Дисклеймер.

Автор не несет ответственности за любой ущерб, причиненный Вам при использовании данного документа. Автор напоминает, что данный документ может содержать ошибки и опечатки, недостоверную и/или непроверенную информацию. Если Вы желаете помочь в развитии проекта или сообщить об ошибке/опечатке/неточности:

GitHub проекта

Автор в ВК

Содержание

1 Метрическое пространство. Основные определения

Определение 1.1. Пространство X называется метрическим если $\forall x, y \in X$ существует вещественное $\rho(x, y)$ удовлетворяющее условиям:
1) $\rho(x, y) \geq 0$;
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$.
Тогда величина ρ называется метрикой.

Определение 1.2. $V_\varepsilon(x) = \{y \in X | \rho(x, y) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность.

Определение 1.3. $x \in X$ — внутренняя точка X, если $\exists \varepsilon > 0 : \ V_\varepsilon(x) \in X$.

Определение 1.4. Множество X открыто, если все его точки внутренние.

Определение 1.5. x — предельная точка X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in X (y \neq x) : \ y \in V_\varepsilon(x)$.

Определение 1.6. Замыкание множества — процедура присоединения к нему всех его предельных точек

Определение 1.7. X замкнуто, если содержит все свои предельные точки

Определение 1.8. $x \in X$ — изолированная точка X, если $\exists \varepsilon > 0 : \nexists y \in X (x \neq y) : \ y \in V_\varepsilon(x)$.

Определение 1.9. $x \in X$ — граничная точка X, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y_1 \in X, \ \exists y_2 \notin X : y_1, y_2 \in V_\varepsilon(x)$.

2 Пространство $\mathbb{R}^n$. Введение метрики. Сферические и параллелепипедальные окрестности

Определение 2.1. Пространство $\mathbb{R}^n$ — множество упорядоченных наборов из n вещественных чисел. (Пространство n-мерных векторов).

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ метрику:
1) Сферическая (евклидова) метрика:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Докажем, что это метрика:
1) Неотрицательность очевидна
2) Симметричность:

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (|x_i - y_i|)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = \rho(y, x)$$

3) Неравенство треугольника:

Доказательство. $\forall a_i, b_i,\ i = 1, ..., n.\ \forall t\ \sum_{i=1}^{n}(a_i t + b_i)^2 \geq 0$. Раскроем скобки:

$$\underbrace{t^2 \sum a_i^2}_{A} + \underbrace{2t \sum a_i b_i}_{B} + \underbrace{\sum b_i^2}_{C} \geq 0$$

Чтобы это неравенство выполнялось, должно выполняться $B^2 - AC \leq 0$. Отсюда $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$. Извлечем корень: $|\sum a_i b_i| \leq \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$. Умножим на 2 и прибавим $\sum a_i^2 + \sum b_i^2$: $\sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sum a_i b_i \leq \sum a_i^2 + \sum b_i^2 + 2\sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$. Вынесем полные квадраты: $\sum(a_i + b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)^2$. Извлекаем корень, получаем $\sqrt{\sum(a_i + b_i)^2} \leq \left(\sqrt{\sum a_i^2} + \sqrt{\sum b_i^2}\right)$ (*).

Замена: $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$, $i = \overline{1, n}$, где $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Отсюда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_1)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2}$$

□

Пример 2.1. $V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n :\ \rho(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}^n :\ \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 < \varepsilon^2\}$ — эпсилон-окрестность, шар.

2) Параллелепипедальная метрика:
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n\ \rho(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i - y_i|$.
Аксиомы очевидны.

3 Предел последовательности в $\mathbb{R}^n$. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Определение 3.1. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ — последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.2. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$. Точка a называется пределом последовательности $\{x^{(k)}\}$ при $k \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0,\ \forall k > N \Rightarrow \rho(x^{(k)}, a) < \varepsilon$. Запись: $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$.

Теорема 3.1. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$. *Тогда* $a = \lim_{k\to\infty} x^{(k)} \Leftrightarrow a_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}$, *где* $i = \overline{1, n}$.

Доказательство. $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Leftrightarrow \rho(x^{(k)}, a) \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow \max_{i=\overline{1,n}} \left|x_i^{(k)} - a_i\right| \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i$ (по лемме из прошлого параграфа). □

Теорема 3.2. *(Коши)*
$\exists$ *конечный* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N > 0\ \forall k \geq N\ \forall p > 0 \Rightarrow \rho(x^{(k+p)}, x^{(k)}) < \varepsilon$.

Определение 3.3. $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$, если $\exists M > 0 :\ \rho(x^{(k)}, \phi) \leq M\ \forall k = 1, 2, ...$, где ϕ обычно является началом координат.

Теорема 3.3. *(Больцано-Вейерштрасса для многомерного случая) Если последовательность ограничена, то из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{x^{(k)}\}$ ограничена в $\mathbb{R}^n$. Распишем: $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ ... \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$. Если ограничены вектора, то следует, что последовательность первых координат $\{x_1^{(k)}\}$ ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса для одномерного случая из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $\exists\{x_1^{(m_k)}\}$. Теперь возьмем эту последовательность для всех векторов (рассматриваем многомерную подпоследовательность): $x^{(m_k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(m_k)} \\ ... \\ x_n^{(m_k)} \end{pmatrix}$. Рассмотрим последовательность вторых координат $\{x_2^{(m_k)}\}$. Она ограничена, а значит, существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_2^{(p_{m_k})}\}$. Теперь рассматриваем $x^{(p_{m_k})} = \begin{pmatrix} x_1^{(p_{m_k})} \\ ... \\ x_n^{(p_{m_k})} \end{pmatrix}$. Полученная последовательность векторов сходится по первым двум координатам. По индукции распространяем правило на оставшиеся координаты. □

4 Функции от нескольких переменных. Предел функции по Гейне и по Коши. Повторные пределы. Свойства пределов

Определение 4.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ и $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \in E$ $\exists$ некоторое вещественное число, которое будем обозначать $f(x)$ или $f(x_1, ..., x_n)$. Тогда f — функция от нескольких переменных на E, где E — область определения функции.

Определение 4.2. Диаметр области $\operatorname{diam} E = \sup_{x^{(1)}, x^{(2)} \in E} \rho(x^{(1)}, x^{(2)})$. Если $\operatorname{diam} E$ конечен, то область E ограничена.

Определение 4.3. Область E — связная, если $\forall x, y \in E$ $\exists$ непрерывная кривая l, такая, что x — начало l, а y — конец.

Определение 4.4. (предел функции по Гейне)

Пусть $f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$, a — предельная точка E. Если $\forall\{x^{(k)}\} \in E$ верно, что $\rho(x^{(k)}, a) \to_{k\to\infty} 0 \Rightarrow |f(x^{(k)}) - g| \to_{k\to\infty} 0$, то $g = \lim_{x\to a} f(x)$.

Определение 4.5. (предел по Коши)

$f(x)$ определена на $E \subset \mathbb{R}^n$. g — предел $f(x)$ при $x \to a$, если $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\ \forall x \in E :\ \rho(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon$.

Замечание 4.1. Определения предела по Коши и Гейне эквивалентны.

Определение 4.6. $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$. Зафиксируем все координаты кроме x_1. Предположим $\exists \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, ..., x_n) = f^{(1)}(x_2, ..., x_n)$. Проведем эту операцию для оставшихся координат. В результате приходим к повторному пределу:

$$\lim_{x_n \to a_n} ... \lim_{x_1 \to a_1} f(x_1, ..., x_n)$$

Замечание 4.2. Взяв аргументы в другом порядке получим иной повтор предел. Если существует повторный предел и предел по Гейне, то они равны.

Теорема 4.1. *(Критерий сходимости Коши)*

Чтобы $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$, *такое, что* $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$ *выполнялось* $x^{(1)}, x^{(2)} \in V_\delta(a) \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$.

5 Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций

Определение 5.1. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n,\ a \in E$. $f(x)$ непрерывна в точке a, если $\exists \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Теорема 5.1. *f, g — непрерывна в a. Тогда непрерывны их сумма, произведение, отношение.*

Доказательство. () ☐

6 Первая и вторая теоремы Больцано-Коши о непрерывных функциях

Теорема 6.1. *(Больцано-Коши о нуле функции)*

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$ и E связно. И пусть $\exists a, b \in E$, такие, что $f(a)f(b) < 0$. Тогда $\exists c \in E$, такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство. E — связно, следовательно, $\exists$ непрерывная кривая L, такая, что:

1) L соединяет точки a, b;

2) $L : \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ ... \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$

$t \in [\alpha, \beta],\ x_1(t), ..., x_n(t)$ определены на $[\alpha, \beta]$, при этом $x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b$.

Введем функцию $F(t) = f(x_1(t), ..., x_n(t))$. По теореме о непрерывности суперпозиции $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$, причем $F(\alpha) = f(a),\ F(\beta) = f(b)$. По одномерной теореме Коши-Больцано $\exists j \in [\alpha, \beta] :\ F(j) = 0;\ c = \lambda(j) \subset E\ f(c) = F(j) = 0$. ☐

Теорема 6.2. *(Коши-Больцано о промежуточном значении)*

Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$, E связно. $\exists a, b \in E$, такие, что $f(a) = A,\ f(b) = B$ и $A < B$. Тогда $\forall C :\ A < C < B :\ \exists c \in E :\ f(c) = C$.

Доказательство. Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. φ непрерывна, так как непрерывна f. Тогда $\varphi(a) = f(a) - C < 0$, и $\varphi(b) = f(b) - C > 0$. Сведено к предыдущей теореме. Тогда $\exists c \in E :\ \varphi(c) = 0$. $\varphi(c) = f(c) - C$, теорема доказана. ☐

7 Теорема Вейерштрасса о непрерывных функциях

Теорема 7.1. *(Вейерштрасса)*

Пусть $f(x)$ непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$ и E замкнута и ограничена. Тогда $f(x)$ ограничена на E и достигает там своего максимума и минимума.

Доказательство.

Покажем, что функция является ограниченной:

От противного. Пусть это не так: $f(x)$ не ограничена на E.

Возьмем последовательность $\{x^{(k)}\} \in E$. E ограничена $\Rightarrow$ $\{x^{(k)}\}$ — ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\} \Rightarrow \exists x^* : \ x^{(m_k)} \to x^*$. Тогда из определения непрерывности по Гейне следует, что $f(x^{(m_k)}) \to_{k\to\infty} f(x^*)$. Но из предположения следует, что $f(x^{(m_k)})$ уходит на бесконечность. Противоречие.

Покажем, что $f(x)$ достигает максимума:

Обозначим $M = \sup_E f(x)$. Функция ограничена, значит, супремум конечен.

От противного. Пусть $f(x)$ не достигает максимума, то есть $f(x) < M$, $\forall x \in E$. Рассмотрим $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$. Знаменатель не обращается в ноль, значит, она непрерывна на E. Значит $g(x)$ ограничена на E. $g(x) \le L \Leftrightarrow \frac{1}{M-f(x)} \le L \ \forall x \in E \Rightarrow f(x) \le M - \frac{1}{L}$. Получаем противоречие с определением супремума. □

8 Равномерная непрерывность. Теорема Кантора

Определение 8.1. $f(x)$ равномерно непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, такая, что $\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E$, таких, что $\rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$.

Теорема 8.1. *(Кантора)*

$f(x)$ непрерывна на $E \subset \mathbb{R}^n$. E замкнуто и ограничено. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна.

Доказательство. От противного. Положим, функция непрерывна, но не равномерно непрерывна на замкнутом и ограниченном E. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \ \forall \delta > 0 : \exists x^{(1)}, x^{(2)} \in E : \ \rho(x^{(1)}, x^{(2)}) < \delta \Rightarrow |f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| \ge \varepsilon$. Возьмем $\delta_k = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, ... \Rightarrow \exists x^{(1k)}, x^{(2k)} \in E : \ \rho(x^{(1k)}, x^{(2k)}) < \frac{1}{k}$, $|f(x^{(1k)}) - f(x^{(2k)})| \ge \varepsilon$. $\{x^{(1k)}\} \in E$ — ограничена, следовательно, по теореме Больцано-Вейерштрасса $\exists$ сходящаяся подпоследовательность $\{x^{(1m_k)}\} \to_{k\to\infty} x^*$. E замкнуто, следовательно, $x^* \in E$.

Рассмотрим те же номера для второй последовательности: $\{x^{(2m_k)}\}$.

$$0 \le \rho(x^{(2m_k)}, x^*) \le \underbrace{\rho(x^{(2m_k)}, x^{(1m_k)})}_{<\frac{1}{m_k}\to 0} + \underbrace{\rho(x^{(1m_k)}, x^*)}_{\to 0} \to 0.$$

$f(x)$ непрерывна в точке x^*, тогда, по Гейне, $f(x^{(1m_k)}) \to f(x^*)$ и $f(x^{(2m_k)}) \to f(x^*)$. Следовательно, $|f(x^{(1m_k)}) - f(x^{(2mk)})| \to 0$. Противоречие с предположением. □

9 Частные производные

$E \subset \mathbb{R}^3$. $f(x, y, z)$ определена на E. Любая точка $M = (x, y, z) \in E$.

Будем считать y, z фиксированными, а x зададим приращение Δx.

Определение 9.1. $\Delta_x f = f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)$ — частичное приращение f по x.

Определение 9.2. Если существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}$$

то он называется частной производной. Аналогично вводятся определения частных производных по другим координатам.

При вычислении частной производной все остальные координаты фиксируются, нахождение частных производных сводится к одномерному дифференцированию.

10 Полное приращение функции в точке. Дифференцируемость функции. Необходимое условие дифференцируемости

Определение 10.1. Зададим приращение сразу всем трем переменным.

$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$. Эта величина называется полным приращением функции точки M.

Определение 10.2. $f(x, y, z)$ называется дифференцируемой в точке $M = (x, y, z)$, если ее полное приращение может быть представлено в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$, где A, B, C — константы, а $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Теорема 10.1. *(необходимое условие дифференцируемости)*

Для того, чтобы $f(x, y, z)$ была дифференциреумой в точке, необходимо, чтобы в этой точке существовали ее частные производные.

Доказательство. $f(x, y, z)$ — дифференцируема, $\Rightarrow \exists \Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$. Пусть $\Delta x \neq 0,\ \Delta y = \Delta z = 0$. Тогда $\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$. При $x \to 0\ \exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = A$. Аналогично для остальных координат. ☐

Замечание 10.1. Если функция дифференцируема, то ее производная представима в виде $\Delta f = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z$.

11 Достаточное условие дифференцируемости функции

Теорема 11.1. *(достаточное условие дифференцируемости)*

Для того, чтобы функция была дифференцируема в точке, достаточно, чтобы существовали непрерывные частные производные $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$.

Доказательство. Пусть существуют непрерывные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$. Рассматриваем полное приращение функции в точке:

$$\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) =$$

$$[f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y+\Delta y, z+\Delta z)] +$$

$$+ [f(x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z+\Delta z)] + [f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)] =$$

$$= (\text{по одномерной теореме Лагранжа } \exists \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3 \in (0,1)) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Theta_2\Delta y, z+\Delta z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z+\Theta_3\Delta z)\Delta z =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \alpha\right)\Delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \beta\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) + \gamma\right)\Delta z$$

$$\text{где:} \begin{array}{l} \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \\ \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+\Theta_2\Delta y, z+\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \\ \gamma = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z+\Theta_3\Delta z) - \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \end{array} .$$

В силу непрерывности частных производных $\alpha, \beta, \gamma \to_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} 0$, откуда

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\Delta z + (\alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z)$$

Приращение представлено в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho)$, что по определению дает дифференцируемость функции. ☐

Факт 11.1. *Обоснование существования* $\Theta_{1,2,3}$*:*

Пусть выполняются условия теоремы Лагранжа и $x_0, x_0 + h \in [a,b]$. *Если* $\Theta \in (0,1)$, *то* $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0 + \Theta h)h$.

12 Дифференциал

Определение 12.1. Линейная часть полного приращения функции называется первым дифференциалом.

$$\Delta f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z}_{=df} + o(\rho)$$

Отсюда формула первого дифференциала

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Замечание 12.1. Аналогичное определение можно ввести для функции от n переменных: $f(x_1, ..., x_n)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

Определение 12.2. f называется дифференцируемой, если ее полное приращение представимо в виде

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i + o(\rho)$$

где $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2}$.

