$ выполняется $\begin{cases} x-3 < 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases}$, неравенство имеет вид $-(x-3)+(x+3) \leq 9$, то есть $6 \leq 9$. Это неравенство верно при любых значениях переменной x, и, с учетом того, что мы решаем его на множестве $-3 \leq x < 3$, получаем ответ во втором случае $[-3;3)$.

3) При $x < -3$ выполняется $\begin{cases} x-3 < 0 \\ x+3 < 0 \end{cases}$, неравенство преобразуется к $-2x \leq 9$, и решение в этом случае $[-4.5;-3]$. Общее решение неравенства — объединение трех полученных ответов.

Ответ. $[-4.5;4.5]$.

§12. Геометрическое место точек плоскости

Покажем на примере, как на плоскости построить геометрическое место точек, задаваемое неравенством с модулем.

Пример 12.1. Построить множество точек на плоскости, задаваемое неравенством

$$|x-2|+|y+3| \leq 1.$$

Решение. Нужно рассмотреть четыре случая:

1) $x \geq 2, y \geq -3$. Тогда $|x-2| = x-2$, $|y+3| = y+3$, и неравенство принимает вид $x-2+y+3 \leq 1 \Leftrightarrow y \leq -x$. Каждое из множеств закрасим $x \geq 2$ (полуплоскость, лежащая правее прямой $x = 2$ — горизонтальная штриховка), $y \geq -3$ (полуплоскость, лежащая выше прямой $y = -3$ — вертикальная штриховка) и $y \leq -x$ (полуплоскость, лежащая ниже прямой $y = -x$ — косая штриховка). Получится рис. 16:

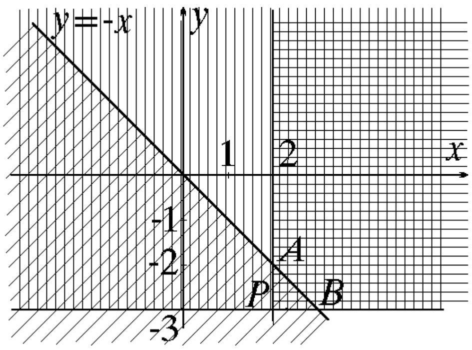

Рис. 16

Все три штриховки пересекаются на треугольнике PAB, где $P = (2, -3)$, $A = (2, -2)$, $B = (3, -3)$. Следовательно, этот треугольник есть первая часть ответа.

2) $x \geq 2, y < -3$. Тогда $|x-2| = x-2$, $|y+3| = -y-3$, и наше неравенство принимает вид $x-2-y-3 \leq 1 \Leftrightarrow y \geq x-6$. Так же, как и в первом случае, штрихуем плоуплоскости $x \geq 2$, $y \geq x-6$ и полуплоскость без граничной прямой $y < -3$.

Второй частью ответа будет треугольник PBC без стороны PB, где $C = (2, -4)$, а точки P и B те же, что и в первом случае.

3) $x < 2, y \geq -3$. Тогда $|x-2| = 2-x$, $|y+3| = y+3$, и имеем неравенство $2-x+y+3 \leq 1 \leftrightarrow y \leq x-4$.

Третья часть ответа — треугольник PAD без стороны PA, где $D = (1, -3)$.

4) $x < 2, y < -3$. Тогда $|x-2| = 2-x$, $|y+3| = -y-3$, и имеем неравенство $-x+2-y-3 \leq 1 \leftrightarrow y \geq -x-2$.

Последняя часть ответа — треугольник PDC без сторон PD и PC.

Ответ. Искомое множество — квадрат, изображенный на рис. 17:

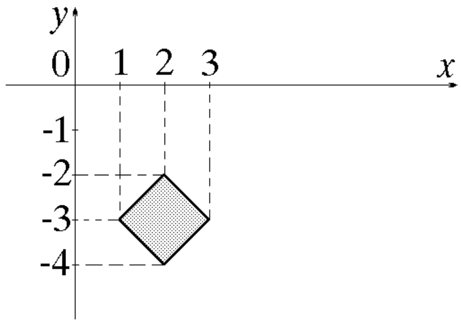

Рис. 17

ГЛАВА 2. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

§1. Координатная плоскость

Предположим, что на плоскости выбраны две взаимно перпендикулярные числовые оси с общим началом и одинаковыми единичными отрезками. Одну из них назовем осью абсцисс, другую — осью ординат. Пусть M — произвольная точка плоскости. Ее проекция на ось абсцисс является изображением некоторого числа x_0, а проекция на ось ординат — изображением числа y_0 (рис. 18). Число x_0 называется абсциссой точки M, y_0 — ординатой точки M. Абсцисса и ордината называются координатами точки M: $M(x_0, y_0)$.

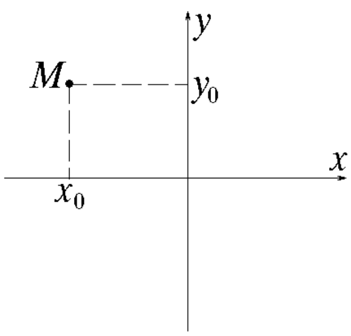

Рис. 18

Итак, каждой точке плоскости поставлена в соответствие упорядоченная пара вещественных чисел — ее координат. При этом каждая упорядоченная пара чисел соответствует одной и только одной точке.

Определение. Множество всех упорядоченных пар вещественных чисел называется *координатной плоскостью.*

Координатная плоскость изображается плоскостью, в которую введена система координат.

§2. Числовые функции

Понятие функции

Чтобы задать функцию, требуется задать некоторое числовое множество D — область определения функции — и правило, по которому каждому числу из множества D ставится в соответствие некоторое вещественное число.

Если правило обозначено буквой f, то число, которое по этому правилу соответствует числу $a \in D$, обозначают $f(a)$ и называют значением функции f в точке a или образом элемента a при отображении f.

Если $A \subset D$, то множество образов всех элементов множества A называют образом множества A при отображении f и обозначают $f(A)$. Множество $f(D)$ называют также множеством значений функции f.

Способы задания функций

I. Формулой

Пример 2.1. 1. $f(x) = \frac{3x^2-5}{x^2+4}, \quad D = \mathbb{R}$,

2. $h(x) = \frac{3x^2-5}{x^2+4}, \quad D = [0; 3]$,

3. $[x], \{x\}, \operatorname{sign} x, |x|$.

II. Таблицей.

D — конечное множество и выписаны все значения функции.

III. Графиком.

Определение. График функции f — множество всех точек координатной плоскости, абсцисса которых — число из области определения функции, а ордината точки с абсциссой a равна $f(a)$:

$$\Gamma_f = \{(a; f(a)) | a \in D_f\}.$$

Множество точек координатной плоскости является графиком какой-либо функции в том и только том случае, если в этом множестве не встречается двух точек с одинаковой абсциссой (иначе: любая прямая, параллельная оси ординат, пересекает это множество не более, чем в одной точке). Если функция задана графиком, то ее область определения — это проекция графика на ось абсцисс. Множество значений функции — это проекция графика на ось ординат.

Определение. Пусть функция f определена на множестве D, а множество E — множество значений f. Пусть $B \subset E$. Тогда множество $\{x \in D | f(x) \in \in B\}$ называется прообразом множества B при отображении f и обозначается $f^{-1}(B)$.

Замечание. Если множество B состоит из одного элемента b, то будем писать $f^{-1}(b)$.

Определение. Пусть f определена на множестве D. Пусть $X \subset D$. Говорят, что функция f возрастает (строго возрастает) [убывает] { строго убывает } на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X: \ x_1 > x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ $[f(x_1) \leq f(x_2)]$ $\{f(x_1) < f(x_2)\}$.

Обозначения: $f \nearrow$ — возрастает;

$f \nearrow$ — строго возрастает;

$f \searrow$ — убывает;

$f \searrow$ — строго убывает.

Определение. Корнем (или нулем) функции f называется любое решение уравнения $f(x) = 0$.

Определение. Средней скоростью роста функции f на отрезке $[a; b]$, входящем в ее область определения $(a \neq b)$, называется число $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

§3. Линейная функция

Определение. Пусть a и b — вещественные числа. Функция, определенная на множестве $\mathbb{R}$ по правилу $x \to ax + b$, называется линейной. Число a называется *угловым коэффициентом*, b — *свободным членом* этой функции.

Свойства линейной функции

Пусть $\varphi(x) = ax + b$ — линейная функция.

1. Если $a > 0$, то φ строго возрастает, если $a < 0$, то φ строго убывает.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\text{Пусть } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2,\\
&\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2),\\
&x_1 - x_2 > 0, \text{ так как } x_1 > x_2,\\
&\text{если } a > 0, \text{ то } \varphi(x_1) - \varphi(x_2) > 0,\\
&\text{если } a < 0, \text{ то } \varphi(x_1) - \varphi(x_2) < 0.
\end{aligned}$$

■

2. Пусть E_φ — множество значений функции φ.

Если $a \neq 0$, то $E_\varphi = \mathbb{R}$, если $a = 0$, то $E_\varphi = \{b\}$.

Доказательство. Случай $a = 0$ очевиден.

Пусть $a \neq 0$. Пусть y — произвольное вещественное число. Нужно доказать, что число y является значением функции φ, то есть что при некотором x выполняется равенство

$$ax + b = y \Leftrightarrow ax = y - b \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a}.$$

Итак, $y = \varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)$. Следовательно, $y \in E_\varphi$. ■

3. Если $a \neq 0$, то φ имеет один корень $-\frac{b}{a}$.

4. $\varphi\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Если $a > 0$, то φ строго возрастает, следовательно,
при $x > -\frac{b}{a}$ $\varphi(x) > \varphi\left(-\frac{b}{a}\right)$, то есть $\varphi(x) > 0$;
при $x < -\frac{b}{a}$ $\varphi(x) < \varphi\left(-\frac{b}{a}\right)$, то есть $\varphi(x) < 0$.

Если $a < 0$, то φ строго убывает, следовательно
при $x > -\frac{b}{a}$ $\varphi(x) < \varphi\left(-\frac{b}{a}\right)$, то есть $\varphi(x) < 0$;
при $x < -\frac{b}{a}$ $\varphi(x) > \varphi\left(-\frac{b}{a}\right)$, то есть $\varphi(x) > 0$.

5. Найдем среднюю скорость роста линейной функции на произвольном отрезке $[\alpha; \beta]$ $(\alpha \neq \beta)$:

$$\frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{a\beta + b - (a\alpha + b)}{\beta - \alpha} = \frac{a(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = a.$$

Средняя скорость роста линейной функции постоянна и равна ее угловому коэффициенту.

Это свойство является характеристическим свойством линейной функции.

Теорема 3.1. *Пусть функция f определена на множестве $\mathbb{R}$ и имеет постоянную среднюю скорость роста. Тогда f — линейная функция.*

Доказательство. Пусть a — средняя скорость роста функции f, пусть $b = f(a)$. Докажем, что

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = ax + b.$$

Если $x \neq 0$, то $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = a$ (это верно при $x > 0$ и при $x < 0$). $f(x) - b = ax \Rightarrow f(x) = ax + b$.

Последнее равенство верно и для $x = 0$. ■

6. График линейной функции — прямая.

§4. Преобразования графиков

Перенос вдоль оси абсцисс

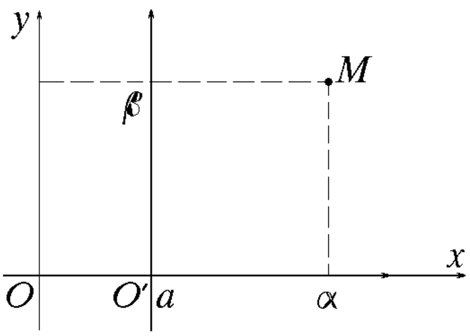

Рис. 19

Рассмотрим две системы координат: старую с началом O и новую с началом O' с сонаправленными осями и одинаковыми масштабами. Пусть точка O' имеет в старой системе координат координаты $(a; 0)$. Пусть M — произвольная точка плоскости, $M_{\text{нов}}(\alpha; \beta)$. Тогда ее координаты в старой системе координат $M_{\text{ст}}(\alpha + a; \beta)$ (см. рис. 19).

