Факультет прикладной математики – процессов управления

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

КУРС ЛЕКЦИЙ - ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

для студентов бакалавриата по направлению 010900 – прикладная математика и физика

В. М. МАЛЬКОВ, Ю. В. МАЛЬКОВА

Санкт-Петербург

2012

Оглавление

ПЕРВЫЙ СЕМЕСТР

Содержание лекций первого семестра

1. **Элементы теории множеств**. Основные операции над множествами. Теорема двойственности. Понятие отображения. Сравнение множеств, некоторые Леммы для счетных множеств.

2. **Теория вещественных (действительных) чисел**. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел. Аксиома полноты (непрерывности) действительных чисел. Понятие сечения в множестве действительных чисел и его свойства. Верхняя и нижняя грани числового множества. Основные Леммы, связанные с полнотой множества вещественных чисел: лемма о вложенных отрезках, лемма о конечном покрытии, лемма о предельной точке множества. Мощность множества, несчетные множества. Теоремы Кантора о счетности рациональных и несчетности действительных чисел.

3. **Теория пределов числовой последовательности**. Числовая последовательность и предел. Свойства сходящихся последовательностей. Монотонные последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические операции над последовательностями. Число "e" как предел последовательности. Подпоследовательности, теорема Больцано - Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.

4. **Функции и их пределы**. Понятие функции. Ограниченные функции, верхняя и нижняя грани множества значений. Два определения предела функции, их эквивалентность. Условия существования и свойства предела функции. Монотонные функции и их пределы. Критерий Коши существования предела функции. Сравнение функций: эквивалентные функции, главная часть функции. Некоторые важные пределы функций.

5. **Непрерывные функции**. Точки непрерывности и точки разрыва функций. Свойства функций непрерывных в точке, непрерывность сложной функции. Теоремы о непрерывных функциях на отрезке: Больцано - Коши, Вейерштрасса. Непрерывность и разрывы монотонных функций. Обратные функции. Непрерывность элементарных функций. Равномерная непрерывность, теорема Кантора.

6. **Дифференциальное исчисление функций**. Производная, ее геометрический и механический смысл. Дифференциал функции. Правила дифференцирования при арифметических операциях. Производная обратной и сложной функции. Инвариантность дифференциала сложной функции. Производные элементарных функций. Производные высших порядков, формула Лейбница. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциалы высших порядков.

7. **Основные теоремы дифференциального исчисления**. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, Коши, Пеано. Приложение формулы Тейлора. Раскрытие неопределенностей, правило Лопиталя. Исследование функций с помощью производных: монотонность функций, экстремумы, выпуклости и точки перегиба, асимптоты. Построение графика функции.

8. **Приближение непрерывной функции многочленом**. Теоремы Бернштейна и Вейерштрасса. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

9. **Первообразная функция и неопределенный интеграл**. Определение и свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов элементарных функций. Интегрирование заменой переменной и по частям. Интегрирование рациональных функций и некоторых специальных выражений (тригонометрических, содержащих радикалы, биномиальных дифференциалов и других).

Количество часов в первом семестре обучения: лекции – 64 часа, практические занятия – 64 часа, самостоятельная работа – 64 часа. Вид контроля: коллоквиумы, четыре контрольные работы, зачет и экзамен.

Лекция 1. Элементы теории множеств

1.1 Понятие множества. Операции над множествами

Понятие множества играет в современной математике чрезвычайно важную роль. Не только потому, что сама теория множеств является обширной и содержательной дисциплиной, но главным образом в силу того влияния, которое теория множеств, возникшая в конце XIX века, оказывает на всю математику в целом. Ее основателем считается немецкий математик Георг Кантор (1845-1918 гг.). Язык теории множеств стал универсальным языком математики.

Понятие множества настолько обширно, что нельзя дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы к замене слова "множество" равнозначными выражениями: совокупность, класс и т.д. Таким образом, множество рассматривают как первичное понятие, не определяемое через другие.

Под множеством понимается собрание различных объектов, которые имеют некоторые общие свойства. Объекты, из которых состоит множество, называются его элементами. Понятие элемента также является первичным, не определяемым через другие.

Множества далее будем обозначать прописными латинскими буквами, например, $A, B, C, ...$, а их элементы строчными буквами $a, b, c, ...$ Если X – некоторое множество, а общее обозначение его элемента x, то пишут $X = \{x\}$.

Принадлежность элемента "a" множеству "A" обозначают символом $a \in A$, или $A \ni a$ (читается: элемент "a" принадлежит множеству "A" или множество "A" содержит элемент "a").

Отрицание принадлежности обозначается символом $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$.

Например, пусть $A = \{2n\}$, $(n = 1, 2, \dots)$ – множество четных чисел, тогда $4 \in A$, $3 \notin A$.