Свойства дифференциала:
1) $d(f+g) = df + dg$;
2) $d(fg) = gdf + fdg$;
3) $d(\frac{f}{g}) = \frac{gdf - fdg}{g^2}$;

13 Производная сложной функции

Пусть дана функция от 3 переменных, каждая из которых является функцией от 2 переменных:

$$f(x,y,z), \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

Введем функцию: $F(u,v) = f(\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$.
Пусть $\exists$ непрерывные частные производные f'_x, f'_y, f'_z и $\exists$ $\varphi'_u, \varphi'_v, \psi'_u, \psi'_v, \chi'_u, \chi'_v$.
Зададим приращение аргумента Δu, и зафиксируем v.
$\Delta x = \varphi(u+\Delta u, v) - \varphi(u,v)$
$\Delta y = \psi(u+\Delta u, v) - \psi(u,v)$
$\Delta z = \chi(u+\Delta u, v) - \chi(u,v)$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta_u F}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z + o(\rho)}{\Delta u} =$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \left(f'_x \frac{\Delta x}{\Delta u} + f'_y \frac{\Delta y}{\Delta u} + f'_z \frac{\Delta z}{\Delta u} + \underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\to 0} \cdot \frac{\rho}{\Delta u} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

(по определению частной производной $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta u} = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$)

Замечание 13.1. Если $z = z(x_1, ..., x_n)$ и

$$\begin{cases} x_1 = x_1(y_1, ..., y_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = x_n(y_1, ..., y_m) \end{cases}$$

то

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} + ... + \frac{\partial z}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

где $i = \overline{1,m}$.

14 Формула конечных приращений

Теорема 14.1. *(Лагранжа для многомерных)*

Обозначим $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ *— приращения.* $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$.

Пусть $\exists$ *непрерывные частные производные* f'_x, f'_y, f'_z *в окрестности* M_0. *Тогда найдется такое* $\Theta \in (0,1)$, *что*

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

— формула конечных приращений, где $\widetilde{M} = (x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y, z_0 + \Theta\Delta z)$.

Доказательство. $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z)$ — уравнение движения вдоль отрезка. Если $t \in [0,1]$, то

$$\Delta f \equiv f(M) - f(M_0) = F(1) - F(0) = (\exists\Theta \in (0,1)) =$$
$$= F'(\Theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\widetilde{M})\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\widetilde{M})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\widetilde{M})\Delta z$$

(по одномерной теореме Лагранжа) □

Замечание 14.1. $f(x_1, ..., x_n)$, $M_0 = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, $M = (x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)} + \Delta x_n^{(0)})$. $\exists$ непрерывные $f'_{x_1}, ..., f'_{x_n} \Rightarrow \exists\Theta \in (0,1)$, такая, что $\Delta f = f(M) - f(M_0) = \sum_{i=0}^{n} f'_{x_i}(\widetilde{M})\Delta x_i$, где $\widetilde{M} = (x_1^{(0)} + \Theta\Delta x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)} + \Theta\Delta x_n^{(0)})$.

15 Инвариантность формы первого дифференциала

$f(x,y,z)$ $\exists f'_x, f'_y, f'_z$.
Если:
а) x, y, z — независимые переменные, тогда $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (*)$
б) x, y, z зависят от u, v:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \text{ и } \exists \begin{matrix} x'_u, x'_v \\ y'_u, y'_v \\ z'_u, z'_v \end{matrix}.$$

Выпишем дифференциал функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (**)$$

Формулы $(*)$ и $(**)$ имеют одинаковый вид, то есть при вычислении первого дифференциала не важно, имеем мы дело с зависимыми или независимыми переменными. Это называется инвариантностью первого дифференциала.

16 Производные по направлению. Градиент функции.Геометрический смысл

Пусть $f(x,y,z)$, $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$. И пусть $\exists f'_x, f'_y, f'_z$ в окрестности M_0. Зададим направление в M_0 с помощью направляющих косинусов: $\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. l — луч, выходящий из M_0 в направлении $\vec{e}$. Запишем уравнение луча:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\alpha \\ y = y_0 + t\cos\beta \quad t \geq 0 \\ z = z_0 + t\cos\gamma \end{cases}$$

$M=(x,y,z)$, ρ — расстояние между M_0 и M. Тогда:

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=\pm t\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=t$$

Определение 16.1. Если существует

$$\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0}$$

то он называется производной f в направлении l в точке M_0.

Введем функцию $F(t)=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)$. (Функция вдоль луча — функция от одной переменной).

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0}=\lim_{\rho\to 0+}\frac{f(M)-f(M_0)}{\rho}=\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)-F(0)}{t}=F'_+(0)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}|_{M_0}\cdot\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}|_{M_0}\cdot\cos\gamma\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial l}|_{M_0}=(\vec\nabla f(M_0),\vec l)$$

Определение 16.2. Вектор вида $\vec\nabla f=\vec{\text{grad}}f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}\end{pmatrix}$ — градиент функции.

Проблема. Найти такое направление, вдоль которого поверхность возрастает наискорейшим образом.

$$\frac{\partial f}{\partial l}=(\vec\nabla f(M_0),\vec l)=\underbrace{\left|\vec\nabla f(M_0)\right|}_{\text{не зависит от l}}\cdot\underbrace{\left|\vec l\right|}_{1}\cos\Theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}\to\max\Leftrightarrow\Theta=0\Rightarrow\vec l\uparrow\uparrow\vec\nabla f(M_0)$$

Таким образом, градиент указывает направление наискорейшего возрастания функции.

17 Производные старшего порядка. Теорема о равенстве смешанных производных

Определение 17.1. Пусть задана $f(x_1,...,x_n)$, определена в $E\subset\mathbb{R}^n$ и $\exists\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в области E. Если существует $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, то она называется второй смешанной производной по $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=f''_{ij}$. Аналогично вводятся понятия производных старших порядков.

Теорема 17.1. *(о равенстве смешанных производных)*

Пусть $f(x,y)$ определена в $M_0=(x_0,y_0)$ и в окрестности этой точки существуют непрерывные f''_{xy} и f''_{yx}. В таком случае они равны.

Доказательство. Зададим некоторые приращения аргументов $h, k = \text{const} \neq 0$. Зададим функцию

$$W = \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)}{k}$$

Тогда

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h}$$

По теореме Лагранжа $\exists c_1 \in (x_0, x_0 + h)$, такое, что:

$$W = \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(c_1) = \frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k}$$

По теореме Лагранжа $\exists c_2 \in (y_0, y_0 + k)$:

$$W = \frac{f'_x(c_1, y_0 + k) - f'_x(c_1, y_0)}{k} = f''_{xy}(c_1, c_2)$$

То же самое в другом порядке:

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)}{h}$$

Откуда

$$W = \frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k}$$

По теореме Лагранжа $\exists c_3 \in (x_0, x_0 + k)$:

$$W = \frac{\psi(y_0 + k) - \psi(y_0)}{k} = \psi'(c_3) = \frac{f'_y(x_0 + h, c_3) - f'_y(x_0, c_3)}{h}$$

Еще раз по теореме Лагранжа $\exists c_4 \in (y_0, y_0 + h)$:

$$W = \frac{f'_y(x_0 + h, c_3) - f'_y(y_0, c_3)}{h} = f''_{xy}(c_3, c_4)$$

$f''_{xy}(c_1, c_2) = W = f''(c_4, c_3)$ и они непрерывны, следовательно, $f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0)$. □

18 Дифференциалы старшего порядка

Определение 18.1. Зададим $f(x, y)$, $\exists$ непрерывные частные производные по x, y $\Rightarrow \exists df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Предположим, что dx, dy фиксированы. Тогда df зависит только от x, y. Тогда, если $\exists d(df) = d^2 f$, то он называется вторым дифференциалом. Аналогично задается $d(d^k f) = d^{k+1} f$.

Пример 18.1. Пусть $f(x,y)$ — функция и существуют дифференциалы до второго порядка. Тогда:

$$d^2f(x,y) = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

где dx, dy — const.

Предположим, что существуют непрерывные частные производные до 3 порядка и вычислим формулу дифференциала третьего порядка:

$$d^3f(x,y) = d(d^2f) = d\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}(...)dx + \frac{\partial}{\partial y}(...)dy =$$
$$= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

По идукции для двумерного случая:

$$d^kf(x,y) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^{k-i}}dx^idy^{k-i} = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f$$

Аналогично для многомерного:

$$d^kf = d(d^{k-1}f) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^k f$$

Замечание 18.1. Дифференциалы старшего порядка свойством инвариантности формы не обладают.

19 Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Пусть дана $f(x,y)$, $M_0 = (x_0, y_0)$ и в некоторой окрестности M_0 существуют непрерывные частные производные до k-ого порядка. Пусть $M = (x,y)$ — некоторая точка из этой окрестности. Уравнение отрезка L соединяющего точки M и M_0:

$$\begin{cases} x = x_0 + t\Delta x \\ y = y_0 + t\Delta y \quad t \in [0,1] \end{cases}$$

Обозначим $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$. Разложим F по известной формуле Тейлора для одномерных при $t = 0$:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + ... + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!}t^{k-1} + R_k$$

где $R_k = \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!}t^k,\ \Theta \in (0,1)$.

Подставим вместо нуля другой конец отрезка ($t = 1$, сразу подставили):

$$F(1) = F(0) + ... + \frac{F^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \frac{F^{(k)}(\Theta)}{k!}$$

Таким образом, $F(1) = f(M),\ F(0) = f(M_0)$.

Вычислим производную: $F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cdot \Delta y = df(M_0)$ по формуле конечных приращений и теореме Лагранжа.

Отсюда по индукции $F^i(0) = d^i f(M_0)$.

$$R_k = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^k f(\widetilde{M})$$

где $\widetilde{M} = (x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)$.

Теперь запишем полученную формулу Тейлора ($t = 1$):

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + ... + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1} f(M_0) + R_k$$

Для многомерного случая формула Тейлора та же ($t = 1$):

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{1!}df(M_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(M_0) + ... + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1} f(M_0) + R_k$$

Где

$$R_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\Delta x_n\right)^k f(\widetilde{M})$$

где $\widetilde{M} = (x_1^{(0)} + \Theta\Delta x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)} + \Theta\Delta x_n^{(0)})$.

20 Экстремумы функции. Необходимые и достаточные условия

Пусть задана функция $f(x)$ в $E \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 20.1. Точка $a \in E$ — точка локального минимума, если $\exists \delta > 0$: $\forall x \in U_\delta(a) \cap E \Rightarrow f(x) \geq f(a)$. Знак неравенства иной — точка локального максимума. Эти точки называются локальными экстремумами. Если неравенство строгое, то это собственный экстремум.

Определение 20.2. Наибольшее и наименьшее значение f в области E, если таковые существуют, называются глобальными экстремумами.

Глобальные экстремумы могут достигаться либо в точках локального экстремума внутри области, либо на границе этой области.

Теорема 20.1. *(необходимое условие локального экстремума)*

Пусть a — внутренняя точка E и точка локального экстремума. Пусть в окрестности этой точки существуют первые частные производные $f'_{x_1}, ..., f'_{x_n}$. Тогда $f'_{x_i}(a) = 0,\ i = \overline{1, n}$.

Доказательство. Рассмотрим $F(x_1) = f(x_1, a_2, ..., a_n)$ (то есть зафиксированы все переменные, кроме первой). Если a — точка локального экстремума f, то a_1 — точка локального экстремума функции F. Тогда по теореме Ферма $F'(a_1) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 0$. Аналогично доказывается, что и остальные частные производные в точке a равны нулю. □

Предложение 20.1. *(достаточное условие локального экстремума)*

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Пусть $a \in E$, внутренняя и станционарная. Разложим функцию $f(x)$ по Тейлору до слагаемых первого порядка малости:

$$f(x) = f(a) + \underbrace{df(a)}_{=0} + R_2$$

где R_2 — остаточный член. Равенство нулю по необходимому условию экстремума.

$\Delta f = f(x) - f(a) = R_2$. Для того, чтобы точка a была точкой локального минимума, достаточно, чтобы $\exists \delta > 0 : \ \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow R_2 \geq 0$. Аналогично для точки максимума: $R_2 \leq 0$. Задача свелась к определению знака R_2. Оценим:

$$R_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 f(M) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(M)dx_i dx_j$$

где $dx_i = x_i - a_i, \ i = \overline{1,n}$. $M \in (a, x)$. Здесь получили нечто похожее на квадратичную форму, прочтите замечание ниже.

(читаем замечание)

Вернемся к нашим баранам. Запишем

$$R_2 = \frac{1}{2!}dx^T S(M) dx$$

где $S = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1, \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$, $dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ ... \\ dx_n \end{pmatrix}$

По теореме о о равенстве симметричных производных S симметрична.

Замечание 20.1. (о квадратичных формах)

Функция вида

$$f(z_1, ..., z_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} z_i z_j = z^T A z$$

где $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — симметричная матрица.

Квадратичная форма называется положительно определенной, если $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(z) > 0$. Аналогично отрицательно определенной, если $\forall z \neq 0 \Rightarrow f(x) < 0$.

$f(z)$ — знакопостоянная неотрицательная форма, если: $\forall z \Rightarrow f(z) \geq 0$.

Аналогично знакопостоянная неположительная форма, если: $\forall z \Rightarrow f(z) \leq 0$.

Квадратичная форма называется знакопеременной, если она может принимать как положительные, так и отрицательные значения: $\exists z_1, z_2 : \ f(z_1) < 0, \ f(z_2) > 0$.

Теорема: (Критерий Сильвестра)

1) Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы A были положительны.

2) Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все левые верхние угловые миноры матрицы A чередовали знак, начиная с минуса.

Теорема 20.2. *(достаточное условие локального экстремума)*

Пусть a — внутренняя точка E и она станционарная. И пусть $\exists$ непрерывные частные производные до 2 порядка включительно в окрестности точки a.

Тогда:

1) Если $S(a)$ положительно определена, то a — точка локального минимума.

2) Если $S(a)$ отрицательно определена, то a — точка локального максимума.

3) Если $S(a)$ является знакопеременной, то a — не точка локального экстремума.

4) Если $S(a)$ — знакопостоянная, но не знакоопределенная, то информации недостаточно.

Доказательство.

1) Предположим, $S(a)$ положительно определена. Из непрерывности вторых частных производных следует, что $\exists \delta > 0 : \ \forall M \in U_\delta(a) \Rightarrow S(M)$ — положительно определена. Тогда $R_2 > 0$, откуда a — точка локального минимума

2) Для отрицательной определенности все аналогично.

3) Если $S(a)$ знакопеременная, то $\forall \delta > 0 \ \exists M_1, M_2 \in U_\delta(a)$, такие, что $R_2(M_1) > 0, \ R_2(M_2) < 0$.

4) Приведем пример, являющийся контрпримером к обратному утверждению: $f_1(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$. $f_2(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3$. $(0, 0)$ — станционарная точка обеих функций.

$$S(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— знакопостоянная. $(0, 0)$ — точка локального минимума f, но не является точкой локального экстремума. ☐

Замечание 20.2. Если $S(a)$ знакопостоянная, но не знакоопределенная, то тогда для исследования точки a нужно задействовать производные и дифференциалы старшего порядка.

По Тейлору:

$$\Delta f(x) = f(x) - f(a) = \underbrace{df(a)}_{=0} + \frac{1}{2} d^2 f(a) + \frac{1}{3!} d^3 f(a) + ...$$

Исследовать знак старшего дифференциала нужно лишь там, где обнуляются дифференциалы младшего порядка.

Если теперь требуется найти глобальный экстремум, то кроме поиска локальных экстремумов внутри области E, нужно исследовать поведение этой функции и на ее границе.

Обозначим $\widehat{E}$ границу E. Задача поиска экстремума на границе называется задачей поиска условного экстремума. Заметим, что размерность $\widehat{E}$ равна размерности $E - 1$.

21 Градиентный метод поиска экстремума. Метод случайного спуска

Пусть требуется найти экстремум функции в области E. Выберем произвольную начальную точку $x^{(0)} \in E$. Зададим некоторое положительное число h.

$$x = \begin{cases} x^{(0)} + h\vec{\nabla} f(x^{(0)}) & \max \\ x^{(0)} - h\vec{\nabla} f(x^{(0)}) & \min \end{cases}$$

В результате получаем последовательность точек $\{x^{(k)}\}$, на которой функция приближается к максимуму либо к минимуму.