Пусть некоторое множество точек является в старой системе координат графиком функции $y = f(x)$, а в новой системе — графиком функции $y = g(x)$. Пусть M — точка из этого множества. Тогда

$$M_{\text{нов}}(x, g(x)); M_{\text{ст}}(x + a; g(x)) \Rightarrow g(x) = f(x + a).$$

Итак, чтобы из графика функции в получить график функции $g(x) = f(x + a)$, нужно перенести ось ординат вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц в направлении, определяемом знаком числа a. Вместо этого можно перенести график функции f в направлении, противоположном знаку a, на $|a|$ единиц (рис. 20).

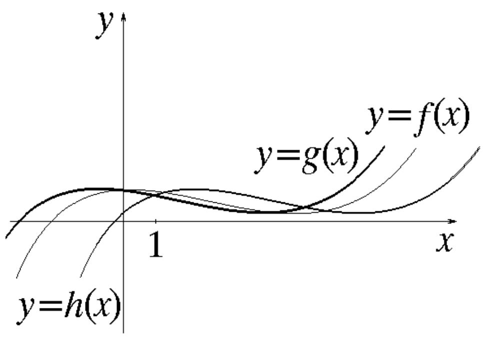

Рис. 20

На этом рисунке изображены графики функций $y = f(x)$, $y = = g(x) = f(x + 1)$ и $y = h(x) = f(x - 2)$.

Перенос вдоль оси ординат

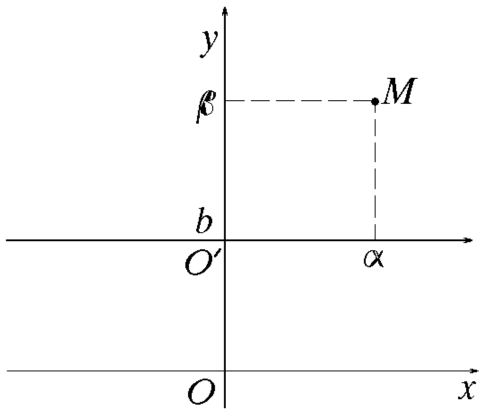

Рис. 21

Рассмотрим две системы координат: старую с началом O и новую с началом O' с сонаправленными осями и одинаковыми масштабами. Пусть точка O' имеет в старой системе координат координаты $(0; b)$. Пусть M — произвольная точка плоскости, ее координаты в новой системе координат $M_{\text{нов}}(\alpha; \beta)$. Тогда ее координаты в старой системе координат $M_{\text{ст}}(\alpha + a; \beta)$ (см. рис. 21).

Пусть некоторое множество точек является графиком функции $f(x)$ в старой системе координат и графиком функции $g(x)$ в новой системе координат. Пусть M — точка из этого множества.

$$M_{\text{нов}}(x; g(x)) \Rightarrow M_{\text{ст}}(x; g(x) + b) \Rightarrow g(x) + b = f(x).$$

$$\boxed{g(x) = f(x) - b}$$

Чтобы получить график функции $g(x) = f(x) - b$, нужно перенести ось абсцисс вдоль оси ординат на $|b|$ единиц в направлении знака b, или же перенести Γ_f вдоль оси ординат в направлении, противоположном знаку b (рис. 22).

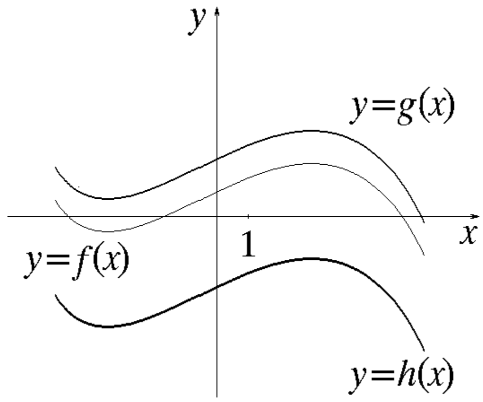

Рис. 22

На этом рисунке изображены графики функций $y = f(x)$, $y = = g(x) = f(x) + 1$ и $y = h(x) = f(x) - 3$.

Изменение единицы длины

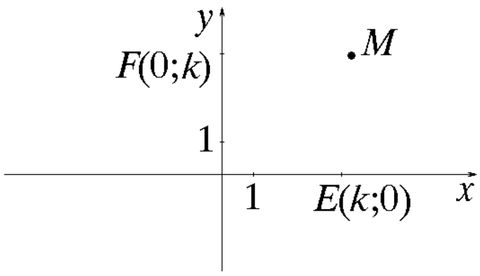

Рис. 23

Пусть дана система координат и точки $E(k;0), F(0;k)$ $(k \neq 0)$. Рассмотрим новую систему координат с теми же осями, тем же началом и новыми единичными отрезками OE и OF. Пусть M — произвольная точка, ее координаты в новой и старой системах координат соответственно $M_{\text{нов}}(\alpha;\beta)$, $M_{\text{ст}}(k\alpha;k\beta)$ (рис. 23).

Пусть некоторое множество точек является графиком функции $f(x)$ в старой системе координат, а в новой системе координат — $\Gamma_{g(x)}$. Пусть M — точка этого множества.

$$M_{\text{нов}}(x;g(x)), M_{\text{ст}}(kx;kg(x)) \Rightarrow kg(x) = f(kx).$$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{k}f(kx)}$$

Чтобы получить $\Gamma_{g(x)}$ $g(x) = \frac{1}{k}f(kx)$, нужно в k раз увеличить масштаб или же координаты каждой точки Γ_f уменьшить в k раз. То есть Γ_g получается из Γ_f гомотетией с центром O и коэффициентом $1/k$:

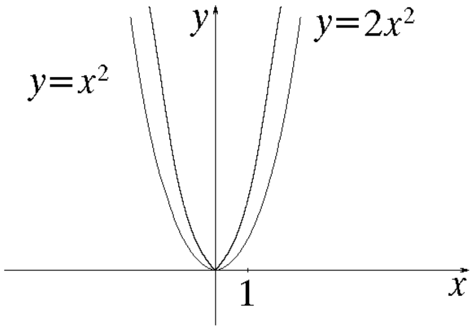

Рис. 24

$$ax^2 = \frac{1}{a}(ax)^2.$$

График функции $y = ax^2$ получается из графика функции $y = x^2$ гомотетией с коэффициентом $1/a$ (рис. 24).

Растяжение вдоль оси ординат

Чтобы получить график функции $y = af(x)$ $(a \neq 0)$, нужно ординату каждой точки графика f умножить на a, не меняя абсциссы.

Растяжение вдоль оси абсцисс

Пусть $g(x) = f(ax)$. Тогда

$$g(x) = a\left(\frac{1}{a}f(ax)\right).$$

Чтобы получить $\Gamma_{g(x)}$, нужно абсциссу каждой точки Γ_f разделить на a, не меняя ординаты.

График функции $g(x) = |f(x)|$ (рис. 25)

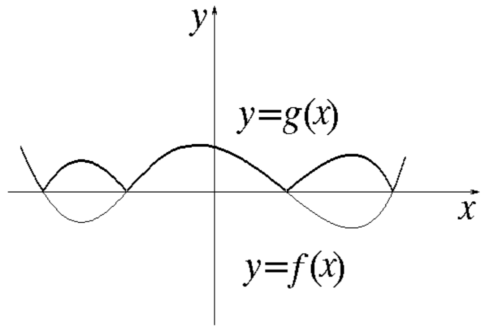

Рис. 25

График функции $g(x) = f(|x|)$ (рис. 26)

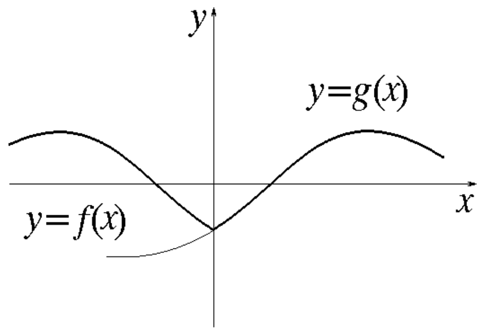

Рис. 26

Изменение направления одной из координатных осей

Вместо изменения направления оси ординат можно было бы отразить график относительно оси абсцисс (рис. 27), а вместо изменения направления оси абсцисс можно отразить график относительно оси ординат (рис. 28).

$g(x) = -f(x)$

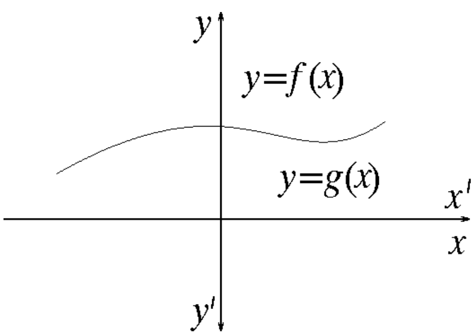

Рис. 27

$g(x) = f(-x)$

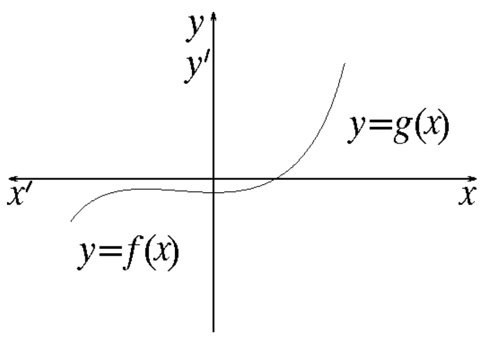

Рис. 28

§5. Дробно-линейная функция

Равнобочная гипербола

Исследуем функцию, заданную формулой $y = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$.

Функция строго убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

Доказательство. Пусть $x_1 > x_2$, x_1 и x_2 одного знака. Тогда $\dfrac{1}{x_1} < \dfrac{1}{x_2}$. (см. свойство неравенств 9). ■

Множество значений функции — $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доказательство. Пусть $y_0 \neq 0$. Тогда $y_0 = \frac{1}{\frac{1}{y_0}} \Rightarrow y_0$ принадлежит множеству значений функции. ■

Определение. Множество точек плоскости, которое в какой-либо системе координат является графиком функции $f(x) = \frac{1}{x}$, называется равнобочной гиперболой.

График равнобочной гиперболы приведен на рис. 29:

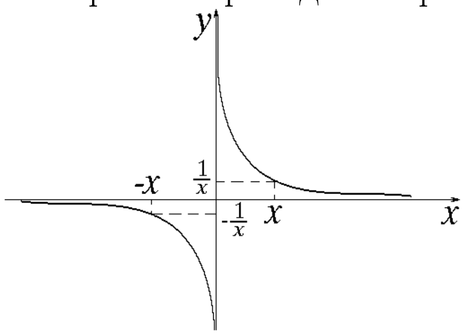

Рис. 29

Равнобочная гипербола $y = \frac{1}{x}$ симметрична относительно начала координат.

Определение. Функция, график которой симметричен относительно начала координат, называется нечетной функцией.

Пример 5.1. $y = x, y = x^3, y = \frac{1}{x^7}, y = 2x^3 - 5x^{11}$.

Определение. Прямые $x = 0$ и $y = 0$ называются асимптотами равнобочной гиперболы $y = \frac{1}{x}$.

Асимптоты перпендикулярны осям координат и проходят через точки на этих осях, которые не принадлежат области определения или множеству значений функции $y = \frac{1}{x}$.

Преобразования системы координат

1) *Изменение направления оси абсцисс*

Гипербола — график функции $g_1(x) = f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ (рис. 30).

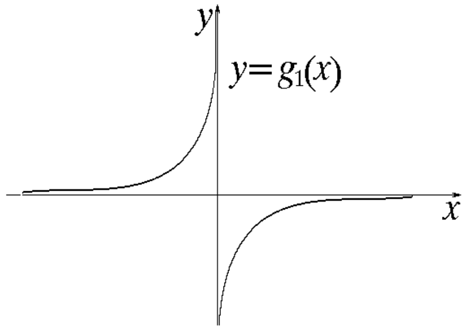

Рис. 30

2) *Изменение масштаба*

Из Γ_f получаем график функции

$$g_2(x) = \frac{1}{k}f(kx) = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{kx} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Из Γ_{g_1} получается график функции

$$y = g_3(x) = \frac{1}{k}g_1(kx) = \frac{1}{k} \cdot \left(-\frac{1}{kx}\right) = -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Таким образом, график любой функции $g_4(x) = \frac{p}{x}$ $(p \neq 0)$ является равнобочной гиперболой.

Если $p > 0$, нужно взять $k = \frac{1}{\sqrt{p}}$ и получмить $\Gamma_{g_4(x)}$ из $\Gamma_{g_2(x)}$.