Типовые проблемы этого метода:

1) Выбор шага h. Если выбрать очень маленкий шаг, то идти до экстремума можно долго (экстремум далеко). А если выбрать очень большой - мы рискуем «перепрыгнуть» через экстремум. Решение — динамическое изменение шага: обычно сначала делают большие шаги, а по мере приближения к экстремуму (начались «метания» и «перепрыжки») шаг постепенно уменьшают.

2) Проблема многоэкстремальности.У функции может быть большое количество локальных экстремумов и двигаясь из точки $x^{(0)}$ мы найдем один из этих экстремумов, не факт, что глобальный. Решение: идем из нескольких точек либо изучаем физику функции (применяем некоторую теорию для доказательства количества экстремумов либо их расположения). Все это повышает вероятность обнаружения глобального экстремума.

3) Вычисление градиента не всегда возможно. Функция может быть сложной, не заданной явно, вообще не дифференцируемой. Мы можем воспользоваться формулой:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

4) Проблема границ. Градиентные методы хороши для поиска экстремума внутри области. Если он расположен на границе, то у нас возникают большие проблемы. В этом случае применяем методы математического программирования (методы поиска экстремума в некоторой области).

Мы можем использовать **метод случайного спуска**:

На каждом шаге выбираем произвольное направление и в этом направлении делаем некоторый шаг. Если в этом направлении функция изменилась нужным нам образом, то тогда это направление удачное, по нему и движемся. В противном случае выбираем другое направление.

22 Теорема о неявной функции от одной или нескольких переменных

Определение 22.1. Пусть задано уравнение $F(x, y) = 0$, где x, y — скаляры. Уравнение задает функцию $y = y(x)$ неявно, если при подстановке второго уравнения в первое получим тождество.

Теорема 22.1. *(о неявной функции).*

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ *удовлетворяет уравнению* $F(x_0, y_0) = 0$. *Пусть в окрестности* M_0 *существует непрерывная* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$. *Тогда* $\exists \delta > 0$, $\exists y(x)$, *определенная и непрерывная на* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, *такая, что:*
1) $y(x_0) = y_0$
2) $F(x, y(x)) \equiv 0$ *на* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *и будет определяться однозначно.*
Если, кроме того, в окрестности M_0 $\exists$ *непрерывная* $\frac{\partial F}{\partial x}$, *то тогда:*
1) $y(x)$ *— дифференцируема и*
2) $y'(x) = -\frac{\partial F}{\partial x} / \frac{\partial F}{\partial y}$.

Доказательство.

1) Покажем, что $\exists!$ функция $y(x)$. $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$ по условию теоремы. Пусть, для определенности, производная принимает положительные значения (для отрицательных доказательства аналогичны). $\frac{\partial F}{\partial y}$ непрерывна в окрестности M_0. Найдется такое $\hat{\delta} > 0:\ \frac{\partial F}{\partial y} > 0,\ \forall (x, y) : \begin{cases} |x - x_0| < \hat{\delta} \\ |y - y_0| < \hat{\delta} \end{cases}$

$\frac{\partial F}{\partial y} > 0 \Rightarrow F \nearrow$ по y. Следовательно, $\begin{cases} F(x_0, y_0 + \hat{\delta}) > 0 \\ F(x_0, y_0 - \hat{\delta}) < 0 \end{cases}$. Вспомним, что по условию теоремы F непрерывна, следовательно, $\exists \tilde{\delta} > 0 : \begin{cases} F(x, y_0 + \hat{\delta}) > 0 \\ F(x, y_0 - \hat{\delta}) < 0 \end{cases} \quad \forall x \in [x_0 - \tilde{\delta}, x_0 + \tilde{\delta}]$. Пусть $\delta = \min\{\hat{\delta}, \tilde{\delta}\} > 0$. Тогда по теореме Больцано-Коши о нуле функции $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $\exists y \in [y_0 - \hat{\delta}, y_0 + \hat{\delta}] :\ F(x, y) = 0$, причем F непрерывна, следовательно, $y(x)$ непрерывна, а так как $F \nearrow$ по $y \Rightarrow y(x)$ — единственная.

2) Покажем дифференцируемость и найдем производную. Выберем произвольную $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y = y(x)$. Рассмотрим $x + \Delta x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $y + \Delta y = y(x + \Delta x)$. $\Delta F = \underbrace{F(x + \Delta x, y + \Delta y)}_{=0} - \underbrace{F(x, y)}_{0} = 0$. Но $\exists$ непрерывные $F'_x, F'_y \Rightarrow$ F дифференцируема, следовательно, $0 = \Delta F = \underbrace{F(x + \Delta x, y + \Delta y)}_{=0} - \underbrace{F(x, y)}_{0} = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + o(\rho) \Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{o(\rho)}{\Delta x} \to 0$. □

Определение 22.2. Пусть задана $F(x_1, ..., x_n, y) = 0 \quad (3)$. Будем говорить, что функция $y = y(x_1, ..., x_n)$ задается уравнением (3) неявно, если при подстановке в уравнение (3) получим тождество.

Теорема 22.2. *(о неявной функции нескольких переменных)*

Обозначим $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, $y^{(0)}$, $M_0 = (x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Пусть $F(M_0) = 0$. *В окрестности точки* M_0 *функция непрерывна и существует непрерывный* $\frac{\partial F}{\partial y}$ *и* $\frac{\partial F}{\partial y}|_{M_0} \neq 0$. *Тогда в окрестности точки* x_0 $\exists!$ *непрерывная функция* $y = y(x_1, ..., x_n)$, *такая, что:*
1) $F(x_1, ..., x_n, y(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$
2) $y(x^{(0)}) = y_0$.
При этом если в окрестности M_0 $\exists$ *непрерывная* $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$, *то*

$$\exists \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial y}$$

Доказательство. Доказательство аналогично одномерному случаю. □

23 Функциональные матрицы и определители. Матрица Якоби. Теорема Лапласа

Определение 23.1. Пусть задано несколько функций:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ \text{.........................} \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Тогда говорят, что задана система из m функций от n переменных.

Определение 23.2. Пусть в E $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$

Тогда

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

— матрица Якоби.

Отметим несколько свойств матрицы Якоби:

1) Пусть

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t_1, ..., t_l) \\ \text{.......................} \\ x_n = x_n(t_1, ..., t_l) \end{cases} \quad (2)$$

Тогда (1) и (2) — система сложных функций.

Матрица Якоби для сложной функции: $\frac{\partial y_i}{\partial t_k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + ... + \frac{\partial y_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}$ $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, l}$. Запишем в матричном виде:

$$\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(t_1, ..., t_l)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\frac{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}{\mathscr{D}(t_1, ..., t_l)} \quad (3)$$

2) Рассмотрим частный случай $m = n$. Тогда $\det \frac{\mathscr{D}(y_1,...,y_n)}{\mathscr{D}(x_1,...,x_n)} = \frac{D(y_1,...,y_n)}{D(x_1,...,x_n)}$ — якобиан. Если якобиан в окрестности точки не равен нулю, то тогда система называется не особой (не вырожденной).

Теорема 23.1. *(Лапласа)*

Пусть $m = n$ в (1) и система (1) не особая. Тогда

$$\frac{D(y_1, ..., y_n)}{D(x_1, ..., x_n)} \cdot \frac{D(x_1, ..., x_n)}{D(y_1, ..., y_n)} = 1$$

Как следствие — обратная система тоже не особая.

Доказательство. По формуле (3)

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)} = \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\frac{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_n)}$$

откуда

$$\frac{D(y_1, ..., y_n)}{D(x_1, ..., x_n)} \cdot \frac{D(x_1, ..., x_n)}{D(y_1, ..., y_n)} = 1$$

□

24 Независимость функций

Определение 24.1. Система функций

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad (1)$$

называется независимой, если $\nexists F \not\equiv 0$: $F(y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0 \quad (*)$

То есть система независима, если ни одна функция в системе (1) не является комбинацией оставшихся.

Сформулируем условие независимости функций. Дифференцируем тождество $(*)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_i} \equiv 0 \qquad i = \overline{1, n}$$

Что можно переписать в виде

$$\left(\frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)}\right)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{pmatrix} \equiv 0$$

Пусть $A(x) = \left(\frac{\mathscr{D}(y_1,...,y_m)}{\mathscr{D}(x_1,...,x_n)}\right)^T$, $h = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial y_m} \end{pmatrix}$. Отсюда $A(x)h = 0$. Система (1) будет независимой, если однородная линейная алгебраическая система $A(x)h = 0$ имеет только нулевое решение или если $h \equiv 0$.

Определение 24.2. $\operatorname{rang} A(x)$ — называется максимальный порядок минора, не равного тождественно нулю.

Теорема 24.1. *Для того, чтобы система* (1) *являлась независимой в области* $E \subset \mathbb{R}^n$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{rang} \frac{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)}{\mathscr{D}(x_1, ..., x_n)} = m$$

в области E

Вывод 24.1.

1) $m > n \Rightarrow$ (1) *зависимая.*

2) $m = n$: (1) *независимая* $\Leftrightarrow$ (1) *не особая.*

3) $\operatorname{rang} A(x) = s < m \Rightarrow$ *В* (1) $\exists s$ *независимых функций.*

25 Теорема о системе неявных функций

Определение 25.1.

$$\begin{cases} F_1(x_1, ..., x_n y_1, .., y_m) = 0 \\ .... \\ F_m(x_1, ..., x_n y_1, .., y_m) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Будем говорить, что система (1) задает функции

$$\begin{cases} y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

неявно, если при подстановке их в (1) получаем тождество.

Теорема 25.1. *(о системе неявных функций)*

Обозначим $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ ... \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix}$, $y^{(0)} = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} \\ ... \\ y_m^{(0)} \end{pmatrix}$, $M_0 = (x^{(0)}, y^{(0)})$.

Пусть $F_i(M_0) = 0$ $i = \overline{1, m}$ *и в окрестности* M_0 F_i *непрерывны и имеют непрерывные* $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ $i, j = \overline{1, m}$. *Если якобиан*

$$\frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)}|_{M_0} \neq 0$$

то в окрестности точки $x^{(0)}$ *существует единственный набор непрерывных функций*

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

такой, что:

1) $F_i(x_1, ..., x_n y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0 \qquad (1)$*;*

2) $y^{(0)} = y(x^{(0)})$.

Доказательство. (индукция)

База: $m = 1 \Rightarrow$ одномерная теорема о неявной функции.

ИП: Пусть теорема верна для $m - 1$. Докажем, что теорема верна для m.

Расписываем якобиан нашей системы

$$0 \neq \frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)}|_{M_0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{M_0}$$

Значит, у матрицы Якоби нет нулевых строк, а значит, в последней строке матрицы есть хотя бы один ненулевой элемент. Пусть, для определенности, $\frac{\partial F_m}{\partial y_m}|_{M_0} \neq 0$, иначе переобозначим (или воспользуемся перестановкой). Тогда по одномерной теореме о неявной функции из последнего уравнения в системе (1) можно выразить y_m. Тогда пусть $y_m = f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})$. Подставим теперь эту функцию в систему (1).

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) = 0 \\ .... \\ \Phi_{m-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_{m-1}(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) = 0 \\ \Phi_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}) = F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1}, f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_{m-1})) \equiv 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Теперь докажем, что

$$\Delta = \frac{D(\Phi_1, ..., \Phi_{m-1})}{D(y_1, ..., y_{m-1})}|_{M_0} \neq 0$$

Распишем частную производную

$\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_k} = \frac{\partial F_1}{\partial y_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k}$

....

....

$\frac{\partial \Phi_m}{\partial y_k} = \frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial f}{\partial y_k} \equiv 0$

$$0 \neq \left| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right|_{M_0} = \left| \begin{matrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right|_{M_0} = \frac{\partial F_m}{\partial y_m}|_{M_0} \cdot \Delta \Rightarrow \Delta \neq 0$$

Умножим последний столбец на $\frac{\partial f}{\partial y_k}$ и прибавляем к k-ому столбцу.

Тогда по индуктивному предположению из системы (2) можно выразить

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ ..... \\ y_{m-1} = y_{m-1}(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

и $y_m = f(x_1, ..., x_n, y_1(x_1, ...x_n), ..., y_{m-1}(x_1, ..., x_n))$ ☐

26 Дифференцирование неявных функций

Замечание 26.1. Если в доказанной теореме (25 билет) предположить, что в окрестности M_0 существуют непрерывные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k},\ i = \overline{1, m},\ k = \overline{1, n}.$, то $\exists \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ в окрестности точки $x^{(0)}$.

Выразим функции $y_1, ..., y_m$ и подставим (1). Получим тождество:

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ y_m = y_m(x_1, ..., x_n) \end{cases} \quad (1)$$

Замечание 26.2. $F_i(x_1, ..., x_n, y_1(x_1, ...x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$

Продифференцируем тождество по x_k:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0 \\ .... \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + ... + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = 0 \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} + \frac{\mathscr{D}(F_1, ..., F_m)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} = -\left(\frac{\mathscr{D}(F_1, ..., F_m)}{\mathscr{D}(y_1, ..., y_m)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$$

(обратная матрица существует, так как якобиан не равен нулю).

27 Условный экстремум. Метод исключения переменных

Проблема. Пусть дана функция $F(x_1, ..., x_{n+m}) \quad (1)$, и она связана условием

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \\ .... \\ \varphi_m(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

на E, где $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Требуется найти экстремум.

Определение 27.1. Точка $x^{(0)}$ называется точкой условного минимума в задаче, если $\exists\delta > 0 : \ \forall x \in \big(U_\delta(x^{(0)}) \cap E\big) \Rightarrow F(x) \geq F(x^{(0)})$.

Без потери общности считаем, что уравнения (2) независимы в окрестности $x^{(0)}$. Тогда, по теореме о независимости функций $\operatorname{rang} \frac{\mathscr{D}(\varphi_1,...,\varphi_m)}{\mathscr{D}(x_1,...,x_{n+m})} = m$. То есть какие-то m столбцов этой матрицы образуют ненулевой минор. Без потери общности считаем, что минор образован последними m столбцами. Минор является якобианом вида:

$$\frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{D(x_{n+1}, ..., x_{n+m})}$$

Тогда по теореме о системе неявных функций в окрестности точки $x^{(0)}$ из уравнений (2) можно выразить:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_1, ..., x_n) \\ .... \\ x_{n+m} = f_m(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

Подставив эти функции в (1):

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

В результате задача поиска условного экстремума функций (1,2) сведена к задаче поиска безусловного экстремума функции Φ. Такой подход называется методом исключения переменных.

28 Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа

Проблема. Пусть дана функция $F(x_1, ..., x_{n+m}) \quad (1)$, и она связана условием

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \\ .... \\ \varphi_m(x_1, ..., x_{n+m}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

на E, где $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Требуется найти экстремум.

Определение 28.1. Пусть $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$, $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ ... \\ \lambda_m \end{pmatrix}$. Функция Лагранжа: $L(x, \lambda) = F(x) + \lambda_1\varphi_1(x) + ... + \lambda_m\varphi_m(x)$, где $\lambda_1, ..., \lambda_m$ — константы.

Теорема 28.1. *(Необходимое условие условного экстремума).*

Пусть $x^{(0)}$ — точка условного экстремума в задаче (1,2). Пусть

$$\frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_m)}{D(x_{n+1}, ..., x_{n+m})}|_{x^{(0)}} \neq 0$$

Тогда найдутся такие константы $\lambda_1, ..., \lambda_m = \text{const}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}|_{x^{(0)}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)_{x^{(0)}} = 0 \qquad (4)$$

$i = \overline{1, n+m}$.

Необходимые условия условного экстремума в задаче (1,2) совпадают с необходимыми условиями безусловного экстремума функции Лагранжа.

Замечание 28.1. Уравнения (4) состоит из $m+n$ уравнений. Присоединяем к ним условие связи 2. Получаем $n+2m$ уравнений с таким же количеством неизвестных. Решаем эту систему и находим точки, подозрительные на условный экстремум.

Доказательство. Подставим уравнения (3) в (1). Получим:

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

$x^{(0)}$ будет и точкой безусловного экстремума функции Φ. Отсюда:

$$d\Phi(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m}\right)|_{x^{(0)}} = 0 \qquad (5)$$

Согласно свойству инвариантности формы первого дифференциала можно не обращать внимания на то, что последние m переменных — функции от первых n переменных.

Подставим (3) в (2):

$$\varphi(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) \equiv 0$$

Продифференцируем данные тождества и опять воспользуемся свойством инвариантности формы первого дифференциала: в точке $x^{(0)}$:

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0 \qquad (6)$$

k-ое уравнение в системе (6) умножим на $\lambda_k (k = \overline{1, n})$ и складываем это с уравнением (5). В точке $x^{(0)}$ будет выполняться условие:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\lambda_1 + ... + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}\lambda_m\right) dx_1 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial x_{n+m}} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{n+m}}\lambda_1 + ... + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_{n+m}}\lambda_m\right) dx_{n+m} = 0$$

Получаем, что в $x^{(0)}$ должно выполняться:

$$\sum_{i=1}^{n+m} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_k\right) dx_i = 0$$

Выберем константы $\lambda_1, ..., \lambda_m$ исходя из условий: $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\lambda_i\right)|_{x^{(0)}} = 0$, $i = \overline{n+1, n+m} \qquad (8)$

Система (8) относительно λ_i является системой линейнчх уравнений, матрица коэффициентов по условию теоремы не особая, то есть из этой системы все λ_i найдутся однозначно ($i = \overline{1, m}$). Найденные константы λ_i подставим в уравнение (7). Тогда из (7) останутся только последние n слагаемых:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \lambda_k \right) dx_i = 0 \qquad (9)$$

$x_1, ..., x_n$ — независимые переменные. Тогда (9) есть линейная форма относительно $dx_1, ..., dx_n$ и она будет равна нулю при любых $dx_1, ..., dx_n$. Тогда получается, что коэффициенты $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} \lambda_k \right)$ должны будут равняться нулю. □

Теорема 28.2. *(достаточное условие условного экстремума)*

Пусть в точке $x^{(0)}$ выполнены условия предыдущей теоремы. И пусть $F, \varphi_1, ..., \varphi_m$ имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки $x^{(0)}$. Тогда если при условиях (6) *второй дифференциал $d^2L(x^{(0)})$ является положительно определенной квадратичной формой, то $x^{(0)}$ является точкой условного минимума, и наоборот, если квадратичная форма определена отрицательно, то $x^{(0)}$ — точка условного максимума (здесь $L(x^{(0)})$ — функция Лагранжа).*

Замечание 28.2. Достаточные условия условного экстремума в задаче $(1, 2)$ совпали с достаточными условиями безусловного экстремума функции Лагранжа. Для доказательства достаточно показать, что $d^2L(x^{(0)}) = d^2\Phi(x^{(0)})$.

При исследовании знака второго дифференциала соотношение (6) нужно учитывать, так как второй дифференциал свойством инвариантности формы не обладаетс.

29 Геометрические приложения производных. Касательные и нормали в трехмерном пространстве

Касательная к кривой по-прежнему прямая, а вот нормаль станет плоскостью.

L — кривая в $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$$

и $t \in [\alpha, \beta]$.

И пусть φ, ψ, χ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$.

$t_0 \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \psi(t_0) \\ z_0 = \chi(t_0) \end{cases}$$

$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in L$.

Зададим приращение Δt:

$$\begin{cases} \overline{x} = \varphi(t_0 + \Delta t) \\ \overline{y} = \psi(t_0 + \Delta t) \\ \overline{z} = \chi(t_0 + \Delta t) \end{cases}$$

Проведем секущую через точки M_0 и $\overline{M}$.

$\overline{M}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$

$\overline{M_0\overline{M}}$:

$$\frac{x - x_0}{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi(t_0 + \Delta t) - \chi(t_0)}$$

Домножим всё на Δt:

$$\frac{\frac{x-x_0}{\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0)}}{\Delta t} = \frac{\frac{y-y_0}{\psi(t_0+\Delta t)-\psi(t_0)}}{\Delta t} = \frac{\frac{z-z_0}{\chi(t_0+\Delta t)-\chi(t_0)}}{\Delta t}$$

Устремим $\Delta t \to 0 \Rightarrow \overline{M} \to M_0 \Rightarrow$

Уравнение касательной в M_0:

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi(t_0)}$$

$\vec{n} = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \chi'(t_0))$ — направляющий вектор касательной.

Нормалью к кривой в точке M_0 называется плоскость, перпендикулярная касательной.

Тогда уравнение нормали в точке M_0 будет иметь вид:

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \chi'(t_0)(z - z_0)$$

30 Двойной интеграл. Свойства

Определение 30.1. Пусть задана область $E \subset \mathbb{R}^2$. E — простая (E ограничена простым (т.е. не самопересекающимся) контуром) и связная. E ограничена. Пусть в E задана и ограничена $f(x, y)$. $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$. d_i — диаметр (супремум максимальной хорды) i-ого кусочка. $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} d_i$ — ранг дробления. ΔS_i — площадь кусочка. Тогда:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta S_i$$

(сумма Римана)

Если существует конечный предел $\lim \sigma$ и он не зависит от способа дробления и выбора $\xi_i,\ \eta_i$, то он называется двойным римановым интегралом по области E:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma = \iint_E f(x, y) dS$$

Замечание 30.1. Пусть $\exists \iint_E f(x, y) dS$. Тогда предел суммы Римана не зависит от способа дробления области E. Порежем область E на кусочки с помощью прямых, параллельных осям координат. Тогда, за исключением погрешности на границе (которая стремится к нулю при ранге дробления, стремящемся к нулю), область E разобьется на прямоугольники. Считаем, что E_i — прямоугольник со сторонами $\Delta x_i,\ \Delta y_i$. Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Если устремить ранг дробления к нулю, то $dS = dxdy$. Поэтому далее будем обозначать двойной интеграл как $\iint_E f(x, y) dxdy$.

Свойства двойного интеграла:

1) Пусть $\exists \iint_E f(x,y)dxdy = I$, L — кривая в области E. $f^*(x,y)$ строится по правилу: $f^*(x,y) = f(x,y)\ \forall (x,y) \in E \backslash L$. Тогда $\exists \iint_E f^*(x,y)dxdy = I$.

2) Если $f(x,y) \equiv 0$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy = 0$.

3) Если $f(x,y) \equiv 1$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy = S(E)$ (площади области).

4) Если $f(x,y) \geq 0$ в E, то $\iint_E f(x,y)dxdy \geq 0$.

5) Если $S(E) = 0$, то $\iint_E f(x,y)dxdy = 0\ (\forall f)$.

6) $\iint_E (c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y))\, dxdy = c_1 \iint_E f_1(x,y)dxdy + c_2 \iint_E f_2(x,y)dxdy$, где c_1, c_2 — константы.

7) Если $E = E_1 \cup E_2$ и E_1, E_2удовлетворяют условиям двойного интеграла, то $\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_{E_1} f(x,y)dxdy + \iint_{E_2} f(x,y)dxdy$.

8) Если $f(x,y) \leq g(x,y)$, то $\iint_E f(x,y)dxdy \leq \iint_E g(x,y)dxdy$.

9) $m \leq f(x,y) \leq M\ \forall (x,y) \in E \Rightarrow mS(E) \leq \iint_E f(x,y)dxdy \leq MS(E)$.

10) $\left|\iint_E f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_E |f(x,y)|\, dxdy$.

Теорема 30.1. *(о среднем)*

$f(x,y)$ — непрерывна в области E. Тогда $\exists (a,b) \in E:\ \iint_E f(x,y)dxdy = f(a,b) \cdot S(E)$.

Доказательство. По первому свойству без потери общности считаем, что E замкнута. По теореме Вейерштрасса у f $\exists m = \min_E f(x,y)$, $\exists M = \max_E f(x,y)$. По свойству 9 получаем $mS(E) \leq \iint_E f(x,y)dxdy \leq MS(E)$. Если $S(E) = 0$, то теорема очевидна. Пусть $S(E) > 0$. Площадь положительна, тогда:

$$m \leq \frac{1}{S(E)} \iint_E f(x,y)dxdy \leq M$$

По теореме Больцано-Коши $\exists (a,b) \in E:\ f(a,b) = \frac{1}{S(E)} \iint_E f(x,y)dxdy$. □

31 Двойной интеграл. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости. Геометрический смысл

$E = \cup_{i=1}^n E_i$, E_i — простые, связные, непересекающиеся. ΔS_i — площать E_i, λ — ранг дробления.

$m_i = \inf_{E_i} f(x,y)$, $M_i = \sup_{E_i} f(x,y)$.

$s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i$ — нижняя сумма Дарбу.

$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i$ — верхняя сумма Дарбу.

Свойства:

1) $s \leq \sigma \leq S$ на любом дроблении.

2) Пусть есть два дробления τ_1, τ_2 и пусть дробление τ_2 получено путем дальнейшего дробления дробления τ_1. Тогда дробление τ_2 мельче дробления τ_1. Тогда если s_1, S_1 — суммы Дарбу для τ_1, а s_2, S_2 — суммы Дарбу для τ_2, то $\begin{cases} s_2 \geq s_1 \\ S_2 \leq S_1 \end{cases}$. При $\lambda \to 0$ нижняя сумма возрастает, а верхняя — убывает.

3) $\forall s \leq \forall S$.

Теорема 31.1. *(критерий интегрируемости)*

Для существования двойного интеграла $\iint_E f(x,y)dxdy$ необходимо и достаточно $\exists \lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$.

Доказательство. Аналогично одномерному случаю. ☐

Теорема 31.2. *(достаточное условие интегрируемости)*
Если функция $f(x,y)$ — непрерывна в области E, то $\exists \iint_E f(x,y)dxdy$.

Доказательство. По 1) свойству без потери общности считаем, что E замкнута. По теореме Кантора $f(x,y)$ равномерно непрерывна, то есть $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 :\ \forall\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i = M_i - m_i \leq \varepsilon\ \forall i = \overline{1,n}$. Тогда рассмотрим разность сумм Дарбу:

$$0 \leq S - s = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta S_i \leq \varepsilon S(E)$$

$\Rightarrow \exists \lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0.$ ☐

Геометрический смысл двойного интеграла

Пусть функция неотрицательна в E. Тогда $z = f(x,y)$ выше Oxy. T — трехмерное тело, удовлетворяющее условию: $\begin{cases} 0 \leq z \leq f(x,y) \\ (x,y) \in E \end{cases}$. Назовем данное тело криволинейным брусом. Разобьем область: $E = \cup_{i=1}^{n} E_i$, E_i — простые, связные, непересекающиеся. ΔS_i — площадь E_i, λ — ранг дробления. Дроблению области E соответствует дробление криволинейного бруса: $T = \cup_{i=1}^{n} T_i$. Обозначим за ΔV_i объем T_i, а объем всего бруса — V. Очевидно, что $V = \sum_{i=1}^{n}\Delta V_i$. Обозначим $m_i = \inf_{E_i} f(x,y),\ M_i = \sup_{E_i} f(x,y)$.

Тогда $m_i\Delta S_i \leq \Delta V_i \leq M_i\Delta S_i$. Просуммировав неравенство, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta S_i \leq V \leq \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta S_i$$

По теореме о двух милиционерах $\lambda \to 0 \Rightarrow V = \iint_E f(x,y)dxdy$.

Замечание 31.1. Если $f(x,y) \leq 0$ в E, то $V = -\iint_E f(x,y)dxdy$. Если тело ограничено областями $z = f_2(x,y)$ и $z = f_1(x,y)$ сверху и снизу соответственно, то $V(T) = \iint_E \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right)dxdy$.

32 Сведение двойного интеграла к повторному

$E : \begin{cases} y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$

(рисунок)

$\iint_E f(x,y)dxdy =?$.

Пусть $f(x,y) \geq 0$ в E. Геометрический смысл двойного интеграла — объем криволинейного бруса.

Выберем любое $x \in [a,b]$. Режем брус плоскостью $x = \text{const}$. $S(x)$ — площадь полученного сечения. Воспользуемся формулой:

$$V(T) = \int_a^b S(x)dx$$

(рисунок)

При этом по той же формуле

$$S(x) = \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy$$

Таким образом, двойной интеграл свелся к повторному:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (*)$$

Формула $(*)$ будет верна и без предположения о неотрицательности функции f:

$f(x,y)$ — ограничена $\Rightarrow \exists m = \text{const} > 0 : \ m + f(x,y) \geq 0$ в E.

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_E \left[(f(x,y)+m) - m\right] dxdy = \iint_E (f(x,y)+m)\, dxdy - \underbrace{\iint_E mdxdy}_{=m\overline{S}(E)} =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} (f(x,y)+m)\, dy - m\overline{S}(E) = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} mdy \right) dx - m\overline{S}(E) =$$

$$= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dxdy + \underbrace{\int_a^b m(y_2(x) - y_1(x))dx}_{=m\overline{S}(e)} = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

33 Криволинейные интегралы первого рода. Сведение к Риманову интегралу

Пусть имеется плоскость xy и в этой плоскости задана кривая $l \in \mathbb{R}^2$, A — ее начало, B — конец. Пусть L — длина l, и $L < \infty$. Пусть на l определена и ограничена $f(x,y)$.

Разобьем кривую на n дуг:

$$A = M_0\breve{}M_1\breve{}...\breve{}M_n = B$$

ΔS_i — длина дуги $M_i\breve{M}_{i+1}$. $\lambda = \max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta S_i$ — ранг дробления. $\forall (\xi_i, \eta_i) \in M_i\breve{M}_{i+1}$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$$

Определение 33.1. Если существует конечный предел $\lim_{\lambda\to 0} \sigma$ и этот предел не зависит от способа дробления кривой l и выбора точек ξ_i, η_i, то он называется криволинейным интегралом первого рода.

Для него верны все свойства интеграла.

Криволинейные интегралы первого рода не зависят от ориентации кривой.

Пример 33.1. Пусть кривая l задана в явном виде: $y = y(x), \ x \in [a,b]$. Будем считать, что l непрерывно дифференцируема на $[a,b]$.

Разобьем отрезок $a = x_0, ..., x_n = b$ и каждую точку дробления назовем $M_0, ..., M_n$, где $M_i = (x_i, y(x_i)) \in l,\ i = \overline{0,n}$. $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\ \eta_i = y(\xi_i)$. ΔS_i — длина $M_i\breve{M}_{i+1}$. $\Delta S_i \approx \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2}$, где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, аналогично с y. Тогда:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i \eta_i)\Delta S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, y(\xi_i))\sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta x_i^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i y(\xi_i))\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i y(\xi_i))\sqrt{1 + y'(\bar{\xi}_i)^2} \cdot \Delta x_i$$

Нетрудно заметить, что при $\lambda \to 0$

$$\int_{(l)} f(x,y)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = (R)\int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}dx$$

Пример 33.2. Пусть кривая l задана в параметрическом виде:
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$. $x(t), y(t)$ непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$. $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$. $M_i = (x(t_i), y(t_i)) \in l,\ i = \overline{0,n}$.

$\forall \tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$ $\begin{cases} \xi_i = x(\tau_i) \\ \eta_i = y(\tau_i) \end{cases} \Rightarrow (\xi_i, \eta_i) \in M_i\breve{M}_{i+1},\ i = \overline{0, n-1}$

$\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$, аналогично с y. ΔS_i — длина $M_i\breve{M}_{i+1}$, $\Delta S_i \approx \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$, откуда

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i \eta_i)\Delta S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)^2}\Delta t =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\tau_i), y(\tau_i))\sqrt{x'\left(\overline{\tau}_i\right)^2 + y'\left(\overline{\overline{\tau_i}}\right)^2}\Delta t$$

Нетрудно заметить, что при $\lambda \to 0 \Rightarrow$

$$\int_{(l)} f(x,y)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = (R)\int_\alpha^\beta f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

34 Криволинейные интегралы второго рода. Физический смысл. Сведение к Риманову интегралу

Пусть имеется плоскость xy и в этой плоскости задана кривая $l \in \mathbb{R}^2$, A — ее начало, B — конец. Пусть L — длина l, и $L < \infty$.

$\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ — определена на l, при этом $P(x,y), Q(x,y)$ — определены и ограничены на l.

Разобьем кривую на несколько дуг: $A = M_0\breve{M}_1\breve{..}M_n = B$

ΔS_i — длина дуги $M_i\breve{M}_{i+1}$. $M_i = (x_i, y_i)$. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, аналогично для y. $\lambda = \max_{i=\overline{0,n-1}} \Delta S_i$ — ранг дробления. $\forall (\xi_i \eta_i) \in M_i\breve{M}_{i+1}$.