Если $p < 0$, нужно взять $k = \frac{1}{\sqrt{-p}}$ и получмить $\Gamma_{g_4(x)}$ из $\Gamma_{g_3(x)}$.

3) *Сдвиг вдоль оси абсцисс*

Из $\Gamma_{g_4(x)}$ получим график функции $g_5(x) = \frac{p}{x+q}$.

4) *Сдвиг вдоль оси ординат*

Из $\Gamma_{g_5(x)}$ получим $\Gamma_{g_6(x)}$

$$g_6(x) = \frac{p}{x+q} + r.$$

Определение. Дробно-линейной функцией называется функция, заданная формулой

$$h(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}, c \neq 0, bc \neq ad$.

Область определения этой функции $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{d}{c}\right\}$.

Теорема 5.1. *График дробно-линейной функции — равнобочная гипербола.*

Доказательство. Преобразуем дробь $\frac{ax+b}{cx+d}$ к виду $\frac{p}{x+q} + r$ $(p \neq 0)$:

$$\frac{ax+b}{cx+d} \overset{c\neq 0}{=} \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(x + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} - \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{c}\right)}{x + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Нужно взять $p = \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2} = \frac{bc-ad}{c^2} \neq 0,\ q = \frac{d}{c},\ r = \frac{a}{c}$. ■

Практический прием построения графика дробно-линейной функции

1. Находится запрещенное значение x.

2. Находится запрещенное значение функции. Для этого из равенства $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ выражается x через y.

3. Наносим найденные точки на оси координат и проводим через них прямые, перпендикулярные осям — асимптоты графика.

4. Чтобы определить положение графика по отношению к асимптотам, находим одну точку графика.

5. Находим еще несколько точек и, учитывая, что гипербола симметрична относительно точки пересечения асимптот, строим ее.

§6. Квадратный трехчлен

Определение. Квадратным трехчленом называется функция, определенная на всей числовой оси равенством вида $f(x) = ax^2+ +bx + c$, где $a, b, c \in \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Определение. Множество точек плоскости, которое в какой-либо системе координат является графиком функции $y = x^2$, называется параболой.

При изменении масштаба получим график функции

$$y = \frac{1}{k}(kx)^2 = kx^2 \qquad (k \neq 0),$$
$$y = kx^2.$$

Теорема 6.1. *График квадратного трехчлена — парабола.*

Доказательство. Теорема доказана для трехчленов вида $y = ax^2$ (нужно изменить масштаб, взяв $k = a$).

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\mathcal{D}}{4a}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D} = b^2 - 4ac$. Следовательно, график квадратного трехчлена $y = = ax^2 + bx + c$ можно получить из параболы $y = ax^2$ при таком параллельном переносе координатных осей, чтобы начало координат оказалось в точке $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\mathcal{D}}{4a}\right)$ (см. рис. 31). ■

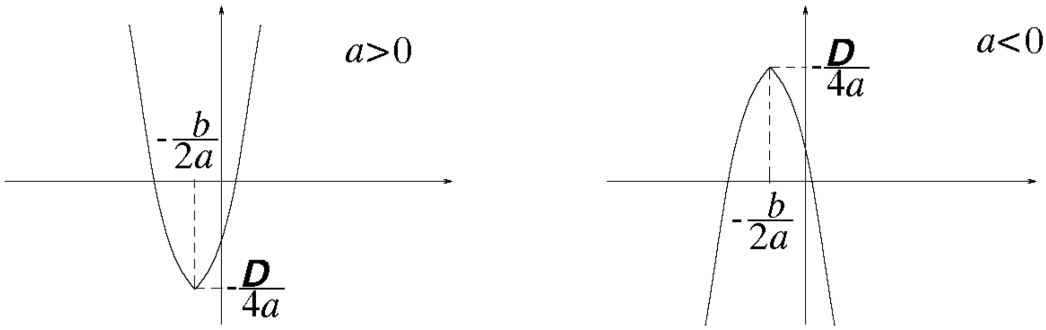

Рис. 31

Если $a > 0$, то f строго убывает на $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и f строго возрастает на $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то f строго возрастает на $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ и f строго убывает на $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Доказательство. Пусть $a > 0$, $x_1, x_2 \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, пусть $x_1 > x_2$:

$$\begin{aligned}
&x_1, x_2 + \tfrac{b}{2a} \in (-\infty; 0],\\
&x_1 + \tfrac{b}{2a} > x_2 + \tfrac{b}{2a},\\
&\left(x_1 + \tfrac{b}{2a}\right)^2 < \left(x_2 + \tfrac{b}{2a}\right)^2,\\
&a\left(x_1 + \tfrac{b}{2a}\right)^2 < a\left(x_2 + \tfrac{b}{2a}\right)^2,\\
&a\left(x_1 + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\mathcal{D}}{4a} < a\left(x_2 + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\mathcal{D}}{4a},\\
&ax_1^2 + bx_1 + c < ax_2^2 + bx_2 + c.
\end{aligned}$$

■

Определение. Число $\mathcal{D}$, равное $b^2 - 4ac$, называется дискриминантом квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Если $\mathcal{D} > 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня $\frac{-b-\sqrt{\mathcal{D}}}{2a}$ и $\frac{-b+\sqrt{\mathcal{D}}}{2a}$.
Если $\mathcal{D} = 0$, то квадратный трехчлен имеет один корень $\frac{-b}{2a}$.
Если $\mathcal{D} < 0$, то квадратный трехчлен не имеет вещественных корней.

Промежутки знакопостоянства

1. $\mathcal{D} > 0$. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного трехчлена, $x_1 < x_2$. Заметим (рис. 32), что

$$-\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_1 < -\frac{b}{2a} < x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 \in \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right), x_2 \in \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right).$$

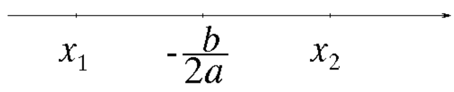

Рис. 32

Пусть $a > 0$. Тогда f строго убывает на $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$, $f(x_1) = 0$. Следовательно, $f(x) > 0$ при $x < x_1$ и $f(x) > 0$ при $x_1 < x < -\frac{b}{2a}$.

f строго возрастает на $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$, $f(x_2) = 0$. Следовательно, $f(x) < 0$ при $x \in \left(-\frac{b}{2a}; x_2\right)$ и $f(x) > 0$ при $x > x_2$.

Итак, если $a > 0, \mathcal{D} > 0$, то f отрицательна на (x_1, x_2) (между корнями), f положительна вне отрезка $[x_1; x_2]$.

Аналогично доказывается, что при $\mathcal{D} > 0, a < 0$ квадратный трехчлен положителен между корнями и отрицателен вне корней.

2. $\mathcal{D} \leq 0$.

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\mathcal{D}}{4a}.$$

Отсюда следует, что при $a > 0$ квадратный трехчлен положителен на всей оси (кроме точки $-\frac{b}{2a}$, если $\mathcal{D} = 0$), а при $a < 0$ квадратный трехчлен отрицателен на всей оси (кроме точки $-\frac{b}{2a}$, если $\mathcal{D} = 0$).

Множество значений квадратного трехчлена

Определение. Множество значений функции f — это множество таких чисел p, для которых уравнение $f(x) = p$ имеет корень.

Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трехчлен.

$$ax^2 + bx + c = p \Leftrightarrow ax^2 + bx + (c - p) = 0.$$

Это уравнение имеет корень в том и только в том случае, если

$$\begin{aligned} &b^2 - 4a(c-p) \geq 0, \\ &b^2 - 4ac + 4ap \geq 0, \\ &4ap \geq \mathcal{D}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}$ — дискриминант данного квадратного трехчлена.

Если $a > 0$, то множество значений квадратного трехчлена $\left[-\frac{\mathcal{D}}{4a}; +\infty\right)$.

Если $a < 0$, то множество значений квадратного трехчлена $\left(-\infty; -\frac{\mathcal{D}}{4a}\right]$.

Расположение корней квадратного трехчлена

Предположим, что квадратная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два вещественных корня x_1 и x_2, $(x_1 < x_2)$. При $a > 0$ эта функция принимает отрицательные значения в промежутке (x_1, x_2) и положительные значения — вне промежутка $[x_1, x_2]$. При $a < 0$ функция принимает положительные значения в промежутке (x_1, x_2) и отрицательные значения — вне промежутка

$[x_1, x_2]$. Для того чтобы для произвольного числа α выяснить, принадлежит ли оно промежутку (x_1, x_2), достаточно знать знак коэффициента a и знак числа $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$. Тем самым, $\alpha \in (x_1, x_2)$ тогда и только тогда, когда $af(\alpha) < 0$.

§7. Функции $y = x^n, y = \sqrt[n]{x}, y = \frac{1}{x^n}$, где $n \in \mathbb{N}$

I. $y = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Область определения $(-\infty; +\infty)$.

Если $x_1 > x_2 \geq 0$, то $x_1^n > x_2^n$, так что функция строго возрастает на $[0; +\infty)$.

Если n четно, то при $x_1 < x_2 \leq 0$

$$\begin{gathered} -x_1 > -x_2 \geq 0, \\ (-x_1)^n > (-x_2)^n, \\ x_1^n > x_2^n, \end{gathered}$$

так что функция строго убывает на $(-\infty; 0]$.

Если n нечетно, то при $x_1 < x_2 \leq 0$

$$\begin{gathered} -x_1 > -x_2 \geq 0, \\ (-x_1)^n > (-x_2)^n, \\ -x_1^n > -x_2^n, \\ x_1^n < x_2^n, \end{gathered}$$

так что функция строго возрастает на $(-\infty; 0]$.

Если n четно, то множество значений $[0; +\infty)$, если n нечетно, то $(-\infty; +\infty)$.

Доказательство. Равенство $(\sqrt[n]{p})^n = p$ верно при всех $p \geq 0$, если n четно; при всех p, если n нечетно. ■

Определение. Функция, график которой симметричен относительно начала координат, называется нечетной. Функция, график которой симметричен относительно оси ординат, называется четной.

При нечетном n функция $y = x^n$ нечетна. При четном n функция $y = x^n$ четна (рис. 33).

II. $y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}$.

Область определения $[0; +\infty)$, если n четно, $(-\infty; +\infty)$, если n нечетно.

Множество значений $[0; +\infty)$, если n четно, $(-\infty; +\infty)$, если n нечетно.

Доказательство. Равенство $(\sqrt[n]{p})^n = p$ верно при всех $p \geq 0$, если n четно; при всех p, если n нечетно. ■

Функция строго возрастает на всей области определения.

Если n нечетно, то

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n.$$

График функции $y = \sqrt[n]{x}$ симметричен графику функции $y = x^n$ относительно прямой $y = x$.

Если n четно, то

$$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

График функции $y = \sqrt[n]{x}$ при четном n симметричен правой ветви графика функции $y = x^n$ относительно прямой $y = x$ (рис. 34).

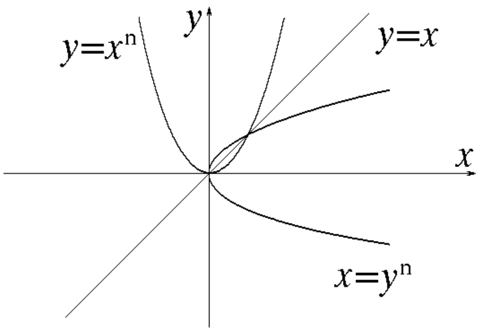

Рис. 33

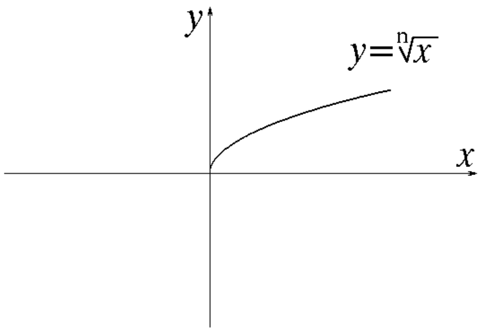

Рис. 34

III. $y = \dfrac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

Область определения $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множество значений $[0; +\infty)$, если n четно, $(-\infty; +\infty)$, если n нечетно.

Функция четна при четном n, нечетна при нечетном n.

Если n четно, то функция строго возрастает на $(-\infty; 0)$ и строго убывает на $(0; +\infty)$.

Если n нечетно, то функция строго убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$.

На следующих рисунках представлены графики функций $y = = x^n, y = \sqrt[n]{x}$ (рис. 35), $y = \dfrac{1}{x^n}$ (рис. 36) для некоторых значений n.

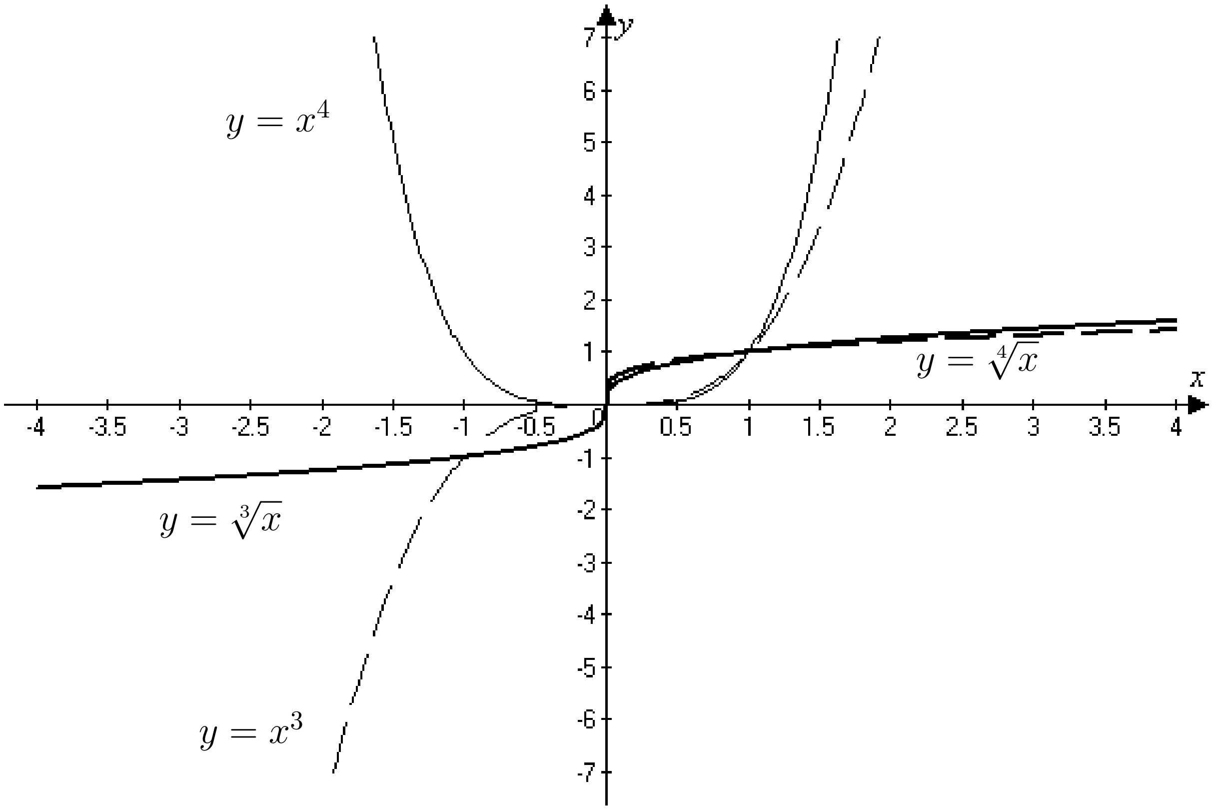

Рис. 35

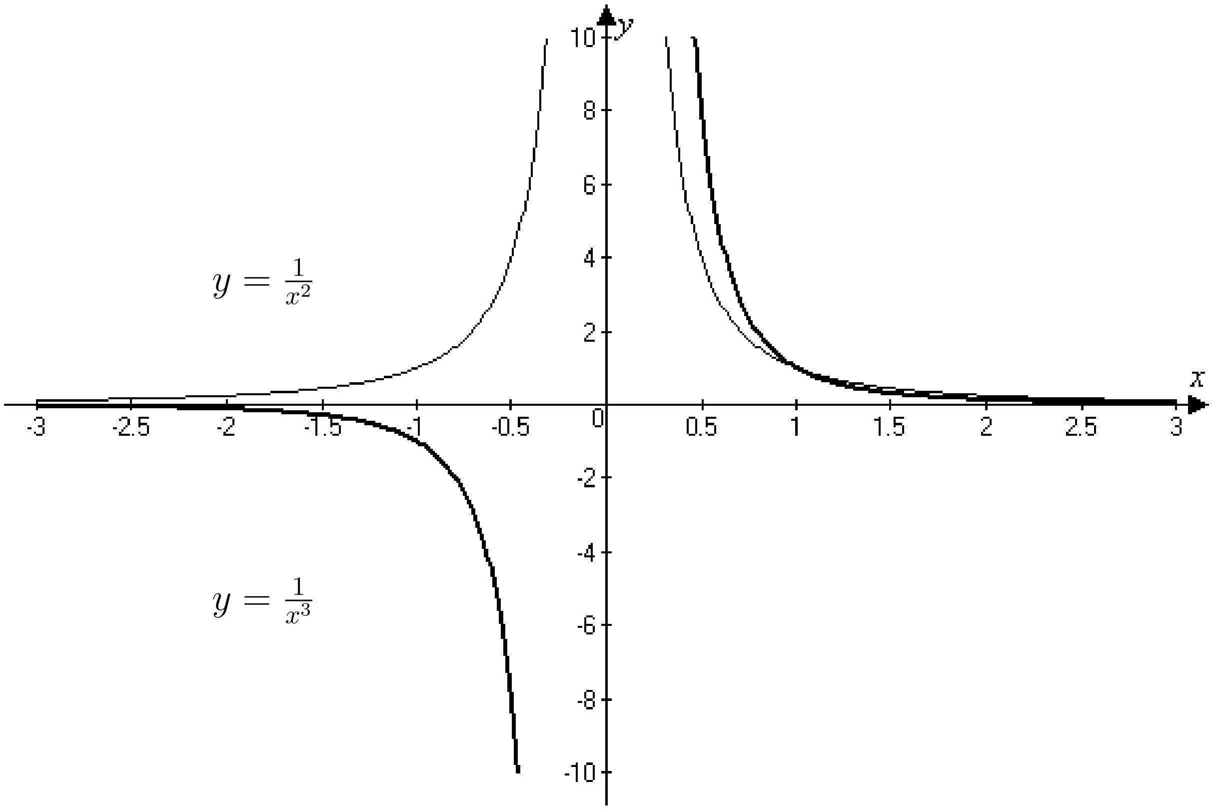

Рис. 36

ГЛАВА 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§1. Числовая окружность

Определение. Числовой окружностью называется окружность на координатной плоскости с центром в начале координат и единичным радиусом.

Числовая окружность изображена на рис. 37:

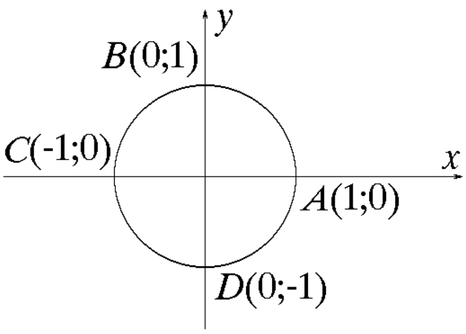

Рис. 37

Иначе говоря, это множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

Представим себе, что точка P равномерно движется по числовой окружности против часовой стрелки со скоростью 1.

Будем предполагать, что это движение обладает следующими свойствами ($P(t)$ — положение точки в момент времени t):

1. $\forall t \in \mathbb{R}$ $P(t)$ — точка числовой окружности.
2. $P(0) = A$.
3. $P(\pi/2) = B$.
4. $\forall t \in (0; \pi/2)$ $P(t)$ имеет положительные координаты.
5. $P(\alpha) = P(\beta) \Rightarrow \alpha - \beta = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.
6. $\alpha - \beta = \alpha_1 - \beta_1 \Rightarrow$ расстояние между точками $P(\alpha)$ и $P(\beta)$ равно расстоянию между точками $P(\alpha_1)$ и $P(\beta_1)$.

Примечание. Расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

§2. Определение синуса и косинуса

Определение. Предположим, что точка P равномерно движется по числовой окружности так, что выполняются свойства 1–6. Абсцисса точки $P(t)$ называется косинусом числа t, ордината — синусом числа t.

$$\begin{array}{ll} \cos 0 = 1, & \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}\ \sin^2 t + \cos^2 t = 1, \\ \sin 0 = 0, & \sin\frac{\pi}{2} = 1. \end{array}$$

§3. Теоремы сложения

Теорема 3.1.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Доказательство. $(\alpha-\beta)-0=\alpha-\beta$.

Из свойства 6 следует, что расстояние между точками $P(\alpha-\beta)$ и $P(0)$ равно расстоянию между точками $P(\alpha)$ и $P(\beta)$. Координаты точек

$$\begin{array}{ll} P(\alpha-\beta) & (\cos(\alpha-\beta);\sin(\alpha-\beta)),\\ P(0) & (1;0),\\ P(\alpha) & (\cos\alpha;\sin\alpha),\\ P(\beta) & (\cos\beta;\sin\beta). \end{array}$$

$$\begin{aligned} &(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2,\\ &\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)=\\ &=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta,\\ &1-2\cos(\alpha-\beta)+1=1-2\cos\alpha\cos\beta_1-2\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

■

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

Теорема 3.2.

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha=\sin\beta,\cos\beta=\sin\alpha.$$

Доказательство. Воспользуемся рисунком (см. рис. 38):

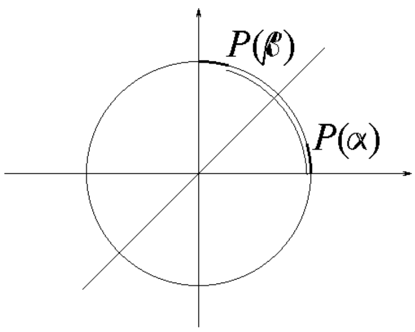

Рис. 38

$$\begin{aligned} \cos\beta=\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\\ =\cos\tfrac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\tfrac{\pi}{2}\sin\alpha=\\ =\sin\alpha \end{aligned}$$

Аналогично $\cos\alpha=\sin\beta$. ■

Теорема 3.3.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} &\sin(\alpha+\beta)\overset{\text{т.3.2}}{=}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\\ &\overset{\text{т.3.1}}{=}\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\overset{\text{т.3.2}}{=}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

■

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

Вычисление $\sin\pi$ и $\cos\pi$

$$\sin\pi = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Т.3.3}}{=} \sin\tfrac{\pi}{2}\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} = 0,$$
$$\cos^2\pi = 1 - \sin^2\pi = 1.$$

$\cos\pi = 1$ или $\cos\pi = -1$.

Если $\cos\pi = 1$, то $P(\pi) = P(0) \overset{5}{\Rightarrow} \frac{\pi-0}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, $\cos\pi \neq 1$. Следовательно, $\cos\pi = -1$.

Вычисление синуса и косинуса $\frac{3\pi}{2}$

$$\sin\tfrac{3\pi}{2} = \sin\left(\pi+\tfrac{\pi}{2}\right) \overset{\text{Т.3.3}}{=} \sin\pi\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\pi\sin\tfrac{\pi}{2} = -1,$$
$$\cos^2\tfrac{3\pi}{2} = 1 - \sin^2\tfrac{3\pi}{2} = 0,$$
$$\cos\tfrac{3\pi}{2} = 0.$$

Вычисление синуса и косинуса 2π

$$\sin 2\pi = \sin(\pi+\pi) = \sin\pi\cos\pi + \cos\pi\sin\pi = 0,$$
$$\cos^2 2\pi = 1 - \sin^2 2\pi = 1,$$

$\cos 2\pi = 1$ или $\cos 2\pi = -1$.

Если $\cos 2\pi = -1$, то $P(2\pi) = P(\pi) \overset{5}{\Rightarrow} \frac{2\pi-\pi}{2\pi} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Следовательно, $\cos 2\pi \neq -1$. Следовательно, $\cos 2\pi = 1$.