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i)$$

Определение 34.1. Если существует конечный $\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \int_{(l)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, то он называется криволинейным интегралом второго рода.

Для криволинейного интеграла второго рода выполняются все те стандартные свойства интеграла.

Замечание 34.1. Криволинейный интеграл второго рода зависит от ориентации кривой: $\int_{(AB)} Pdx+Qdy = -\int_{(BA)} Pdx+Qdy$.

Замечание 34.2. Пусть $l:\ y = \mathrm{const},\ x \in [a,b]$. Тогда $\int_{(l)} Pdx+Qdy = (R)\int_a^b P(x,y)dx$.

Замечание 34.3. Смысл криволинейного интеграла второго рода — работа, совершаемая силой, на перемещение тела по кривой l.

Пример 34.1. Пусть l задана в явном виде: $y = y(x),\ x \in [a,b]$ и l гладкая.

Разбиваем $a = x_0 < ... < x_n = b$. Пусть $M_i = (x_i, y(x_i))$. Обозначим $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Выберем $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\eta_i = y(\xi_i)$. Запишем сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1}\left(P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(P(\xi_i,\eta_i) + Q(\xi_i,\eta_i)\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)\Delta x_i = (*)$$

По теореме Лагранжа найдется $\overline{\xi_i} \in [x_i, x_{i+1}]$, такая, что

$$(*) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(P(\xi_i, y(\xi_i)) + Q(\xi_i, y(\xi_i)y'(\overline{\xi_i}))\right)\Delta x_i$$

Тогда криволинейный интеграл второго рода сведется к риманову:

$$\int_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (R)\int_a^b \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right)dx.$$

Пример 34.2. Пусть теперь функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ t \in [\alpha,\beta]$$

где l гладкая кривая.

Разбиваем отрезок: $\alpha = t_0 < ... < t_n = \beta$. $M_i = (x_i, y_i)$. $\Delta x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i)$ и $\Delta y_i = y(t_{i+1}) - y(t_i)$. Выберем промежуточную точку $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}] \Rightarrow \begin{cases} \xi_i = x(\tau_i) \\ \eta_i = y(\tau_i) \end{cases}$

Составляем сумму:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1}\left(P(x(\tau_i), y(\tau_i))\Delta x_i + Q(x(\tau_i), y(\tau_i))\Delta y_i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\left(P(x(\tau_i), y(\tau_i))\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} + Q(x(\tau_i), y(\tau_i))\frac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\right)\Delta t_i = (*)$$

По теореме Лагранжа $\exists \overline{\tau_i}, \hat{\tau}_i \in [t_i, t_{i+1}]$, такие, что

$$(*) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(P(x(\tau_i), y(\tau_i))x'(\overline{\tau_i}) + Q(x(\tau_i), y(\tau_i))y'(\hat{\tau}_i)\right)\Delta t_i$$

При $\lambda \to 0$:

$$\int_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (R)\int_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt$$

35 Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода

Пусть уравнение l задано в параметрическом виде и в качестве параметризации выбрана естественная. Обозначим s — пройденный путь.

$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$

$A = (x(0), y(0)),\ B = (x(L), y(L))$, где L — длина l.

(картинка)

$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = x'(s),\ \sin\alpha = \frac{dy}{ds} = y'(s)$.

Рассмотрим первую компоненту. Сведем интеграл второго рода к риманову, а затем риманов к интегралу первого рода:

$$\int_{(l)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (R)\int_0^L \left(P(x(s),y(s))\underbrace{x'(s)}_{=\cos\alpha} + Q(x(s),y(s))\underbrace{y'(s)}_{\sin\alpha} \right) ds =$$

$$\int_{(l)} \left(P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha\right) ds$$

Замечание 35.1. Аналогично понятие криволинейного интеграла второго рода можно ввести в трехмерном пространстве.

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Если кривая l задана в параметрическом виде:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \qquad t \in [\alpha, \beta] \\ z = z(t) \end{cases}$

$x(t), y(t), z(t)$ — непрерывно дифференцирумы на $[\alpha, \beta]$

$$\int_{(l)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= (R)\int_\alpha^\beta \left(P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t)z(t))z'(t)\right) dt$$

36 Формула Грина

Пусть l — замкнутая кривая. Без потери общности считаем, что l — простая (без самопересечения) кривая. Если контур не простой, то его можно разбить на простые.

Интеграл по замкнутому контуру обозначим $\oint Pdx + Qdy$. Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления движения по прямой, введем понятие стандартного направления.

Пусть l ограничивает область E. Движение по контуру l считаем стандартным, если область E находится слева от направления движения.

Теорема 36.1. *(Грина)*

Пусть E — область, ограниченная простым контуром l. И пусть в E определены и непрерывны функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. И пусть в E существуют непрерывные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$. Тогда справедлива формула:

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy = \iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Доказательство. Без потери общности будем считать, что E имеет вид:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

(картинка)

Рассмотрим $\iint_E \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$:

$$\iint_E \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b (P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)))\,dx =$$
$$= -\int_b^a P(x,y_2(x))dx - \int_a^b P(x,y_1(x))dx = -\oint_{(l)} P(x,y)dx$$

(на 4 шаге мы меняем направление движения на противополжное, чтобы направление движения соответствовало стандартному движению)

Аналогично доказывается, что $\iint_E \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{(l)} Q(x,y)dy$. Вычитаем из второй формулы первую и получаем формулу Грина. Теорема доказана. □

37 Вычисление площадей с помощью двойных и криволинейных интегралов

38 Теорема о равенстве нулю криволинейного интеграла второго рода по произвольному контуру

Теорема 38.1. *$E \subset \mathbb{R}^2$ и в области E определены непрерывные $P(x,y), Q(x,y)$ имеющие непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ в E. Тогда для того, чтобы для любого замкнутого контура L в E выполнялось условие $\oint_{(L)} Pdx + Qdy = 0$ необходимо, а если область E односвязная, то и достаточно, чтобы в области E выполнялось условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.*

Доказательство.

Достаточность:

Пусть $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. L — произвольный замкнутый контур из E, E_1 — область, ограниченная L, E односвязная $\Rightarrow E_1 \subset E$.

$$\oint_{(L)} Pdx + Qdy = (\text{Грин}) = \iint_{E_1} \left(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{=0}\right) dxdy = 0$$

Необходимость:

Пусть $\exists(\overline{x},\overline{y})$ в которой $\frac{\partial Q}{\partial x}|_{(\overline{x},\overline{y})} \neq \frac{\partial P}{\partial y}|_{(\overline{x},\overline{y})}$. Без потери общности считаем, что эта точка внутренняя. Пусть для определенности $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)|_{(\overline{x},\overline{y})} > 0$. Производные непрерывны, и $(\overline{x},\overline{y})$ внутренняя $\Rightarrow \exists\delta > 0$, такая, что:

1) $V_\delta(\overline{x},\overline{y}) \subset E$

2) $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) > 0,\ \forall(x,y) \in V_\delta(\overline{x},\overline{y})$.

То есть если L — граница $V_\delta(\overline{x},\overline{y})$, где $V_\delta(\overline{x},\overline{y})$ — сферическая окрестность, то по формуле Грина

$$\oint_{(L)} Pdx + Qdy = \iint_{V_\delta(\overline{x},\overline{y})} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = (\text{теорема о среднем}) =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)|_{(\hat{x},\hat{y})}}_{>0} \underbrace{\pi\delta^2}_{>0} > 0$$

Значит, нашелся такой контур, по которому интеграл не равен нулю. □

39 Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Теорема 39.1. *Пусть в $E:\ P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывные, и существуют непрерывные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы $\forall A, B \in E$ интеграл не зависел от кривой, соединяющей A, B, необходимо, а если область E односвязна, то и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Доказательство. $A, B \in E$, l_1, l_2 — кривые, соединяющие A и B, при этом $l_1, l_2 \subset E$. Тогда

$$0 = \int_{(Al_1Bl_2A)} Pdx + Qdy = \int_{(Al_1B)} Pdx + Qdy + \int_{(Bl_2A)} Pdx + Qdy =$$

$$\int_{(Al_1B)} Pdx + Qdy - \int_{(Al_2B)} Pdx + Qdy$$

Значит,

$$\int_{(Al_1B)} Pdx + Qdy = \int_{(Al_2B)} Pdx + Qdy$$

То есть если выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то криволинейный интеграл не зависит от пути, соединающего A и B. □

40 Условия того, что подынтегральное выражение в криволинейном интеграле является полным дифференциалом некоторой функции

Теорема 40.1. *Пусть в $E:\ P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывные, и существуют непрерывные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда, для того, чтобы выполнялось $\exists\Phi(x,y):\ d\Phi = Pdx + Qdy$ необходимо, а если E односвязна, то и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.*

Доказательство.

Необходимость:

Пусть $\exists\Phi(x,y)$, такая, что $d\Phi = Pdx + Qdy$. По формуле первого дифференциала $P = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Найдем вторую производную: $\frac{\partial^2\Phi}{dxdy} = \frac{\partial P}{\partial y}$, и $\frac{\partial^2\Phi}{dydx} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. По теореме о равенстве смешанных производных, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Достаточность:

Пусть уже $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ в E, E односвязна. Выберем в качестве $\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ (интеграл криволинейный по кривой, вид которой не требуется по предыдущей теореме). (x_0, y_0) — (дописать). Покажем, что $\Phi(x,y)$ является искомой.

Найдем производную

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x,y)-\Phi(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right) =$$

$$= (*)$$

(рисунок).

$$(*) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} ... + \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} ... - \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} ...\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} P(x,\underbrace{y}_{\text{const}})dx + Q(x,y)\underbrace{dy}_{=0} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = (\text{теорема о среднем } \exists\xi \text{ между } x \text{ и } (x+\Delta x)) =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}P(\xi,y)\Delta x = \lim_{\Delta x\to 0}P(\xi,y) = P(x,y)$$

Аналогично, $\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Q(x,y)$.

Откуда $d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy$. □

Замечание 40.1. Доказательство содержит способ нахождения функции $\Phi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Перепишем ее в простом виде. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то от кривой ничего не зависит. Тогда возьмем в качестве кривой кривую следующего вида: (рисунок). (угол: сначала движемся параллельно Oy, затем параллельно Ox).

Тогда

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy$$

(x_0, y_0) — $\forall$ точки из E. И в этом случае, если требуется найти

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy = (if\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}) = \int_{(AB)} d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$$

41 Вычисление криволинейного интеграла второго рода в случае полного дифференциала под знаком интеграла. Дифференциальное уравнение в полных дифференциалах

Пример 41.1. $\int_{(AB)} ydx + xdy$.

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Для определенности $A = (0,0),\ B = (1,1)$. От вида кривой ничего не зависит, значит, возьмем конкретную кривую:

1 способ: $y = x$. Кривая задана в явном виде:

$\int_0^1 xdx + xdy = 2xdx = x^2|_0^1 = 1$.

2 способ: Пройдем по параболе:

$\int_0^1 (x^2 + 2x^2)dx = \int_0^1 3x^2 dx = x^3|_0^1 = 1$.

3 способ: $\forall (x_0, y_0) = (5, 10)$ — любая точка.

$\Phi(x,y) = \int_5^x ydx + \int_{10}^y \underbrace{x_0}_{5} dy = yx|_5^x + 5y|_{10}^y = (yx - 5y) + (5y - 50) = yx - 50.$

$\int_{(AB)} d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A) = (yx - 50)|_{(1,1)} - (yx - 50)|_{(0,0)} = (1 - 50) - (0 - 50) = 1.$

Замечание 41.1. Пусть задано дифференциальное уравнение следующего вида: $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$. (или, что тоже самое, $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$). Если выполняются условия, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ то такое уравнение называется уравнением полных дифференциалов. Тогда $\exists \Phi:\ d\Phi = Pdx + Qdy = 0$, следовательно, решение уравнения $\Phi(x,y) = C$.

Замечание 41.2. (физический смысл доказанных теорем)

$\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$. Если $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ то тогда такая сила называется потенциальной. В этом случае работа, совершенная силой, $W = \int_{(AB)} Pdx + Qdy = \Phi(B) - \Phi(A)$. Тогда функция Φ называется потенциалом, а работа не зависит от траектории, по которой тело перемещалось. Примеры таких сил: сила притяжения, сила кулона. Не потенциальные силы — силы сопротивления.

42 Условия потенциальности для криволинейного интеграла по пространственному контуру. Случай неодносвязной области

Замечание 42.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^3$, E — односвязная. Пусть в этой области существуют непрерывные функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, у которых существуют непрерывные частные производные в E. Тогда следующие условия эквивалентны друг другу:

1) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$.

2) $\oint_{(L)} Pdx + Qdy + Rdz = 0\ \forall$ замкнутого L из E.

3) $\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от кривой, соединяющей $A, B \in E$.

4) $\exists \Phi(x,y,z):\ d\Phi = Pdx + Qdy + Rdz$.

Доказательство следует из формулы Стокса:

Если эти условия выполняются, то

$$\Phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz$$

где (x_0, y_0, z_0) — любая точка из E.

Следовательно, мы можем вычислить

$$\int_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(AB)} d\Phi = \Phi(B) - \Phi(A)$$

43 Выражение площади в криволинейных интегралах

Пример 43.1. Полярные координаты:

$\begin{cases} x = \xi \cos \eta \\ y = \xi \sin \eta \end{cases}$

ξ — полярный радиус, η — полярный угол.

(рисунок 2 штуки)

(текст тоже какой-то)

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \cos \eta & \sin \eta \\ -\xi \sin \eta & \xi \cos \eta \end{vmatrix} = \xi$$

Если ξ равно нулю, то однозначность теряется.

Если мы возьмем область Δ : $\begin{cases} 0 \le \xi \le \xi_2 \\ 0 \le \eta \le 2\pi \end{cases}$

Эта область не очень хорошая, так как точка $(0,0)$ не дает односвязности.

Тогда мы преобразуем нашу область к виду:

$\Delta_P : \begin{cases} 0 < \xi_1 \le \xi \le \xi_2 \\ 0 \le \eta \le \eta_2 < 2\pi \end{cases}$

Если перейти к пределу: $\begin{cases} \xi_1 \to 0 \\ \eta_2 \to 2\pi \end{cases}$, $\begin{cases} \Delta_1 \to \Delta \\ E_1 \to E \end{cases}$

При этом $\Delta_1 \leftrightarrow E_1$, но $\Delta \not\leftrightarrow E$.

Поэтому, теоремы сформулированные далее для биекций, можно применять и для не биекций, к примеру, в полярных координатах.

Вспомним, что Λ — контур Δ, l — контур E.

$$\Lambda : \begin{cases} \xi = \xi(t) \\ \eta = \eta(t) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$$

$$l : \begin{cases} x = x(t) = x(\xi(t), \eta(t)) \\ y = y(t) = y(\xi(x), \eta(t)) \end{cases}, t \in [t_1, t_2]$$

Пусть в Δ у функций x, y существуют непрерывные частные производные второго порядка.

Найдем $S(E)$ — площадь E и $S(\Delta)$, понятно, что это.

$$S(E) = \iint_E dxdy = \oint_{(l)} xdy = (R)\int_{t_1}^{t_2} x(t)dy(t) =$$
$$= (R)\int_{t_1}^{t_2} x(\xi(t),\eta(t))\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial\eta}\eta'(t)\right)dt = \int_{(\Lambda)} x(\xi,\eta)\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta\right) = (1)$$
$$= \pm\iint_\Delta \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(x\frac{\partial y}{\partial\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial\eta}\left(x\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]d\xi d\eta = \pm\iint_\Delta\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta} + x\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi} - x\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}\right]d\xi d\eta =$$
$$= \pm\iint_\Delta \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix} = (2) = \pm\iint_\Delta \frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}d\xi d\eta$$

(1) выбор знака ± зависит от того, сохранится ли по контуру Λ стандартное направление движения или нет. В следующем выражении мы применяем формулу Грина.

(2) поскольку мы вычисляем площадь и якобиан не обращается в ноль, то формулу нужно взять с плюсом, если он положительный, и с минусом, если он отрицательный.