Теорема 3.4.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Доказательство.

$$\cos(-\alpha) = \cos(0-\alpha) \overset{\text{Т.3.1}}{=} \cos 0\cos\alpha + \sin 0\sin\alpha = \cos\alpha.$$

■

Теорема 3.5.

$$\cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha,\ \sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha.$$

Доказательство.

$$\sin(2\pi+\alpha) \overset{\text{Т.3.3}}{=} \sin 2\pi\cos\alpha + \cos 2\pi\sin\alpha = \sin\alpha.$$
$$\cos(2\pi+\alpha) = \cos(2\pi-(-\alpha)) \overset{\text{Т.3.1}}{=} \cos 2\pi\cos(-\alpha) + \sin 2\pi\sin(-\alpha) =$$
$$= \cos(-\alpha) \overset{\text{Т.3.4}}{=} \cos\alpha.$$

■

Следствие 3.1.

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \ \cos(2\pi k + \alpha) = \cos\alpha, \ \sin(2\pi k + \alpha) = \sin\alpha.$$

Следствие 3.2.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ \ \sin \pi n = 0.$$

Доказательство. πn отличается на $2k\pi$ от 0 или от π $k \in \mathbb{Z}$, а $\sin 0 = 0$ и $\sin\pi = 0$. ∎

Теорема 3.6.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Доказательство.

$$\sin^2(-\alpha) = 1 - \cos^2(-\alpha) \overset{\text{т.3.4}}{=} 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

$\sin(-\alpha) = \sin\alpha$ или $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

Предположим, что $\sin(-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(-\alpha) \overset{\text{т.3.4}}{=} \cos\alpha$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&P(\alpha) = P(-\alpha) \overset{5}{\Rightarrow} \alpha - (-\alpha) = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ 2\alpha = 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Rightarrow \alpha = \pi k, \ -\alpha = \pi(-k) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
&\Rightarrow \ \sin\alpha = 0, \ \sin(-\alpha) = 0 \ \Rightarrow \ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.
\end{aligned}$$

∎

Теорема 3.7.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha, \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) - \cos\alpha\sin(-\beta) = \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta) = \\
&= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

∎

§4. Тангенс и котангенс

Определение. Если $\cos\alpha \neq 0$, то отношение синуса α к косинусу α называется тангенсом α и обозначается $\operatorname{tg}\alpha$.

Если $\sin\alpha \neq 0$, то отношение косинуса α к синусу α называется котангенсом α и обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Поделив обе части на $\cos^2\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0)$, получим

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \overset{\sin\alpha\neq 0}{\Rightarrow} 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Из определения тангенса и котангенса следует, что при $\sin\alpha \neq 0, \cos\alpha \neq$ $\neq 0$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

§5. Формулы приведения

Формулы приведения выражают синус и косинус $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ $k \in \mathbb{Z}$ через $\sin\alpha$ или $\cos\alpha$, а тангенс и котангенс $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ $k \in \mathbb{Z}$ — через $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$.

Теорема 5.1.

	$k = 4l$	$k = 4l + 1$	$k = 4l + 2$	$k = 4l + 3$
$\sin\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{k\pi}{2} + \alpha\right)$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\sin\left(\frac{k\pi}{2} - \alpha\right)$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\left(\frac{k\pi}{2} - \alpha\right)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{2} - \alpha\right)$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\left(\frac{k\pi}{2} - \alpha\right)$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$

Доказательство. Если k увеличить или уменьшить на 4, то $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ изменяется на 2π. Следовательно, синус, косинус, тангенс и котангенс не изменятся. Поэтому достаточно доказать теорему для $k = 1, 2, 3$. Во всех этих случаях она легко выводится из теорем сложения. ∎

§6. Знаки тригонометрических функций

Теорема 6.1. 1. *Если* $\alpha \in \left(2\pi k; 2\pi k + \frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *то* $\sin\alpha{>}0$, $\cos\alpha >$ $0, \operatorname{tg}\alpha > 0, \operatorname{ctg}\alpha > 0$.

2. *Если* $\alpha \in \left(2\pi k + \frac{\pi}{2}; 2\pi k + \pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *то* $\sin\alpha{>}0$, $\cos\alpha{<}0$, $\operatorname{tg}\alpha <$ $0, \operatorname{ctg}\alpha < 0$.

3. *Если* $\alpha \in \left(2\pi k + \pi; 2\pi k + \frac{3\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *то* $\sin\alpha{<}0$, $\cos\alpha{<}0$, $\operatorname{tg}\alpha >$ $0, \operatorname{ctg}\alpha > 0$.

4. *Если* $\alpha \in \left(2\pi k + \frac{3\pi}{2}; 2\pi k + 2\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *то* $\sin\alpha{<}0$, $\cos\alpha{>}0$, $\operatorname{tg}\alpha <$ $0, \operatorname{ctg}\alpha < 0$.

Доказательство. В силу следствия 3.1 теоремы 3.5 достаточно доказать теорему только для $k = 0$.

Первое утверждение следует из свойства 4 определения синуса и косинуса. Второе утверждение следует из случая $k = 4l+1$ формул приведения. Третье утверждение — из случая $k = 4l+2$, четвертое — из случая $k = 4l+3$ формул приведения. ■

§7. Некоторые значения тригонометрических функций

Теорема 7.1. $\sin\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Доказательство. Так как $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$ (теорема 3.2).

$$\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow 2\sin^2\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{\pi}{4} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\frac{\pi}{4} > 0$.

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

■

Теорема 7.2.

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\cos\tfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{\pi}{3}\right) = \cos\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\tfrac{\pi}{3}\sin\tfrac{\pi}{3} = \\
&= \cos^2\tfrac{\pi}{3} - \sin^2\tfrac{\pi}{3} = \cos^2\tfrac{\pi}{3} - \left(1 - \cos^2\tfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos^2\tfrac{\pi}{3} - 1. \\
&\cos\tfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \tfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\tfrac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$\cos\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $2x^2 + x - 1 = 0$.

$$x_1 = \tfrac{1}{2}, x_2 = -1.$$

Так как $\frac{\pi}{3} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\frac{\pi}{3} > 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} \neq -1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\sin\tfrac{\pi}{6} = \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{6}\right) = \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}, \\
&\sin\tfrac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \cos^2\tfrac{\pi}{3}} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \\
&\cos\tfrac{\pi}{6} = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{6}\right) = \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

■

§8. Тангенс суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Это равенство верно при условии

$$\cos(\alpha+\beta) \neq 0, \cos\alpha \neq 0, \cos\beta \neq 0.$$

Полученной формулой можно всегда пользоваться справа налево, а слева направо только при условии, что $\cos\alpha, \cos\beta \neq 0$. То же относится и к формуле

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

§9. Формулы двойного и половинного аргумента

Теорема 9.1. *Если* $\cos\alpha \neq 0$*, то*

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Доказательство.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

■

Теорема 9.2.

1. $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$,

2. $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$,

3. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \left(\cos\dfrac{\alpha}{2} \neq 0\right)$.

Доказательство.

$\cos\alpha = \cos\frac{2\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \mathbf{1}$.

$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \mathbf{2}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

■

§10. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение

Теорема 10.1. *Для любых x и y справедливы равенства*

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

Доказательство. Все четыре формулы доказываются преобразованием правой части в сумму

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta),$$
$$\alpha-\beta = x, \alpha+\beta = y,$$
$$\alpha = \tfrac{x+y}{2}, \beta = \tfrac{y-x}{2}.$$

■

§11. Периодические функции

Определение. Число T называется периодом функции f, если $\forall x \in D_f$ $x+T \in D_f$ и $f(x+T) = f(x)$.

Если $\forall x \in D_f$ числа $x+T$ и $x-T$ принадлежат D_f и $f(x+ +T) = f(x)$, то $f(x-T) = f(x-T+T) = f(x)$.

Определение. Функция называется периодической, если у нее есть период, не равный нулю.

Пример 11.1.

1. $f(n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}$,
$f(x) = \{x\}$.
Любое целое число является периодом этой функции.
2. Функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$.
Число 2π является периодом любой из этих функций.

Теорема 11.1. *Если T_1, T_2 — периоды функции f, то T_1+T_2, T_1-T_2 — тоже периоды f.*

Доказательство. Пусть $x \in D_f$. Тогда

$$\left.\begin{array}{l} x+T_1 \in D_f \\ x-T_1 \in D_f \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} (x+T_1)+T_2 \in D_f, \\ (x-T_1)-T_2 \in D_f. \end{array}$$

$$
\begin{gathered}
x + (T_1 + T_2) \in D_f, \\
x - (T_1 + T_2) \in D_f, \\
f(x + (T_1 + T_2)) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + T_1) = f(x).
\end{gathered}
$$

Аналогично доказывается, что $T_1 - T_2$ — период. ∎

Следствие 11.1. *Если T — период f, $n \in \mathbb{Z}$, то nT — период f.*

Определение. Наименьший из всех положительных периодов функции f называется главным периодом этой функции.

Постоянная функция периодична, но не имеет главного периода.

Рассмотрим функцию Дирихле:

$$
f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}
$$

Любое рациональное число является периодом функции Дирихле.

Теорема 11.2. *Если T — главный период функции f, то любой ее период имеет вид nT, где $n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Пусть T_1 — произвольный период функции f и пусть $n = \left[\frac{T_1}{T}\right]$. Тогда

$$
\begin{gathered}
n \leq \tfrac{T_1}{T} < n + 1, \\
nT \leq T_1 < (n+1)T, \\
0 \leq T_1 - nT < T.
\end{gathered}
$$

$T_1 - nT$ тявляется периодом функции f. Если бы было $T_1 - nT > 0$, то $T_1 - nT$ было бы положительным периодом, меньшим T. Это противоречит тому, что T — главный период. Следовательно, $T_1 - nT = 0 \Leftrightarrow T_1 = nT$. ∎

Теорема 11.3. 2π *— главный период функций синус и косинус.*

Доказательство. 1.

$$
\forall x \in \mathbb{R} \; \begin{array}{l} \sin(x + 2\pi) = \sin x, \\ \cos(x + 2\pi) = \cos x. \end{array}
$$

Следовательно, 2π — период функций синус и косинус.

2. Так как решениями уравнения $\sin x = 1$ являются числа $\pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и только эти числа и так как разность между любыми двумя из этих чисел по модулю не меньше 2π, то синус не может иметь положительного периода, меньшего 2π.

Аналогично доказательство проводится для косинуса. ∎

Теорема 11.4. *Главный период функций тангенс и котангенс равен π.*

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей теоремы. ∎

§12. Корни тригонометрических функций

Теорема 12.1.
$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Доказательство. Воспользуемся рисунком (рис. 39):

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \{A, C\}.$$

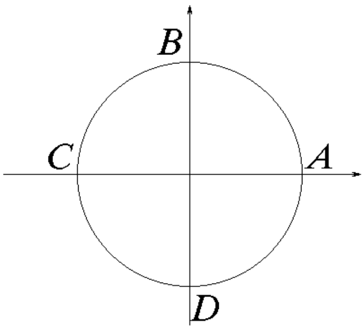

Рис. 39

1. $P(x) = A \Leftrightarrow P(x) = P(0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \{0 + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \{\pi \cdot 2n | n \in \mathbb{Z}\}$
$\Leftrightarrow x \in \{\pi k | k$ четное число$\}$.
2.$P(x) = C \Leftrightarrow P(x) = P(\pi) \Leftrightarrow$
$x \in \{\pi + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \{\pi(2n + 1) | n \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \{\pi(2n + 1) | n \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x \in \{\pi(2n + 1) | n \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\pi k | k \text{ нечетное число}\}.$$

Объединением этих двух множеств является множество

$$\{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

■

Теорема 12.2.
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,|k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Доказательство.

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(-\tfrac{\pi}{2} + x\right) = 0 \Leftrightarrow -\tfrac{\pi}{2} + x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

Теорема 12.3.
$$\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0,$$
$$\operatorname{ctg} x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0.$$

Доказательство. Очевидно ■

§13. Простейшие тригонометрические уравнения

I. Уравнение $\cos x = \cos \alpha$.

Теорема 13.1. *Множество решений уравнения* $\cos x = \cos\alpha$ *есть множество*

$$\{\pm\alpha + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \cos x - \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow -2\sin\tfrac{x-\alpha}{2}\sin\tfrac{x+\alpha}{2} = 0,\\
&\mathbf{1}.\sin\tfrac{x-\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \tfrac{x-\alpha}{2} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\
&\mathbf{2}.\sin\tfrac{x+\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow \tfrac{x+\alpha}{2} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

■

II. Уравнение $\sin x = \sin\alpha$.

Теорема 13.2. *Множество решений уравнения* $\sin x = \sin\alpha$ *есть множество*

$$\{\alpha + 2\pi k; \pi - \alpha + 2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Доказательство. Воспользуемся рисунком (рис. 40):

■

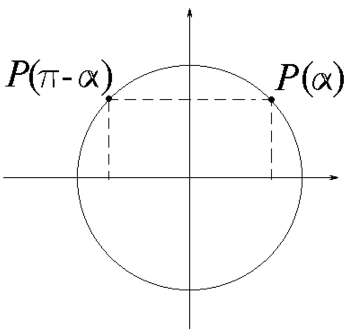

Рис. 40

$$\begin{aligned}
&\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow \sin x - \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow 2\sin\tfrac{x-\alpha}{2}\cos\tfrac{x+\alpha}{2} = 0.\\
&\mathbf{1}.\sin\tfrac{x-\alpha}{2} = 0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \tfrac{x-\alpha}{2} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\\
&\mathbf{2}.\cos\tfrac{x+\alpha}{2} = \tfrac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Следствие 13.1. *Множество решений уравнения* $\sin x = \sin\alpha$ *есть множество*

$$\{(-1)^n\alpha + \pi n | n \in \mathbb{Z}\}.$$

Доказательство. Если n — четное число, $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$(-1)^n\alpha + \pi n = \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Если n нечетно, $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{Z}$

$$(-1)^n\alpha + \pi n = \pi - \alpha + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

■

III. Уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha$.

Теорема 13.3. *Множество решений уравнения* $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha$ *есть множество*

$$\{\alpha + \pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Доказательство.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin x\cos\alpha - \cos x\sin\alpha}{\cos x\cos\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x\cos\alpha} = 0,$$
$$x = \alpha + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Нужно проверить, что при этом $\cos x \neq 0$. Но $\cos(\alpha + \pi k) = \pm\cos\alpha \neq 0$, так как определен $\operatorname{tg}\alpha$. ■

IV. Уравнение $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha$

Теорема 13.4. *Множество решений уравнения* $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha$ *есть множество*

$$\{\alpha + \pi k | k \in \mathbb{Z}\}.$$

Доказательство.

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}\alpha = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x\sin\alpha - \sin x\cos\alpha}{\sin x\sin\alpha} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin x\sin\alpha} = 0,$$
$$x = \alpha + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Нужно проверить, что при этом $\sin x \neq 0$. Но $\sin(\alpha + \pi k) = \pm\sin\alpha \neq 0$, так как определен $\operatorname{ctg}\alpha$. ■

Определение. Пусть $|a| \leq 1$. Арксинусом числа a называется число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Арктангенсом числа a называется число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

§14. Синусоида

Теорема 14.1. *Если* $a > 0$*, то*

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Доказательство.

$$a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right) = a(\sin x + \operatorname{tg}\alpha\cos x) =$$
$$\left(\text{где } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right)$$
$$= a\left(\sin x + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos x\right) = \frac{a}{\cos\alpha}(\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x) =$$
$$= \frac{a}{\cos\alpha}\sin(x+\alpha).$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}.$$

Так как $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos\alpha \geq 0$.

Так как $a > 0$, то

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \Rightarrow \frac{a}{\cos\alpha} = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

■

Пример 14.1.

1. $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$,
2. $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,
3. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$,
4. $3\sin x + 4\cos x = 5\sin\left(x + \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

Замечание 1. В случае $a < 0$ знак “минус” можно вынести за скобку и рассмотреть выражение $(-a)\sin\alpha + (-b)\cos\alpha$, в котором коэффициент при $\sin\alpha$ положителен.

Замечание 2. Если необходимо получить в результате не синус, а косинус какого-либо аргумента, то это легко можно сделать с помощью формул приседения: $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$.

Определение. Синусоидой называется множество точек плоскости, которое в некоторой системе координат является графиком функции $y = a\sin x$, где $a \neq 0$. Число $|a|$ называется амплитудой.

На рис. 41 приведена синусоида.

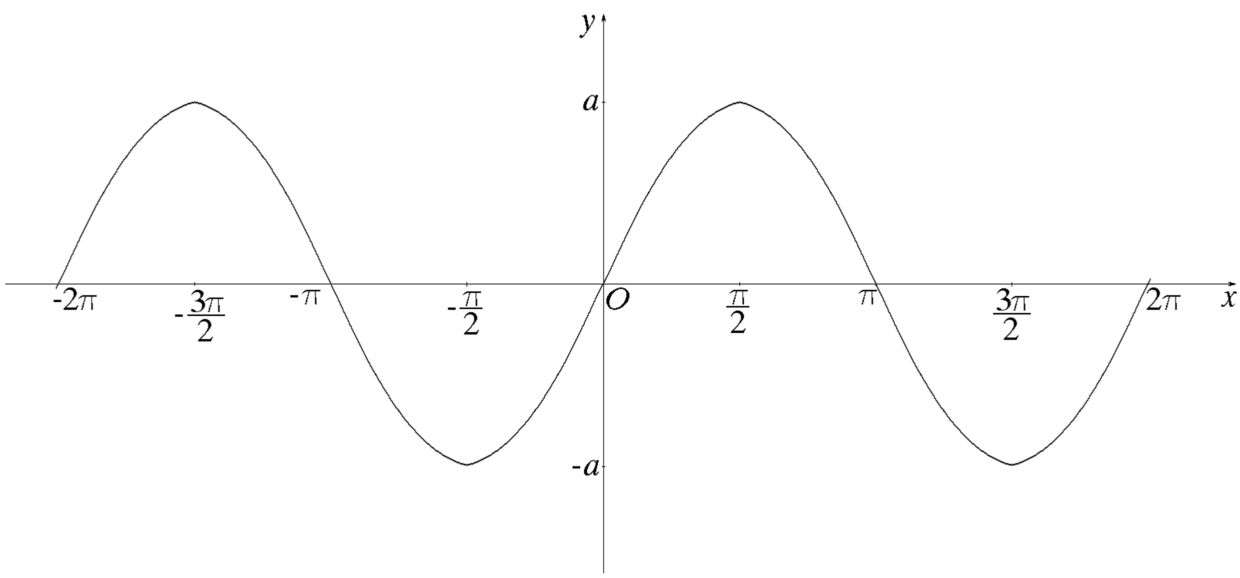

Рис. 41

1) Так как $a\sin(-x) = -a\sin x$, то синусоида симметрична относительно начала координат.

2) Так как $a\sin(x + 2\pi) = a\sin x$, то достаточно построить график на отрезке длины 2π, например, на отрезке от $-\pi$ до π, а в силу симметрии достаточно взять отрезок $[0;\pi]$.

3) Так как $a\sin(\pi - x) = a\sin x$, то синусоида симметрична относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$. Поэтому достаточно построить синусоиду на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Теорема 14.2. *Если $a > 0$, то функция $f(x) = a\sin x$ строго возрастает на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right], x_1 > x_2$.

$$\begin{aligned}
&f(x_1) - f(x_2) = a(\sin x_1 - \sin x_2) = 2a\cos\tfrac{x_1+x_2}{2}\sin\tfrac{x_1-x_2}{2},\\
&\tfrac{x_1+x_2}{2} \in \left(0;\tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\tfrac{x_1+x_2}{2} > 0,\\
&\tfrac{x_1-x_2}{2} \in \left(0;\tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\tfrac{x_1-x_2}{2} > 0,\\
&\Rightarrow f(x_1) > f(x_2).
\end{aligned}$$

■

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a

График функции $y = \sin x$ (рис. 42)

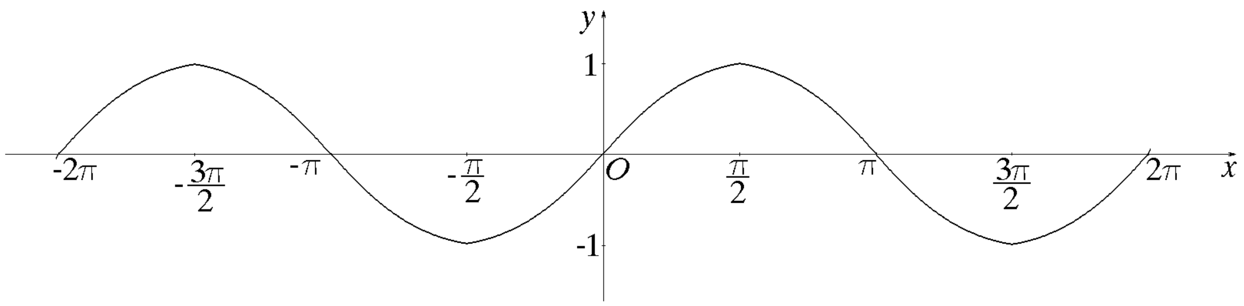

Рис. 42

График функции $y = \cos x$ (рис. 43)

$$y = \cos x,$$
$$\cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right).$$

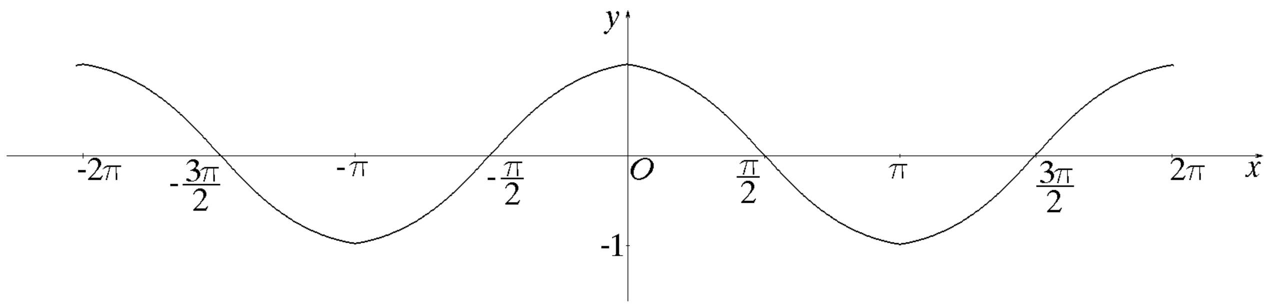

Рис. 43

Теорема 14.3. *График любой функции вида*

$$f(x) = a\sin(\omega x + \varphi) + b\cos(\omega x + \varphi),$$

где $a, b, \omega, \varphi \in \mathbb{R}, \omega \neq 0$ *и из чисел* a, b *хотя бы одно не равно нулю, является синусоидой.*

Определение. Такая функция называется гармоническим колебанием, число ω называется частотой этого колебания, φ — начальной фазой; амплитуда этого колебания равна $\sqrt{a^2+b^2}$. Период этого колебания равен $\frac{2\pi}{\omega}$.

Доказательство. Пусть $a > 0$.

$$f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x + \alpha), \text{ где } \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

Из синусоиды $y = \omega\sqrt{a^2+b^2}\sin x$ получим переносом оси ординат график функции $y = \omega\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)$, а затем увеличим масштаб в ω раз. Получим график функции f. ■

§15. Исследование тригонометрических функций

I. $f(x) = \sin x$

1) Область определения — $\mathbb{R}$.

2) Множество значений — $[-1; 1]$.

Доказательство. Множество значений функции f есть множество ординат точек числовой окружности. ■

3) Функция строго возрастает на любом промежутке вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, строго убывает на любом отрезке вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — две точки такого промежутка, $x_1 > x_2$.

$$\begin{aligned}
&\sin x_1 - \sin x_2 = 2\sin\tfrac{x_1-x_2}{2}\cos\tfrac{x_1+x_2}{2}\\
&\tfrac{x_1-x_2}{2} \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\tfrac{x_1-x_2}{2} > 0,\\
&\tfrac{x_1+x_2}{2} \in \left(-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \tfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Rightarrow \cos\tfrac{x_1+x_2}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\sin x_1 > \sin x_2$. ■

4) График — синусоида.
5) 2π — главный период.
6) Корни $\{\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$.

II. $f(x) = \cos x$

1) Область определения — $\mathbb{R}$.
2) Множество значений — $[-1; 1]$.