44 Замена переменных в двойном интеграле

Теорема 44.1. *Замена переменных в двойном интеграле*

Пусть $f(x,y)$ определена и интегрируема по Риману в $E \subset \mathbb{R}^2$. Пусть задано отображение $\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases}$ где $\xi,\eta \in \Delta$, $\Delta \leftrightarrow E$. И пусть $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ имеют непрерывные частные производные в Δ. Тогда справедлива следующая формула:

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\cdot\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|d\xi d\eta \qquad (*)$$

Доказательство. Функция интегрируема, значит, интегралы существуют. Сумма Римана для левого интеграла: $E = \cup E_i$, E_i простые, связные, не пересекающиеся, ΔS_i — площадь E_i, $\lambda = \max E_i$ — ранг дробления. $\forall (x_i, y_i) \in E_i$:

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta S_i$$

То же для второго интеграла:

$\Delta = \cup\Delta_i$, $S(\Delta_i)$ — площадь Δ_i, $\forall(\xi_i,\eta_i) \in \Delta_i$:

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^n f(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right||_{(\xi_i,\eta_i)}\cdot S(\Delta_i)$$

По условию теоремы интегралы существуют, а значит, точки дробления можно выбирать любые.

Согласовываем дробления областей друг с другом:

$E \leftrightarrow \Delta \Leftrightarrow E_i \leftrightarrow \Delta_i,\ i = \overline{1,n}$

По доказанной ранее теореме (из 43 билета),

$$\Delta E_i = \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right||_{(\overline{\xi_i},\overline{\eta_i})}S(\Delta_i)$$

Положим $\xi_i = \overline{\xi_i}$, $\eta_i = \overline{\eta_i}$, и зададим $x_i = x(\overline{\xi_i},\overline{\eta_i})$, $y_i = y(\overline{\xi_i},\overline{\eta_i}) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ при $\lambda \to 0$. □

45 Площадь криволинейной поверхности

S — поверхность в $\mathbb{R}^3$.

Пример 45.1. Поверхность задана в явном виде: $S:\ z = f(x,y),\ (x,y) \in D$. $\exists$ непрерывные $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ в D.

Разобьем область D на n произвольных, простых, связных, непересекающихся кусочков D_i. Данному дроблению D соответствует дробление поверхности $S = \cup S_i$. Заменим S_i на касательные плоскости к ним: $\forall (\xi_i \eta_i) \in D_i\ \theta_i = f(\xi_i, \eta_i)$.

$M_i = (\xi_i, \eta_i, \theta_i) \in S_i$ — некоторая точка. $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — нормаль к S. Проведем касательную плоскость к поверхности S_i в точке M_i. T_i — часть касательной плоскости в криволинейном брусе с основанием D_i. ΔD_i — площадь D_i. ΔS_i — площадь S_i. ΔT_i — площадь T_i.

Если ранг дробления мал, то $\Delta S_i \approx \Delta T_i$. Несложно доказать, что $\Delta S_i \approx \Delta T_i = \frac{\Delta D_i}{|\cos\nu||_{M_i}}$, где ν — угол между нормалью и осью z.

Модуль взят, поскольку у поверхности две нормали, а площадь должна оказаться положительной.

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\cos\nu||_{M_i}} \Delta D_i}_{\text{сумма Римана}}$$

Если ранг дробления устремить к нулю, то сумма Римана превращается в интеграл и погрешность исчезнет:

$$\Delta S = \iint_D \frac{1}{|\cos\nu|} dxdy$$

Пока этой формулой пользоваться неудобно, так как непонятно, что такое ν. Однако ранее доказано (в 29 билете, геометрические приложения), что

$\cos\lambda = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\mu = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\nu = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

где $A = -\frac{\partial f}{\partial x},\ B = \frac{\partial f}{\partial y},\ C = 1$.

Теперь получили хорошую формулу:

$$\Delta S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

2) Пусть поверхность S задана в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases} \quad \text{и } \varphi, \psi, \chi \text{ имеют непрерывные частные производные в } \Delta.$$

Переход от обычного интеграла к другим координатам:

$$\Delta S = \iint_D \frac{1}{|\cos\nu|} dxdy = \left[\begin{array}{c} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{array}\right] = \iint_\Delta \frac{1}{|\cos v|} \cdot \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv = (*)$$

Ранее (дописать где) было показано, что $A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$. Подставим:

$$(*) = \iint_\Delta \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|} |C| dudv = \iint_\Delta \sqrt{A^2+B^2+C^2} dudv$$

В результате получили формулу:

$$S = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv$$

Замечание 45.1. $E = \varphi_u'^2 + \psi_u'^2 + \chi_u'^2$, $G = \varphi_v'^2 + \psi_v'^2 + \chi_v'^2$, $F = \varphi'_u\varphi'_v + \psi'_u\psi'_v + \chi'_u\chi'_v$ — гауссовы коэффициенты.

$$\Delta S = \iint_{\Delta} \sqrt{EG - F^2} dvdu$$

46 Поверхностный интеграл первого рода. Сведение к Риманову интегралу

Пусть S — поверхность в $\mathbb{R}^3$. В каждой точке этой поверхности задана функция $f(x, y, z)$, определенная на S.

ΔS — площадь S, $\Delta S < +\infty$, $f(x, y, z)$ ограничена на S. Разобьем $S = \cup_{i=1}^n S_i$, S_i — простые, связные, непересекающиеся. ΔS_i — площадь S_i. $\lambda = \max \Delta S_i$ — ранг дробления. $\forall (\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

Определение 46.1. Если $\exists$ конечный $\lim_{\lambda \to 0} \sigma$ и он не зависит от способа дробления и выбора точек, то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности S. Обозначение: $\iint_{(S)} f(x, y, z) dS$.

Справедливы стандартные свойства интеграла. В частности, $\iint_{(S)} dS = \Delta S$.

Замечание 46.1. Поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности.

Пример 46.1. Явное задание поверхности

$S: \; z = z(x, y)$, где $(x, y) \in D$. Пусть $\exists$ непрерывные $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ в D. $D = \cup_{i=1}^n D_i$, D_i — простые, связные, непересекающиеся. Этому дроблению области D соответствует дробление поверхности $S = \cup_{i=1}^n S_i$.

$\Delta S_i, \Delta D_i$ — площади соответствующих кусочков. Зададим произвольные $\xi_i, \eta_i \in D_i$, $\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$.

$(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S$.

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta(\xi_i, \eta_i)) \iint_{D_i} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy =$$

$$= (\text{теорема о среднем}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i})\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}(\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i})\right)^2} \Delta D_i$$

Устремляя ранг дробления к нулю, получаем следующую формулу:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = (R) \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

Пример 46.2. Поверхность в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \quad u,v \in \Delta \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

Существуют непрерывные частные производные φ, ψ, χ в Δ. Аналогично можно показать, что

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dS = (R)\iint_{\Delta} f(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

47 Поверхностный интеграл второго рода. Сведение к Риманову интегралу

S — поверхность в $\mathbb{R}^3$. $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ — определена на S. Считаем, что в каждой точке поверхности задан вектор. Обозначим за D_x, D_y, D_z проекции поверхности S на координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy соответственно.

$S = \cup_{i=1}^{n} S_i$, S_i —простые, связные, не пересекающиеся. $D_{x_i}, D_{y_i}, D_{z_i}$ — проекции S_i на Oyz, Oxz, Oxy. Пусть ΔS_i — площадь S_i, а $\Delta D_{x_i}, \Delta D_{y_i}, \Delta D_{z_i}$ — площади $D_{x_i}, D_{y_i}, D_{z_i}$. $\lambda = \max_{i=\overline{1,n}} \Delta S_i$ — ранг дробления. Возьмем произвольную $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in S_i$.

$$\sigma = \pm\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{x_i} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{y_i} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta D_{z_i}\right)$$

Знак $+/-$ зависит от выбора стороны поверхности.

Определение 47.1. Если существует конечный предел $\lim_{\lambda\to 0}\sigma$, то он называется поверхностным интегралом второго рода функции F по поверхности S.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

Замечание 47.1. Из определения следует, что интеграл второго рода зависит от выбора стороны поверхности

Замечание 47.2. Пусть $z = \mathrm{const}$ и $(x,y) \in D$. Тогда интеграл $\iint_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = R\iint_D R(x,y,z)dxdy$. То есть поверхностный интеграл второго рода — обобщение двойного риманова интеграла.

Пример 47.1. Явное задание:

$S:\ z = z(x,y)$, где $(x,y) \in D_z$. Тогда $\iint_{(S)} R(x,y,z)dxdy = (R)\iint_{D_z} R(x,y,z(x,y))dxdy$

Аналогично для:

$S:\ y = y(x,z)$, где $(x,z) \in D_y$. Тогда $\iint_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = (R)\iint_{D_y} Q(x,y(x,z),z)dxdz$

И для:

$S:\ x = x(y,z)$, где $(y,z) \in D_x$. Тогда $\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz = (R)\iint_{D_x} P(x(y,z),y,z)dydz$.

Складываем три формулы и получаем сведение поверхностного интеграла второго рода к риманову:

$$\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_{D_x} P(x(y,z),y,z)dydz + \iint_{D_y} Q(x,y(x,z),z)dxdz + \iint_{D_z} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

Данный способ вычисления интеграла плохой, так как в этом случае нужно записать в явном виде уравнение поверхности относительно и x, и y, и z.

Пример 47.2. Второй способ заключается в сведении поверхностного интеграла второго рода к поверхностному интегралу первого рода.

$\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичная нормаль, $\cos\lambda = \frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\mu = \frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\nu = \frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Пусть поверхность S задана в виде:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \quad (u,v) \in \Delta \\ z = \chi(u,v) \end{cases}$$

$A = \frac{D(y,z)}{D(u,v)},\ B = \frac{D(z,x)}{D(u,v)},\ C = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

$\Delta S_i \approx \frac{\Delta D_{z_i}}{\cos\nu} \approx \frac{\Delta D_{x_i}}{\cos\lambda} \approx \frac{\Delta D_{y_i}}{\cos\mu}$ (смотри ранее)

Тогда $\underbrace{\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz}_{\text{второго рода}} = \underbrace{\iint_{(S)} P(x,y,z)\cos\lambda dS}_{\text{первого рода}}$

Аналогично для двух других компонент:

$\iint_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = \iint_{(S)} Q(x,y,z)\cos\mu dS$

$\iint_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \iint_{(S)} R(x,y,z)\cos\nu dS$, сложив, получим

$$\iint_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy =$$
$$= \iint_{(S)} R(x,y,z)\cos\nu dS + \iint_{(S)} Q(x,y,z)\cos\mu dS + \iint_{(S)} P(x,y,z)\cos\lambda dS = (*)$$

Сводим это к интегралу первого рода:

$$(*) = (R)\iint_{\Delta} (P(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\pm A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} +$$
$$+ Q(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\pm B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} +$$
$$+ R(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))\frac{\pm C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}) \cdot \sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv =$$
$$= \pm(R)\iint_{\Delta} (PA + QB + RC)dudv$$

48 Формула Стокса

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — поверхность, l — граница S. И пусть $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ определена на S, при этом P, Q, R непрерывны на S и имеют непрерывные частные производные.

Зададим $S: \begin{cases} \varphi(u,v) = x \\ \psi(u,v) = y \quad (u,v) \in \Delta, \ \lambda \text{ — граница } \Delta. \\ \chi(u,v) = z \end{cases}$

$\Delta \leftrightarrow S, \ \lambda \leftrightarrow l, \ \varphi, \psi, \chi$ непрерывны на Δ и имеют непрерывные частные производные до второго порядка в Δ.

$$\lambda: \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}, t \in [t_1, t_2] \Rightarrow l: \begin{cases} x = x(t) = \varphi(u(t), v(t)) \\ y = y(t) = \psi(u(t), v(t)) \\ z = z(t) = \chi(u(t), v(t)) \end{cases}, \ t \in [t_1, t_2]$$

$$\oint_{(l)} P(x,y,z)dx = (R)\int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)dt =$$

$$= (R)\int_{t_!}^{t_2} P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t)), z(u(t),v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{u'(t)} + \frac{\partial x}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{v'(t)} \right) dt =$$

$$= \oint_{(\lambda)} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) = \oint_{(\lambda)} \left(P\frac{\partial x}{\partial u} du + P\frac{\partial x}{\partial v} dv \right) =$$

$$= (\text{формула Грина}) = \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P\frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P\frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right] dudv = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \right] dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right) \right] dudv =$$

$$= \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \underbrace{\frac{D(z,x)}{D(u,v)}}_{=B} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{D(x,y)}{D(u,v)}}_{=C} \right) dudv = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dxdz - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

В результате получили, что

$$\oint_{(l)} P(x,y,z)dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dxdz - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

Аналогично

$$\oint_{(l)} Q(x,y,z)dx = \iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z} dydz$$

$$\oint_{(l)} R(x,y,z)dx = \iint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dxdz$$

Отсюда следует формула Стокса:

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz +$$
$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Замечание 48.1. Запись через поверхностный интеграл первого рода:

$\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичная нормаль.

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\nu\right] dS =$$

$$= \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

49 Тройной интеграл

Пусть $f(x, y, z)$ — определена и ограничена в $E \subset \mathbb{R}^3$, E ограничено, просто и связно. $E = \cup E_i$; ΔV_i — объем E_i. $\lambda = \max \Delta V_i$ — ранг дробления.

$\forall(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in E_i$ существует

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$$

— сумма Римана.

Определение 49.1. Если $\exists$ конечный предел

$$\lim_{\lambda\to 0} \sigma = \iiint_E f(x, y, z)dV$$

и он не зависит от выбора точек и способа дробления, то он называется тройным интегралом от f по E.

Для тройного интеграла справедливы стандартные свойства интегралов.

Замечание 49.1. $\exists$ тройной интеграл $\Rightarrow \lim_{\lambda\to 0}\sigma$ не зависит от дробления. Тогда разрежем E плоскостями, параллельными координатным плоскостям. При $\lambda \to 0$ можно считать, что E_i — параллелепипед, следовательно, $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$. При $\lambda \to 0$ $dV = dxdydz \Rightarrow$ можно писать интеграл следующим образом: $\iiint_E f(x, y, z)dxdydz$.

Пример 49.1. E : $\begin{cases} z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y) \\ (x, y) \in D \end{cases}$, где D — проекция тела на Oxy, а z_1, z_2 —функции, ограничивающие тело.

Нетрудно показать, что

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz\right) dxdy = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

Для D : $\begin{cases} a \le x < b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$

$$\iiint_E f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

Можно фиксировать x, y, z в другом порядке. Всего 6 вариантов.

50 Формула Остроградского-Гаусса

Пусть в трехмерном пространстве задано некоторое тело E и S — поверхность, ограничивающая E. Если поверхность замкнута (то есть ограничивает некоторое тело), то под ее стандартной стороной понимается внешняя сторона.

Пусть в E определена $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, и у P, Q, R есть непрерывные частные производные в E. Обозначим за D проекцию тела E на плоскость Oxy. $E : \begin{cases} (x,y) \in D \\ z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y) \end{cases}$. Обозначим $S_1 : \; z = z_1(x,y)$ — нижняя граница E и $S_2 : \; z = z_2(x,y)$ — верхняя граница E. Тогда $S = S_1 \cup S_2$. Теперь вычислим тройной интеграл:

$$\iiint_E \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz =$$

$$= \iint_D \left(R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))\right) dxdy =$$

$$= \iint_D R(x,y,z_2(x,y)) dxdy - \iint_D R(x,y,z_1(x,y)) dxdy = (\text{сводим к поверхностным}) =$$

$$= \iint_{(S_2)} R(x,y,z) dxdy + \iint_{(S_1)} R(x,y,z) dxdy (^*) = \oiint_{(S)} R(x,y,z) dxdy$$

$(*)$ — сменена нормаль на противоположную при переходе от двойного интеграла к поверхностному.

Аналогично доказывается, что $\iiint_E \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \oiint_{(S)} Q(x,y,z) dxdz$ и $\iiint_E \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \oiint_{(S)} P(x,y,z) dydz$.

Сложив эти формулы, получаем:

$$\iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint_{(S)} P(x,y,z) dydz + Q(x,y,z) dxdz + R(x,y,z) dxdy$$

Если поверхностный интеграл второго рода свести к поверхностному интегралу первого рода, то формула Остроградского-Гаусса примет вид:

$$\iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oiint_{(S)} \left(P \cos\lambda + Q \cos\mu + R \cos\nu \right) dS$$

где $\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичная нормаль.