Доказательство. Множество значений функции f есть множество абсцисс точек числовой окружности. ■

3) Функция строго убывает на любом промежутке вида $[2\pi k, ; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, строго возрастает на любом отрезке вида $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — две точки такого промежутка, $x_1 > x_2$.

$$\begin{aligned}
&\cos x_1 - \cos x_2 = -2\sin\tfrac{x_1-x_2}{2}\sin\tfrac{x_1+x_2}{2},\\
&\tfrac{x_1-x_2}{2} \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin\tfrac{x_1-x_2}{2} > 0,\\
&\tfrac{x_1+x_2}{2} \in (2\pi k; \pi + 2\pi k) \Rightarrow \sin\tfrac{x_1+x_2}{2} > 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\cos x_1 < \cos x_2$. ■

4) График — синусоида.
5) 2π — главный период.
6) Корни $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

III. $f(x) = \operatorname{tg} x$

1) Область определения — $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2) Множество значений — $\mathbb{R}$.

Лемма 15.1.

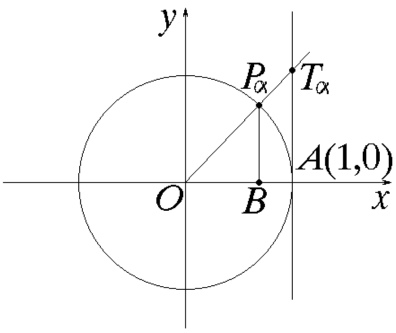

Рис. 44

Если точка P_α не лежит на оси ординат, то точка пересечения прямой OP_α с прямой $x = 1$ имеет координаты $(1; \operatorname{tg}\alpha)$.

Доказательство. Воспользуемся рисунком (см. рис. 44). Опустим из точки P_α перпендикуляр на ось Ox. Пусть он пересечет ось Ox в точке B. Треугольники $OP_\alpha B$ и $OT_\alpha A$ подобны. Координаты точки P_α — $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, точки T_α — $(1; y)$. Отсюда ■

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha} \text{ и } y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Определение. Прямая $x = 1$ называется *линией тангенсов.*

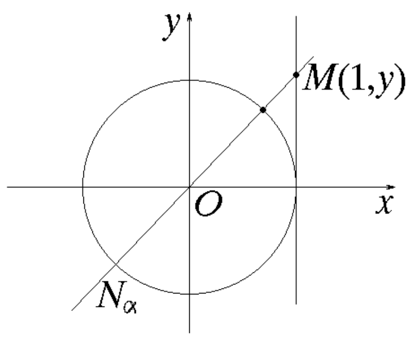

Рис. 45

Воспользуемся рисунком (рис. 45). Пусть $y \in \mathbb{R}$. Докажем, что y является значением тангенса. Для этого найдем на линии тангенсов точку M с ординатой y и обозначим через N какую-либо точку пересечения прямой OM с числовой окружностью. Пусть $N = P_\alpha$. Тогда $y = \operatorname{tg}\alpha$.

3) Функция строго возрастает на любом промежутке вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть x_1, x_2 — две точки такого промежутка, $x_1 > x_2$.

$$\operatorname{tg}x_1 - \operatorname{tg}x_2 = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x_2}{\cos x_2} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\cos x_1 \cos x_2},$$
$$x_1 - x_2 \in (0;\pi) \Rightarrow \sin(x_1 - x_2) > 0.$$

Если k четно, то $\cos x_1 > 0, \cos x_2 > 0$.

Если k нечетно, то $\cos x_1 < 0, \cos x_2 < 0$.

Следовательно, $\cos x_1 \cos x_2 > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}x_1 > \operatorname{tg}x_2$. ■

4) График — тангенсоида.

5) π — главный период.

6) Корни тангенса совпадают с корнями синуса.

На рис. 46 приведен график функции $y = \operatorname{tg}x$.

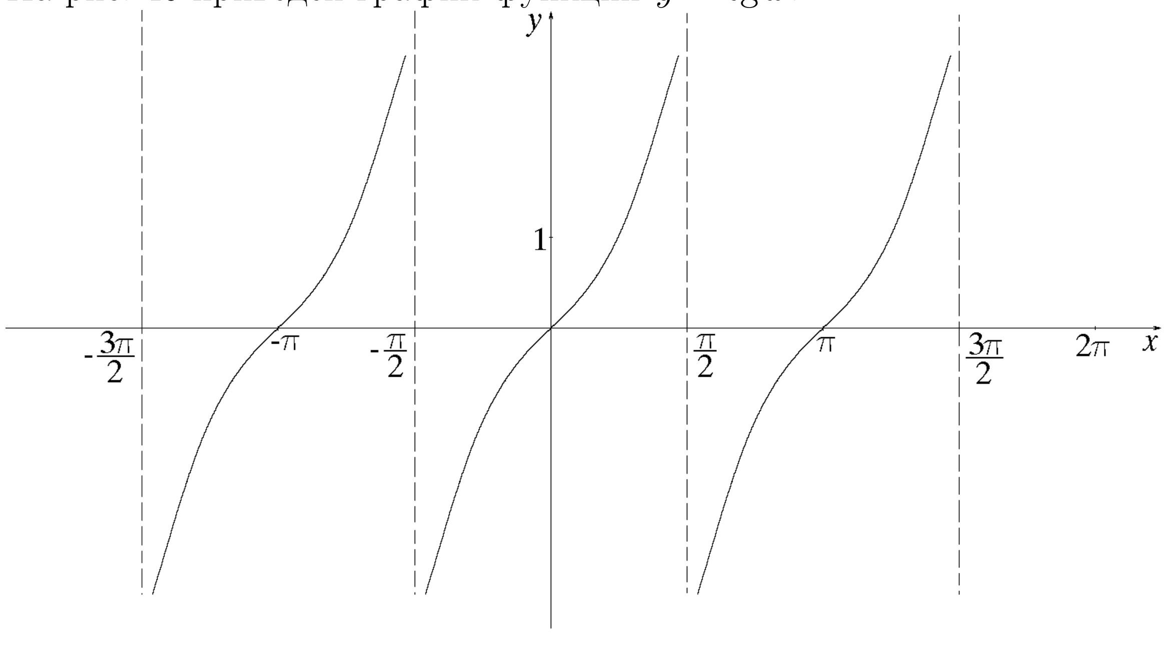

Рис. 46

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

На рис. 47 приведен график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

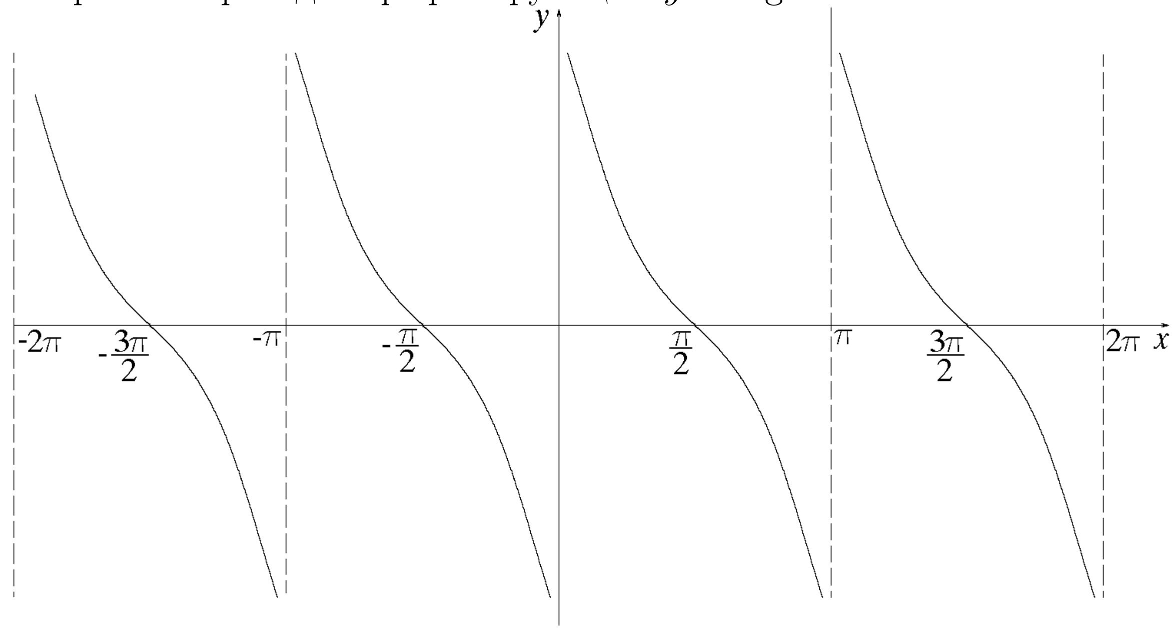

Рис. 47

§16. Понятие обратной функции

Определение. Функция f называется обратимой, если для любых двух различных чисел x_1 и x_2, принадлежащих D_f, числа $f(x_1)$ и $f(x_2)$ также различны.

Пример 16.1. $y = 3x + 1$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow 3x_1 + 1 \neq 3x_2 + 1.$$

Пример 16.2. $y = x^2,\ x \in [0; +\infty)$.

Пример 16.3. $y = \sin x,\ x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Пример 16.4. $y = \cos x,\ x \in [0, \pi]$.

Пример 16.5. $y = \operatorname{tg} x,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Пример 16.6. $y = \operatorname{ctg} x,\ x \in (0, \pi)$.

Обратимость всех этих функций — частный случай теоремы 16.1

Теорема 16.1. *Строго монотонная функция обратима.*

Функция является обратимой в том и только в том случае, если любая прямая, перпендикулярная оси ординат, имеет с ее графиком не более одной общей точки.

Определение. Пусть функция f обратима, D_f — ее область определения, E_f — множество ее значений. Для каждого числа $p \in E_f$ обозначим через $\varphi(p)$ такое число q из множества D_f, что $f(q) = p$ (такое число существует и притом только одно). Мы получили новую функцию с областью определения E_f и множеством значений D_f. Эта функция называется обратной функции f.

Пример 16.7. $f(x) = 5x - 2$.

Выяснить, обратима ли эта функция, и если обратима, то найти обратную.

$$\begin{aligned}
&f(q) = p,\\
&5q - 2 = p,\\
&q = (p + 2)/5,\\
&\varphi(x) = (x + 2)/5.
\end{aligned}$$

Функция f обратима, φ — обратная функция.

Теорема 16.2. *Графики взаимно обратных функций в одной и той же координатной плоскости симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четверти.*

Доказательство. Пусть функция f с областью определения D и множеством значений E имеет обратную функцию φ. Пусть Γ_f, Γ_φ — графики функций f и φ соответственно. Точка $M(a, b)$ принадлежит $\Gamma_f \Leftrightarrow b = f(a)$ $\Leftrightarrow a = \varphi(b) \Leftrightarrow$ точка $M'(b, a) \in \Gamma_\varphi$. Осталось доказать, что точки M и M' симметричны относительно биссектрисы первой и третьей четверти. Эта биссектриса состоит из точек $C(t, t)$, где t — любое вещественное число. Чтобы доказать, что точки M и M' симметричны относительно биссектрисы, достаточно проверить, что биссектриса является серединным перпендикуляром отрезка MM', то есть что любая точка $C(t, t)$ равноудалена от точек M и M'.

$$\begin{aligned}
&CM = \sqrt{(t-a)^2 + (t-b)^2},\\
&CM' = \sqrt{(t-b)^2 + (t-a)^2},\\
&CM = CM'.
\end{aligned}$$

■

§17. Обратные тригонометрические функции

I. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$, где $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ (см. рис. 48).

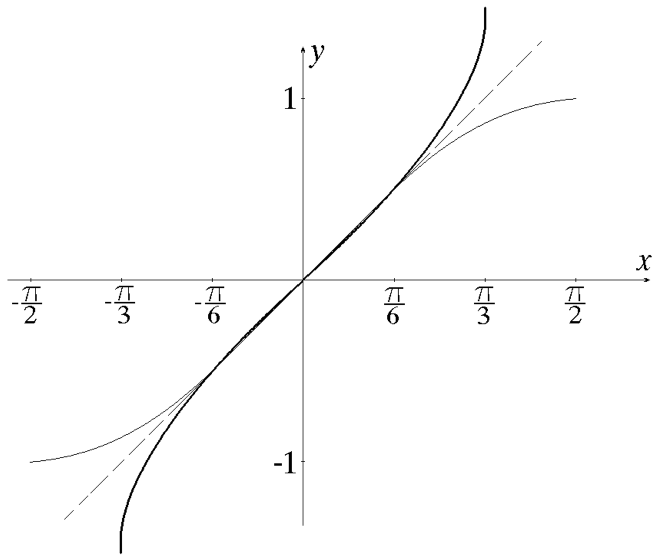

Рис. 48

Множество значений этой функции — $[-1, 1]$.

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \arcsin x$, где $x \in [-1, 1]$. Эта функция — функция, обратная функции f.

II. Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$, где $x \in [0, \pi]$ (см. рис. 49).

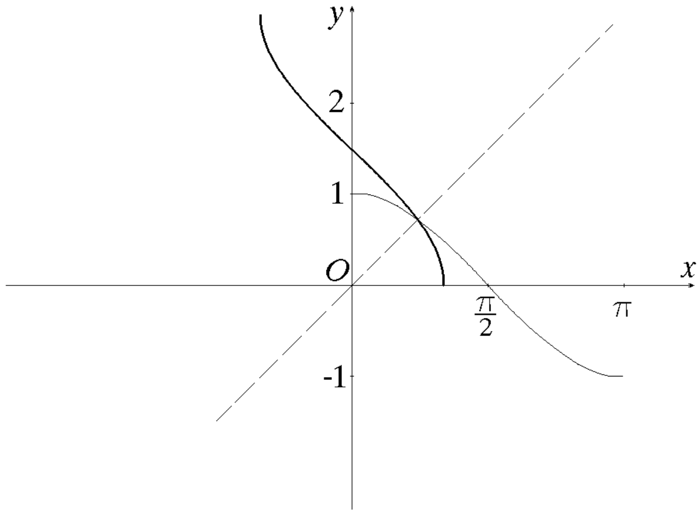

Рис. 49

Функция $\varphi(x) = \arccos x$ — обратная функция.

III. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$, где $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ (см. рис. 50).

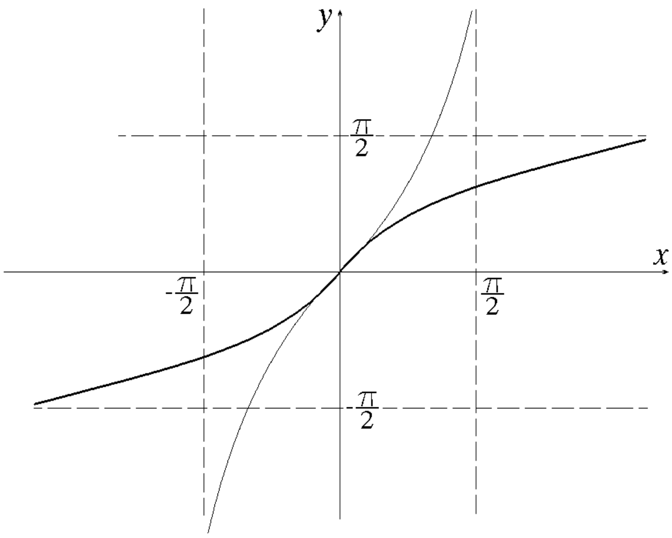

Рис. 50

Функция $\varphi(x) = \operatorname{arctg} x$ — обратная функция.

IV. Рассмотрим функцию $f(x) = \operatorname{ctg} x$, где $x \in (0, \pi)$ (см. рис. 51).

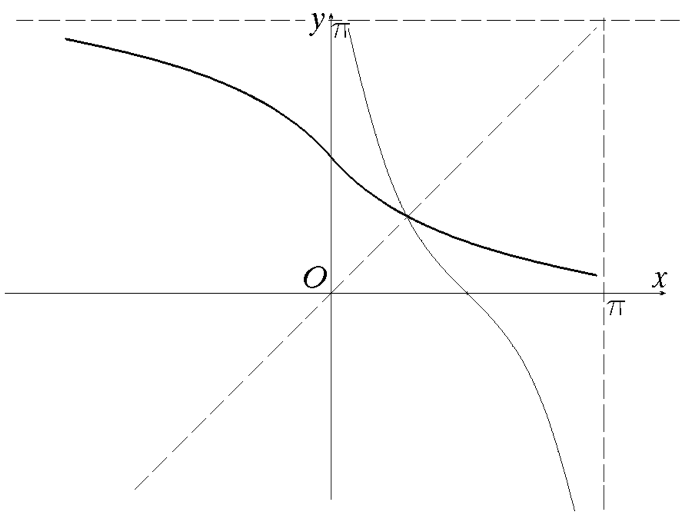

Рис. 51

Функция $\varphi(x) = \operatorname{arcctg} x$ — обратная функция.

Функции arcsin и arctg строго возрастают, arccos и arcctg строго убывают. Функции arcsin и arctg нечетные. Это следует из общего утверждения:

Утверждение. Функция, обратная нечетной функции, является нечетной функцией.

Доказательство. Пусть f — нечетная функция, φ — обратная к ней. Пусть $f(a) = b$. Тогда $f(-a) = -b$. Следовательно, $\varphi(b) = = a, \varphi(-b) = -a$. Отсюда $\varphi(-b) = -\varphi(b)$. И это верно для любого числа b из области определения φ $(\forall b \in E_f, \forall b \in D_\varphi)$. ■

Теорема 17.1. *Для любого* $a \in [-1, 1]$

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\sin(\arcsin a) = a,\\
&\sin(\pi/2 - \arccos a) = \cos(\arccos a) = a,\\
&\arcsin a \in [-\pi/2, \pi/2], \;\; \arccos a \in [0, \pi],\\
&\pi/2 - \arccos a \in [-\pi/2, \pi/2].
\end{aligned}$$

Так как на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ синус строго монотонен, то из равенства синусов двух чисел этого отрезка вытекает равенство этих чисел.

$$\begin{aligned}
&\arcsin a = \pi/2 - \arccos a,\\
&\arcsin a + \arccos a = \pi/2.
\end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично. ∎

Теорема 17.2. $\forall a \in [-1, 1]$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{arcctg}(-a) \overset{\text{Т.17.1}}{=} \pi/2 - \operatorname{arctg}(-a) = \pi/2 + \operatorname{arctg} a =\\
&= \pi - (\pi/2 - \operatorname{arctg} a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.
\end{aligned}$$

Первое равенство доказывается аналогично. ∎

§18. Задачи для самостоятельного решения

1. Верно ли следующее:

а) $5 \in \left\{x | \frac{2x^3+7x^{47}}{1-x} = 145\right\}$;

б) $3 \in \left\{\frac{5n^2-5n}{6} | n \in \mathbb{N}\right\}$;

в) $2 \in \left\{n^2 + n | n \in \mathbb{Z}\right\}$;

г) каждый элемент множества $\{1; -1; 2\}$ принадлежит множеству $\{x | x^3 + x^2 - x - 1 = 0\}$;

д) каждый элемент множества $\{x | 2x-3 = 2x^3-5x^2+x+3\}$ принадлежит множеству

$$\left\{x | \frac{2x-3}{2x^3-5x^2+x+3} = 1\right\}?$$

2. Найдите объединение, пересечение и разность множеств

а) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}, \ B = \{3; 7; 1; 9\}$;

б) $A = \{n \in \mathbb{N} | n \vdots 2\}, \ B = \{n \in \mathbb{N} | n \vdots 18\}$.

в) Докажите утверждение

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

г) $A = \{3n - 1 | n \in \mathbb{N}\}, \ B = \{5n + 2 | n \in \mathbb{N}\} \ C = \{2n + 1 | n \in \mathbb{N}\}$. Найдите 1) $A \cap B$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $(A \cap B) \cup C$.

3. Докажите, что множество рациональных чисел счетно.

4. Докажите, что множества $(-2, 1)$ и $(2, +\infty)$ равномощны.

5. Установите взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $(0, 1)$ и $[0, 1]$.

6. Докажите, что нет рационального числа, квадрат которого равен 3; 5; куб которого равен 3; 6.

7. Докажите, что если a — целое число, не являющееся квадратом целого числа, то оно не является квадратом никакого рационального числа.

8. Представьте рациональное число $\dfrac{19}{13}$ в виде периодической десятичной дроби.

9. Найдите рациональное число, десятичная запись которого имеет вид $0.345(876)$.

Докажите неравенства:

10. $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0, a_1 a_2 \ldots a_n = 1$

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

11. $a, b, c \geq 0 \Rightarrow ab + ac + bc \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$.

12. $a, b, c \geq 0 \Rightarrow a^{16} + b^{16} + c^{16} \geq a^5 b^5 c^5 (a + b + c)$.

13. $a^4 + b^4 + 2c^4 \geq 4abc^2$.

13*. $x, y, z \geq 0, x + y + z = 1 \Rightarrow$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

14. $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \ (a, b > 0)$.

15. $\sqrt[n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[n]{2-\sqrt{3}} > 2$.

14. Докажите, что если для уравнения $x^2 + px + q = 0$ дискриминант $\mathcal{D}$ неотрицателен, то это же верно и для уравнения

$$x^2 + (p^2 + pq)x + p^3q + p^2q + q^3 - 2pq^2 = 0.$$

15. Пусть $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$. Докажите, что по крайней мере одно из уравнений

$$x^2 + p_1x + q_1 = 0, \qquad x^2 + p_2x + q_2 = 0$$

имеет неотрицательный дискриминант.

16. Докажите, что

а) при любом значении $\lambda \neq -1$ дискриминант $\mathcal{D}$ уравнения

$$(x - a)(x - c) + \lambda(x - b)(x - d) = 0,$$

где $a < b < c < d$, положителен.

б) при любых значениях a, b, c, d дискриминант уравнения

$$(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c) = 0$$

неотрицателен.

Решите уравнения:

16. $|x + 8| + |x - 8| = 16$.

17. $|x^2 - 3x| + x = 2$.

18. $\frac{x+1}{|x-1|} - 5\frac{|x-1|}{x+1} + 4 = 0$.

19. $||x + 2| + x| = 1$.

Решите неравенства:

20. $|x| + |x + 3| < 5$.

21. $1 + x + |x^2 - x - 3| < 0$.

22. $\left|\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$.

23. $\left|\dfrac{x + 3}{x - 27}\right| < 1$.

Изобразите на плоскости множество точек (x, y), заданное указанным соотношением:

24. $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{y}{|y|}$.

25. $\left|\dfrac{x}{y}\right| \leq 1$.

26. $|y+1| \leq 2$.
27. $|x+1|+|y+1| \leq 3$.
28. $|x-y|+|x-1| \geq 1$.
Постройте графики функций:
29. $f(x)=\{3x+6\}-1$.
30. $f(x)=\left|\dfrac{|x|-3}{|x|-2}\right|$.
31. $f(x)=\frac{-3x+6}{2x-4}$.
32. $f(x)=\left|\frac{|x|-1}{|x|-3}\right|$.
33. Докажите тождество

$$\cos 4\alpha-1=8\left(\cos^4\alpha-\cos^2\alpha\right).$$

34. Найдите множество значений функции

$$f(x)=\cos^2 x+\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).$$

35. Постройте график функции

$$y=\frac{\sin x}{2(1+\cos x)}.$$

36. Дано:

$$\cos\alpha=-\frac{5}{13},\quad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

Найдите $\sin 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha$.
37. Найдите множество значений функции

$$f(x)=\sin x-\cos^2 x-1.$$

38. Постройте график функции

$$y=\sin x\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right).$$

39. Решите уравнение

$$4\sin x=4+\cos^2 x.$$

40. Вычислите

$$\sin^2\left(\arccos\frac{4}{5}\right).$$

41. Пусть даны функции

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{при} \quad |x|\leq 1\\ 0 & \text{при} \quad |x|>1;\end{cases}$$

$$\varphi(x)=x-1;\quad \psi(x)=x+1.$$

Постройте график функции

$$y = \frac{1}{2}[f(\varphi(x)) + f(\psi(x))].$$

42. Исследуйте на четность и нечетность функцию

$$f(x) = |x-2| + 3|x| + \sqrt{x^2+4x+4}.$$

43. Постройте график функции

$$y = \frac{2|x-1|-3}{3|x-1|-2}.$$

44. Докажите, что функция $g(x) = x^2 - 6x + 10$ необратима. Найдите функцию, обратную $g(x)$ на промежутке $[3; +\infty)$ и постройте ее график.

45. Найдите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют соотношению

$$|y - x^2| = |y - x|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М., Ионин Ю.И.* Алгебра и начала анализа. Задачи и решения. Высшая школа, 2004.
2. *Карп А.П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа. М: Просвещение — АО "Учебная литература", 1995.
3. *Туманов С.И.* Элементарная алгебра. М: Просвещение, 1962.
4. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1968.
5. *Материалы методичек ФЗФТШ и ВЗМШ различных лет.*

ОГЛАВЛЕНИЕ