51 Скалярное поле: поверхности уровня, производная по направлению, градиент

Определение 51.1. Пусть $E \subset \mathbb{R}^3$ и пусть в каждой точке $(x,y,z) \in E$ определена скалярная функция $v(x,y,z)$. Тогда говорят, что в области E задано скалярное поле v.

Определение 51.2. $v(x,y,z) = \text{const}$ — поверхность уровня (эквипотенциальная поверхность). Если поверхности уровня представляют собой плоскости, параллельные друг другу, то v называется плоским полем.

Пусть задано некоторое направление $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, где $\begin{matrix} \alpha = \angle(\vec{l}, Ox) \\ \beta = \angle(\vec{l}, Oy) \\ \gamma = \angle(\vec{l}, Oz) \end{matrix}$.

Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma$$

— производная функции v по направлению $\vec{l}$.

Определение 51.3. $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ — оператор Гамильтона.

$\vec{\nabla} v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}\right)$ — градиент, направление возрастания поля.

52 Векторное поле: векторные линии, поток векторного поля через поверхность, дивергенция

Определение 52.1. $E \subset \mathbb{R}^3$ задан вектор $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Тогда говорят, что задано векторное поле.

Определение 52.2. Линия, в каждой точке которой касательная направлена вдоль вектора $\vec{F}$ называется векторной или силовой линией.

Определение 52.3. L — замкнутый контур. Проведем через каждую его точку силовую линию. Получаем поверхность, образованную силовыми линиями. Эта поверхность называется векторной трубкой.

Определение 52.4. Векторное поле $\vec{F}$ называется плоским, если все вектора распологаются в плоскостях, параллельных друг другу и в каждой из таких плоскостей поле одно и то же.

Обозначим:
S — поверхность.
$\vec{F}$ — векторное поле.
$\vec{n} = (\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ — единичная нормаль к S.
F_n — длина проекции $\vec{F}$ на нормаль.

Определение 52.5. Поверхностный интеграл вида $\iint_{(S)} F_n dS$ называется потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S в направлении $\vec{n}$. Также его можно переписать в виде $\iint_{(S)}(P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)dS = \iint_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$.

ЕслиS — замкнутая поверхность, ограничивающая область $E \subset \mathbb{R}^3$, то поток представлен $\oiint_{(S)} F_n dS = \iiint_E \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$.

Определение 52.6. Дивергенция векторного поля: $\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\vec{\nabla}, \vec{F})$, где $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$.

Физически дивергенция характеризует наличие источников или поглотителей поля в заданной области.

Можно доказать, что дивергенция не зависит от выбора системы координат, это скалярная характеристика поля.

53 Циркуляция поля. Ротор

Определение 53.1. Криволинейный интеграл второго рода $\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz = \int_{(l)} \left(\vec{F}, \vec{dr}\right)$ — линейный интеграл $\vec{F}$ вдоль l ($\vec{dr} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$).

Если $\vec{F}$ — силовое поле, то этот интеграл характеризует работу, совершенную силой.

Определение 53.2. Пусть l — замкнутый контур, S — поверхность, ограниченная l. Тогда

$$\oint_{(l)} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(S)} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \iint_{(S)} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\nu\right] dS =$$

$$= \iint_{(S)} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

— формула Стокса.

Определение 53.3. $\oint Pdx + Qdy + Rdz$ — циркуляция $\vec{F}$ вдоль l.

Определение 53.4. Ротор или вихрь $\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$. Ротор характеризует степень завихрения поля, то есть наличия у поля вращательной компоненты, турбулентность. Ротор — векторная характеристика поля, не зависящая от выбора системы координат.

Формула Стокса отсюда:

$$\oint_{(l)} (\vec{F}, \vec{dr}) = \iint_{(S)} (\operatorname{rot}\vec{F}, \vec{n}) dS = \iint_{(S)} \operatorname{rot}_n \vec{F} dS$$

Отметим несколько свойств ротора и дивергенции:
1) $\operatorname{rot}(\vec{\nabla} U) = 0$, где U — любое скалярное поле.
2) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$.

54 Потенциальные и соленоидальные поля. Уравнения Лапласа и Пуассона

Определение 54.1. Векторное поле F называется потенциальным, если $\exists$ скалярное поле $\Phi(x, y, z)$: $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$.

Теорема 54.1. *Пусть в односвязной области* $E \subset \mathbb{R}^3$ *задано векторное* $\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, P, Q, R *— непрерывны и существуют их непрерывные частные производные. Тогда следующие условия являются эквивалентными друг другу:*

1) $\vec{F}$ *— потенциальное (*$\exists\Phi$ *— потенциал:* $\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$*)*
2) $\operatorname{rot}\vec{F} = 0$ *(*$\vec{F}$ *— безвихревое).*
3) $\forall M_1, M_2 \in E$ $\int(\vec{F}, \vec{dr}) = \Phi(M_2) - \Phi(M_1)$ *— не зависит от вида кривой.*
4) $\oint_{(l)}(\vec{F}, \vec{dr}) = 0$.

Доказательство. следует из формулы Стокса. ☐

Определение 54.2. Векторное поле $\vec{F}$ называется соленоидальным, если $\exists$ векторное поле $\vec{B}: \ \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{B}$, где $\vec{B}$ — векторный потенциал поля $\vec{F}$.

Теорема 54.2. *Пусть в односвязной области $E \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, P, Q, R — непрерывны и существуют их непрерывные частные производные. Тогда следующие условия являются эквивалентными друг другу:*

1) $\vec{F}$ — соленоидальное ($\exists \vec{B}$: $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{B}$)

2) $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ (в E нет источников поля).

3) Пусть l — произвольный замкнутый контур, а S_1, S_2 — сечения векторной трубки, проходящей через l. Тогда $\iint_{(S_1)} F_n dS = \iint_{(S_2)} F_n dS$.

4) $\forall$ замкнутой поверхности S выполняется $\oiint_{(l)} F_n dS = 0$.

Доказательство. следует из формулы Остроградского-Гаусса. ☐

Теорема 54.3. *(о каноническом разложении силовых полей)*

Пусть $\vec{F} = (P, Q, R)$ задан в односвязной $E \subset \mathbb{R}^3$, P, Q, R непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Тогда $\exists \vec{F_1}$ — потенциальное и $\exists \vec{F_2}$ — соленоидальное, такие, что $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

Доказательство. Хорошая теорема. Доказывать мы ее, конечно, не будем, так как не умеем решать диффуры. Но наметим доказательство:

$\vec{F} = \vec{\nabla}\Phi$, где Φ — скалярное поле.

$\vec{F_2} = \vec{F} - \vec{F_1} = \vec{F} - \vec{\nabla}\Phi$.

$0 = \operatorname{div} \vec{F_2} = \operatorname{div}(\vec{F} - \vec{\nabla}\Phi) = \operatorname{div} \vec{F} - \operatorname{div}(\vec{\nabla}\Phi)$

откуда $\operatorname{div}(\vec{\nabla}\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi$, где $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Отсюда получаем уравнение $\Delta\Phi = \operatorname{div} \vec{F}$ — дифференциальное уравнение в частных производных. ☐

Определение 54.3. $\Delta\Phi = 0$ — уравнение Лапласа, где Φ — скалярное поле. Оно называется гармоническим (лапласовым) полем.

Более общее уравнение $\Delta\Phi = f(x,y,z)$ — уравнение Пуассона.

55 Равномерная сходимость функций нескольких переменных. Свойства

Пусть $f(x,y)$, где $x \in X, y \in Y$.

Определение 55.1. Функция $f(x,y)$ равномерно сходится к $\varphi(x)$ на X при $y \to y_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall y \in Y: \ |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$.

Запись: $f(x,y) \rightrightarrows^{x \in X}_{y \to y_0} \varphi(x)$.

Свойства:

1) Критерий Коши: Чтобы $f(x,y)$ равномерно (по $x \in X$) ограничено сходилась к некоторой функции при $y \to y_0$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \ \forall y_1, y_2 \in Y: \ \begin{cases} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon \ \forall x \in X$.

2) Предел по Гейне: $f(x,y) \rightrightarrows^{x \in X}_{y \to y_0} \varphi(x) \Leftrightarrow \forall \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in Y: \ y_n \to_{n \to \infty} y_0 \Rightarrow f(x,y_n) \rightrightarrows^{x \in X}_{n \to \infty} \varphi(x)$. Понятие равномерной сходимости функции можно свести к

понятию равномерной сходимости функциональной последовательности и в результате многие теоремы, доказанные ранее для функциональных последовательностей автоматически переносятся на случай функций.

3) Пусть $x \in X = [a, b]$, $y \in Y = [c, d]$. $G = X \times Y$. Пусть $f(x, y)$ — непрерывна и интегрируема на G. $f(x, y) \rightrightarrows_{y \to y_0}^{x \in [a,b]} \varphi(x)$, $y_0 \in [c, d]$. Тогда $\varphi(x)$ непрерывна (интегрируема) на $[a, b]$.

4) Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Пусть $f(x, y) \to_{y \to y_0} \varphi(x)$, $f(x, y) \to_{x \to x_0} \psi(y)$. И пусть хотя бы одна из этих двух сходимостей является равномерной. Тогда $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$.

Лемма 55.1. *Пусть $x \in X = [a, b]$, $y \in Y = [c, d]$ (функция задана на прямоугольнике $G = X \times Y$). Пусть $f(x, y)$ — непрерывна на G. Тогда $\forall y_0 \in Y \Rightarrow f(x, y) \rightrightarrows_{y \to y_0}^{x \in [a,b]} f(x, y_0)$*

Замечание: лемма останется справедливой, если G — замкнутое ограниченное множество.

Доказательство. $f(x, y)$ непрерывна на G, G замкнуто и ограничено, тогда по теореме Кантора $f(x, y)$ — равномерно непрерывна на G. Определение равномерной непрерывности для многомерного случая: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G \ \begin{cases} |x_1 - x_2| < \delta \\ |y_1 - y_2| < \delta \end{cases} \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$.

Тогда $\forall y_0 \in [c, d], \forall y \in [c, d], \forall x \in [a, b]$. Положим $x_1 = x_2 = x$, $y_1 = y, y_2 = y_0$. Тогда дописать. □

56 Теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра. Частный и общий случай

Определение 56.1. Пусть $f(x, y)$ определена и ограничена при $x \in [a, b], y \in [c, d]$ и $G = [a, b] \times [c, d]$. Пусть при любом фиксированном $y \in [c, d]$ $f(x, y)$ является интегрируемой по x на отрезке $[a, b]$, то есть существует

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

— интеграл, зависящий от параметра. В качестве параметра выступает y.

Теорема 56.1. *(частный случай)*

Пусть $f(x, y)$ непрерывна на G. Тогда $J(y)$ — непрерывна на $[c, d]$.

Доказательство. $\forall y_0 \in [c, d]$.

$$|J(y_0 + \Delta y) - J(y_0)| = \left| \int_a^b f(x, y_0 + \Delta y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| \leq$$
$$\leq \int_a^b |f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)| \, dx \leq (*) \leq \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a)$$

$(*)$Так как наша функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на G (по теореме Кантора), то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall x \in [a, b], \ \forall \Delta y : \ |\Delta y| < \delta \Rightarrow |f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$.

В результате получаем определение непрерывности. $J(y)$ непрерывна. □

Определение 56.2. $J(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx$, $y\in[c,d]$, то есть границы J зависят от параметра.

Теорема 56.2. *(общий случай)*

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на G, $a(y),b(y)$ непрерывна на $[c,d]$. Тогда $J(y)$ — непрерывна на $[c,d]$.

Доказательство. (точнее, его идея). $\forall y_0\in[c,d]$

$$\begin{aligned}|J(y_0+\Delta y)-J(y_0)| &= \left|\int_{a(y_0+\Delta y)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)dx-\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx\right| = \\ &= |\int_{a(y_0+\Delta y)}^{a(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)dx+\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0+\Delta y)dx+ \\ &\quad +\int_{b(y_0)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)dx-\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)dx| \le \\ &\le \left|\int_{a(y_0+\Delta y)}^{a(y_0)} f(xy_0+\Delta y)dx\right|+\left|\int_{b(y_0)}^{b(y_0+\Delta y)} f(x,y_0+\Delta y)dx\right|+ \\ &\quad +\left|\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} \left(f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)\right)dx\right|\end{aligned}$$

Первые два слагаемых стремятся к нулю из непрерывности $a(y),b(y)$, а третье в силу непрерывности функции f. Будем считать, что доказано. □

57 Теорема о предельном переходе для интеграла, зависящего от параметра. Теорема об интегральном переходе. Частный и общий случай

Теорема 57.1. *(предельный переход - частный случай)*

$f(x,y)\rightrightarrows_{y\to y_0}^{x\in[a,b]}\varphi(x),\ y_0\in[c,d]$. *Тогда* $\lim_{y\to y_0} J(y)=\int_a^b\varphi(x)dx$.

Доказательство. $f(x,y)\rightrightarrows_{y\to y_0}^{x\in[a,b]}\varphi(x)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\ \forall y\in[c,d]:\ |y-y_0|<\delta\Rightarrow|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b]$.

$$\begin{aligned}\left|J(y)-\int_a^b\varphi(x)dx\right| = \left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b\varphi(x)dx\right| \le \\ \le\int_a^b|f(x,y)-\varphi(x)|\,dx<\int_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim_{y\to y_0}J(y)=\int_a^b\varphi(x)dx$. □

Теорема 57.2. *(интегральный переход - частный случай)*

$f(x,y)$ непрерывна на G. Тогда

$$\int_c^d J(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\iint_G f(x,y)dxdy$$

Доказательство. Очевидно из свойств двойного интеграла. $\square$

Теорема 57.3. *(предельный переход — общий случай)*

$f(x,y) \rightrightarrows_{y\to y_0}^{x\in X} \varphi(x)$. Также $a(y) \to_{y\to y_0} \hat{a}, b(y) \to_{y\to y_0} \hat{b}$, Тогда $\lim_{y\to y_0} J(y) = \int_{\hat{a}}^{\hat{b}} \varphi(x)dx$.

Доказательство. Аналогично частному случаю. $\square$

Теорема 57.4. *(интегральный переход — общий случай)*

$f(x,y)$ непрерывна на G, $a(y), b(y)$ — непрерывны на $[c,d]$. Тогда

$$\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dy \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx = \iint_G f(x,y)dxdy$$

Доказательство. Ну вы поняли. Следует из определния двойного интеграла. $\square$

58 Производная интеграла, зависящего от параметра (Правило Лейбница). Частный и общий случай

Теорема 58.1. *(о дифференциальном переходе — правило Лейбница)*

$f(x,y)$ — непрерывна на G. и $\exists$ непрерывная $\frac{\partial f}{\partial y}$ на G. Тогда $J'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx$.

Доказательство.

$$J'(y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{J(y+\Delta y) - J(y)}{\Delta y} =$$

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^b f(x,y+\Delta y)dx - \int_a^b f(x,y)dx\right) =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\int_a^b (f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \int_a^b \frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} =$$

$$= (\frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} \to_{\Delta y\to 0} \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \text{(из леммы)}$$

$$\frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} \rightrightarrows_{\Delta y\to 0}^{x\in[a,b]} \frac{\partial f}{\partial y}) = \text{(теорема о предельном переходе)}$$

$$= \int_a^b \lim_{\Delta y\to 0} \int_a^b \frac{(f(x,y+\Delta y)dx - f(x,y)dx)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}dx$$

$\square$

Теорема 58.2. *(обобщенное правило Лейбница)*

$f(x,y)$ — непрерывна на G. и $\exists$ непрерывная $\frac{\partial f}{\partial y}$ на G, $a(y), b(y)$ непрерывно дифференцируемы на $[c,d]$. Тогда

$$J'(y) = \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right)_y' =$$

$$= \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}dx + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y)$$

Доказательство. $\Phi(y,u,v) = \int_u^v f(x,y)dx$. Тогда

$$J(y) = \Phi(y, a(y), b(y))$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции

$$J'(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} a'(y) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} b'(y)$$

Распишем частные производные:
$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \int_u^v \frac{\partial f}{\partial y} dx$ по частному правилу Лейбница.
$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = f(v,y)$ по теореме Барроу.
$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = -f(u,y)$ по теореме Барроу.
$u = a(y), v = b(y)$ и получаем требуемое. □

59 Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признаки Вейерштрасса, Абеля, Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра

Определение 59.1. Пусть $f(x,y)$ определена при $x \geq a,\ y \in [c,d]$, где $c, d \in \widehat{\mathbb{R}}$. Будем считать, что f интегрируема по x на $[a, A]$ при любом $A \geq a$ $\forall y \in [c,d]$.

Тогда функция

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

называется несобственным интегралом первого рода, зависящим от параметра.

Определение 59.2. $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)dx$, где $A \geq a$. Если существует конечный $\lim_{A\to+\infty} F(A,y)$ при любом $y \in [c,d]$, то тогда интеграл $J(y)$ называется сходящимся $\forall y \in [c,d]$. То есть $\forall \varepsilon > 0, \forall y \in [c,d],\ \exists \overline{A}(\varepsilon, y) > 0 :\ \forall A \geq \overline{A} \Rightarrow \left| \int_{\overline{A}}^{+\infty} f(x,y)dx \right| < \varepsilon$.

Если при этом $\overline{A} = \overline{A}(\varepsilon)$ не зависит от y, то $J(y)$ сходится равномерно на $[c,d]$.

Теорема 59.1. *(критерий равномерной сходимости Коши)*

$J(y)$ — равномерно сходится на $[c,d]$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \overline{A}(\varepsilon) > 0 :\ \forall A_1, A_2 > \overline{A} \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx \right| < \varepsilon\ \forall y \in [c,d]$.

Доказательство. Аналогично одномерному случаю □

Теорема 59.2. *Признак равномерной сходимости Вейерштрасса:*

Пусть $|f(x,y)| \leq \varphi(x),\ \forall x \geq a, \forall y \in [c,d]$. Пусть $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ — сходится, тогда $J(y) = \int_a^\infty f(x,y)dx$ — сходится равномерно на $[c,d]$

Доказательство. Следует из критерия Коши. □

Теорема 59.3. *Признак равномерной сходимости Дирихле.*

Пусть $F(A,y) = \int_a^A f(x,y)dx$ является равномерно ограниченной (ее можно оценить константой, не зависящей ни от A, ни от y) при $A \geq a,\ y \in [c,d]$. Функция $g(x,y)$ монотонна по x при любом $y \in [c,d]$. $g(x,y) \rightrightarrows_{x\to+\infty}^{y\in[c,d]} 0$. Тогда $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ равномерно сходится на $[c,d]$.

Теорема 59.4. *Признак равномерной сходимости Абеля.*

Пусть $\int_a^\infty f(x,y)dx$ *— равномерно сходится по* $y \in [c,d]$. *Функция* $g(x,y)$ *монотонна по* x *при любом* $y \in [c,d]$. $g(x,y)$ *равномерно ограничена при* $x \geq a,\ y \in [c,d]$. *Тогда* $\int_a^\infty f(x,y)g(x,y)dx$ *равномерно сходится на* $[c,d]$.

60 Теорема о предельном переходе для несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 60.1. *(о предельном переходе)*

Пусть $J(y)$ *сходится равномерно на* $[c,d]$. *Пусть* $f(x,y) \rightrightarrows_{y\to y_0}^{x\in[a,A]} \varphi(x),\ \forall A \geq a$. *Тогда* $\lim_{y\to y_0} J(y) = \int_a^\infty \varphi(x)dx$.

Доказательство.

$$\lim_{y\to y_0} J(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x,y)dx = \lim_{y\to y_0}\lim_{A\to\infty} \underbrace{\int_a^A f(x,y)dx}_{=F(A,y)} =$$

$$= \left(\begin{array}{c} F(A,y)\text{сход. равномерно по} \\ y\in[c,d]\text{при } A\to\infty \\ \text{тогда см. свойство из 1 пар.} \end{array} \right) = \lim_{A\to\infty}\lim_{y\to y_0} \int_a^A f(x,y)dx =$$

$$= (\text{по теореме для собственных интегралов (см. предыдущий параграф)} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \int_a^A \varphi(x)dx = \int_a^\infty \varphi(x)dx$$

□

61 Теорема о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра

Теорема 61.1. *(о непрерывности)*

Пусть $f(x,y)$ *является непрерывной при* $x \geq a,\ y \in [c,d]$ *и пусть* $J(y)$ *сходится равномерно на* $[c,d]$. *Тогда* $J(y)$ *непрерывна на* $[c,d]$.

Доказательство. $\forall y_0 \in [c,d]$:

$$\lim_{y\to y_0} J(x,y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^\infty f(x,y)dx = (\text{по теореме о пр. перех.}^*) =$$

$$= \int_a^\infty f(x,y_0)dx = J(y_0)$$

$(^*)$(то, что подынтегральная функция сходится непрерывно, следует из непрерывности и леммы из первого параграфа) □

62 Интегрируемость несобственных интегралов, зависящих от параметра

Теорема 62.1. *(об интегральном переходе)*

Пусть $f(x,y)$ *непрерывна при* $x \geq a,\ y \in [c,d]$ *и пусть* $J(y)$ *сходится равномерно на* $[c,d]$. *Тогда* $\int_c^d J(y)dy = \int_c^d dx \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy$.

Доказательство. $\forall A \geq a$. По теореме об интегральном переходе для собственных интегралов (см. предыдущий параграф):

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Устремим $A \to \infty$.

$$\lim_{A\to\infty} \int_c^d dy \int_a^A f(x,y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x,y)dy$$

По теореме о предельном переходе для собственных интегралов знак предела слева можно запихнуть под знак первого интеграла и получить доказательство. ☐

63 Дифференцируемость несобственных интегров, зависящих от параметра

Теорема 63.1. *(о дифференциальном переходе)*

Пусть $f(x,y)$ *непрерывна при* $x \geq a,\ y \in [c,d]$ *и* $\exists$ *непрерывная* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *при* $x \geq a$, $y \in [c,d]$. *Пусть* $J(y)$ *сходится на* $[c,d]$ *и* $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$ *равномерно сходился на* $[c,d]$. *Тогда* $J'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$

Доказательство. $\forall y_0 \in [c,d]$.

$$J'(y_0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{J(y_0+\Delta y) - J(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^\infty f(x,y_0+\Delta y)dx - \int_a^\infty f(x,y_0)dx\right) =$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0} \int_a^\infty \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}dx = \text{(теорема о предельном переходе)} =$$

$$\int_a^\infty \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y}dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx$$

Обоснуем теперь, почему теорему о предельном переходе можно применить:

$$\frac{f(x,y_0+\Delta y) - f(x,y_0)}{\Delta y} \rightrightarrows^{x\in[a,H]}_{\Delta y\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)$$

по лемме из параграфа 1

Остается доказать, что $\int_a^\infty \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx$ сходится равномерно на $[c,d]$.

По условию $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}dx$ сходится равномерно на $[c,d]$. По критерию сходимости Коши $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \overline{A}(\varepsilon) > 0 :\ \forall A_1, A_2 \geq \overline{A} \Rightarrow \left|\int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f}{\partial y}dx\right| < \varepsilon\ \forall y \in [c,d]$. Введем

$\Phi(y) = \int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx$. Дифференцируем: $\Phi'(y) = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\partial f}{\partial y}dx$ (по правилу Лейбница - см. предыдущий параграф). Отсюда

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx\right| = \left|\frac{\Phi(y_0+\Delta y)-\Phi(y_0)}{\Delta y}\right| =$$
$$(\text{по т. Лагранжа}\exists\Theta\in(0,1)) = |\Phi'(y_0+\Theta\Delta y)| < \varepsilon$$

Отсюда интеграл $\int_a^\infty \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}dx$ сходится по критерию Коши, доказано.

□

64 Эйлеровы интегралы первого и второго рода

Пример 64.1. Рассмотрим функцию вида $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ — беттафункция или Эйлеров интеграл первого рода.

Если $a, b \geq 1$, то это собственный интеграл. Если хотя бы один из параметров меньше единицы, то возникает несобственный интеграл.

Если оба параметра больше нуля, то интеграл сходится. Иначе он расходится. Будем далее считать, что $a, b > 0$.

Бетта-функция есть интеграл от дифференциального бинома. Если хотя бы одно из чисел $a, b, a+b$ целое, то интеграл будет берущимся. Иначе интеграл будет не берущийся.

Некоторые свойства бетта-функции:

1) $B(a,b) = \left[\begin{array}{c} -x = t \\ -dx = dt \end{array}\right] = B(b,a)$ — симметричность.

2) $B(a,b)$ — по частям, следовательно, если $b > 1$, $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}B(a,b-1)$

Если $b > m$, то $B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1}\cdot\frac{b-2}{a+b-2}\cdot\ldots\cdot\frac{b-m}{a+b-m}\cdot B(a,b-m)$. Из симметрии можно аналогично представить для a. Отсюда следует, что $B(a,b)$ достаточно исследовать при $a, b \in (0,1]$.

—

Определение 64.1. Функция $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$ — гамма-функция или Эйлеров интеграл.

Всегда есть несобственность первого рода: сходится $\forall a$. Если $a \geq 1 \Rightarrow$ несобственность 2 рода не возникает. Если же взять $a < 1 \Rightarrow$ возникнет несобственность 2 рода в точке $x = 0$. Итого, если $a > 0$ — сходится, если $a \leq 0$ — расходится.

Далее будем считать, что $a > 0$.

Свойства гамма-функции:

1) Применимо правило Лейбница (дифференцирование по параметру) любое число раз:

$\Gamma'(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\ln xe^{-x}dx$, $\Gamma''(a) = x^{a-1}\ln^2 xe^{-x}dx$. По сравнению с другими множителями, логарифм не будет вносить никакого вклада в сходимость интеграла на нуле и бесконечности.

2) $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = (\text{по частям}) = \underbrace{\frac{x^a}{a}e^{-x}|_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty \frac{x^a}{a}e^{-x}dx = \frac{1}{a}\underbrace{\int_0^\infty x^a e^{-x}dx}_{\Gamma(a+1)}.$

Отсюда $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

3) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = -e^{-x}|_0^\infty = 1$. Отсюда, $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6$. Таким образом, $\Gamma(a+1) = a!$.

4) $\Gamma(a)$ — дифференцируемая функция при $a > 0$.

$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. По теореме тРолля $\exists c\in(1,2):\ \Gamma'(c)=0$.

Посмотрим на вторую производную: $\Gamma''(a)>0$ при любом $a>0$. Тогда $\Gamma'(a)$ возрастает на $(0,+\infty)$. То есть $\Gamma'(a)<0$ на $(0,c)$, $\Gamma'(a)>0$ на $(c,+\infty)$. Отсюда $\Gamma(a)$ убывает на $(0,c]$ и возрастает на $[c,+\infty)$.

То есть $\Gamma(a)\to_{a\to\infty}+\infty$. $\lim_{a\to+0}\Gamma(a)=\lim_{a\to+0}\frac{\Gamma(a+1)}{a}=+\infty$

5) $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Без доказательства, слишком сложно.

65 Интеграл Фурье. Сходимость интеграла Фурье. Теоремы Дини и Дирихле-Жордана

Пусть $f(x)$ определена на $[-l,l]$. Разложим ее в ряд Фурье:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_n\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi t}{l}dt$$

Отсюда

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+&\\+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt\cos\frac{k\pi t}{l}+\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt\sin\frac{k\pi t}{l}+\right)&=\\=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{k\pi(t-x)}{l}dt&\qquad(*)\end{aligned}$$

Пусть $f(x)$ определена на $(-\infty,+\infty)$ и $f(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty,+\infty)$ (то есть $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$).

В формуле $(*)$ перейдем к пределу: $l\to+\infty$.

$\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)dt\to_{l\to\infty}0$

Сумма в формуле $(*)$ может быть представлена как сумма Римана для следующего интеграла:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}F(\lambda)d\lambda$$

где

$$F(\lambda)=\int_{-l}^{l}f(t)\cos\lambda(t-x)dt$$

Разбиваем на части $0<\frac{1\pi}{l}<\frac{2\pi}{l}<...$ промежуток $[0,+\infty)$. В качестве промежуточных точек выбираем правую точку каждого кусочка: $\xi_k=\frac{\pi k}{l},\ k=1,2,....$

Тогда сумма Римана примет вид:

$$\frac{1}{\pi}\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}F(\xi_k)}_{\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{\pi k(t-x)}{l}dt}\cdot\underbrace{\Delta x_k}_{=\frac{\pi}{l}}\Rightarrow(*)$$

Тогда формальный переход в $(*)$ при $l\to\infty$ приведет к следующему:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt\right)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x)dt \quad (**)$$

Это и есть интеграл Фурье.

Замечание 65.1. Перепишем интеграл Фурье так, чтобы он был похож на ряды Фурье:

$$f(x)=\int_0^{\infty}(a_\lambda\cos\lambda x+b_\lambda\sin\lambda x)d\lambda$$

где:

$$\begin{cases}a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda tdt\\ b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\lambda tdt\end{cases}$$

Формулу $(**)$ надо далее обосновать.

Будем рассматривать поточечную сходимость интеграла Фурье, то есть сходимость в заданной точке $x_0\in(-\infty,+\infty)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x_0)dt$$

Внутренний интеграл сходится из условий абсолютной интегрируемости функции $f(t)$. (косинус тупо оцениваем сверху единицей). То есть нужно обосновать абсолютную сходимость внешнего интеграла.

Обозначим:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_0^{A}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(t-x_0)dt$$

Проверим: $J(A)\to_{A\to+\infty}$?

Преобразуем:

$$J(A)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int_0^{A}\cos\lambda(t-x_0)d\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(t-x_0)}{t-x_0}|_0^A dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin A(t-x_0)}{t-x_0}dt=[t-x_0=z]=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(z+x_0)\frac{\sin Az}{z}dz=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{z\to-z}+\int_0^{+\infty}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(f(x_0-z)+f(x_0+z)\right)\frac{\sin Az}{z}dz$$

Лемма 65.1. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin Az}{z}dz=\frac{\pi}{2}$

Доказательство.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin Az}{z} dz = \int_0^{+\infty} \frac{\sin Az}{Az} d(Az) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

□

Лемма 65.2. *(аналог леммы Римана)*

Пусть $g(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, +\infty)$. Тогда

$$\lim_{A \to +\infty} \int_a^{+\infty} g(z) \sin Az dz = 0$$

Предположим, что $f(x)$ является непрерывной в x_0 или терпит там разрыв первого рода.

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$$

(среднее арифметическое предела справа и предела слева)

$$|J(A) - S_0| =$$

$$= \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (f(x_0 - z) + f(x_0 + z)) \frac{\sin Az}{z} - S_0 \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin Az}{z} dz}_{=1} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{+\infty} \underbrace{(f(x_0 - z) + f(x_0 + z) - 2S_0)}_{\varphi(z)} \frac{\sin Az}{z} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \left(\left| \int_0^n \right| + \underbrace{\left| \int_n^{\infty} \right|}_{\to 0} \right)$$

Получили теорему Дини.

Переформулируем ее для интеграла Римана:

Теорема 65.1. *$f(x)$ — определена и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$*

$x_0 \in (-\infty, +\infty)$

$f(x)$ непрерывна в x_0 или терпит разрыв первого рода. Тогда $\exists h > 0 : \frac{\varphi(z)}{z}$ — абсолютно интегрируема на $[0, h] \Rightarrow$ интеграл Фурье сходится в точке x_0 к S_0.

Теорема 65.2. *(Дирихле-Жордана)*

$f(x)$ — определена и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$

$x_0 \in (-\infty, +\infty)$

$f(x)$ непрерывна в x_0 или терпит разрыв первого рода. Тогда $\exists h > 0 :$ $f(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[x_0 - h, x_0 + h] \Rightarrow$ инетграл Фурье сходится к S_0.

66 Комплексная форма интеграла Фурье. Преобразование Фурье

Интеграл Фурье можно записать в комплексной форме.
Обозначим $G_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt$, $G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(t-x)dt$
Функция G_1 является четной, а G_2 — нечетной.
Распишем интеграл Фурье:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(t-x)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} G_1(\lambda)d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\lambda)d\lambda - i\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G_2(\lambda)d\lambda}_{=0(\text{т.к. нечетная})} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt \qquad (***)$$

Формулу $(***)$ можно представить как суперпозицию двух формул:
Обозначим

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

Отсюда получим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$$

$g(\lambda)$ — прямое преобразование Фурье.
$f(x)$ — обратное преобразования Фурье.
$g(\lambda)$ — образ $f(x)$
$f(x)$ — прообраз $g(x)$.