Если все элементы множества A входят в другое множество B, то A называется подмножеством B и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ (читают: A содержится в B или B содержит A). Например, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$, где $\mathbf{N}$, $\mathbf{Q}$ – множества натуральных и рациональных чисел.

Подмножество $A \subset B$ называется собственным, если множество B содержит элементы, не принадлежащие A.

Два множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут $A = B$.

Если $X = \{x\}$ – некоторое множество, элементы которого x обладают определенным свойством $P(x)$, то будем использовать запись: $X = \{x \mid P(x)\}$.

Например, $X = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$, $X = [a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым. Его обозначают символом $\varnothing$. По определению любое множество X содержит пустое множество $\varnothing$ в качестве подмножества: $\varnothing \subset X$.

Некоторые математические символы

В математических рассуждениях и формулах ради краткости записи и большей наглядности некоторые, часто встречающиеся выражения, заменяются символами. Так вместо слов "любой" , "всякий" пишут символ $\forall$, вместо слов "существует" или "найдется" пишут символ $\exists$. Символ $\forall$ называют символом всеобщности, а $\exists$ – символом существования (символы называют кванторами).

Запись $A \Longrightarrow B$ означает: из справедливости утверждения A следует справедливость B, т.е. символ $\Longrightarrow$ означает "следует" . Символ $A \Longleftrightarrow B$ означает равносильность утверждений (выражений) A и B.

Символ $A := B$ или $A \triangleq B$ или $A \stackrel{def}{=} B$ означает, что выражение A по определению есть B. Далее будут использоваться и другие символы, например символ $\curvearrowright$ вместо слова "тогда" .

Операции над множествами

Определим некоторые операции над множествами, которые достаточно часто приходится выполнять.

Объединением множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств. Операция обозначается символом $C = A \cup B$. Если некоторый элемент входит в оба множества, то он учитывается только один раз.

Аналогично определяется объединение любого количества (конечного или бесконечного) множеств. Если A_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ – некоторые множества (символ α не обязательно порядковый номер), то их объединением является множество $\cup A_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, состоящее из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A_α.

Например, если $A = \{1, 3, ...\}$, $B = \{2, 4, ...\}$ – множества всех нечетных и четных чисел, то $A \cup B = \mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел.

Пересечением множеств A **и** B называется множество C, состоящее из всех элементов, которые входят в оба множества. Обозначение операции пересечения $C = A \cap B$.

Аналогично определяется пересечение любого (конечного или бесконечного) количества множеств. Если A_α, $\alpha \in \mathcal{A}$ – некоторые множества (символ α не обязательно порядковый номер), то их пересечением является множество $\cap A_\alpha$, $\alpha \in \mathcal{A}$, состоящее из всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α.

На рис. 1 схематически изображены операции объединения и пересечения двух множеств. Штрихованные части представляют результат операций.

Пример. Если $A \subset B$, то есть A – подмножество B, то $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.

Определение. Два множества A и B называются дизъюнктными, если их пересечение пусто, то есть $A \cap B = \varnothing$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее из всех

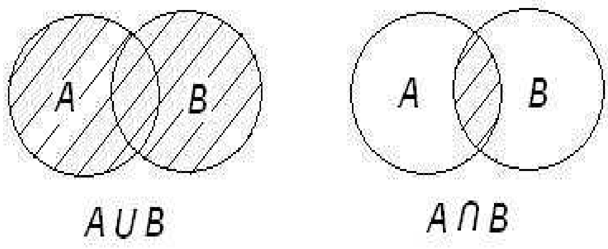


Рис. 1 Объединение и пересечение двух множеств

элементов множества A, которые не входят в множество B. Обозначение операции $C = A \backslash B$. При этом не предполагается, что $B \subset A$. Если B – собственное подмножество A, то разность $A \backslash B$ называется дополнением множества B до множества A (в множестве A). Иногда в этом случае применяют обозначения A' или C_A.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество C вида $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (объединение разностей). Симметрическую разность обозначают $C = A \bigtriangleup B$.

На рис. 2 показаны схематически операции разности и симметрической разности двух множеств.

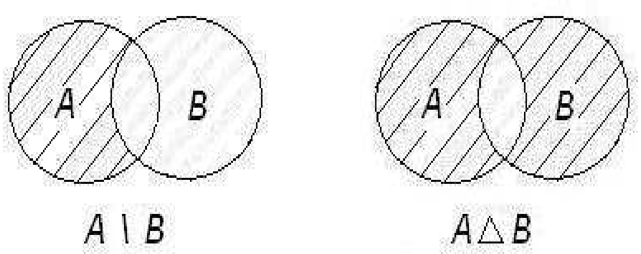


Рис. 2 Разность и симметрическая разность двух множеств

Упражнение. Показать, что

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

► Чтобы доказать равенство двух множеств, достаточно показать, что любой элемент одного из множеств является элементом и другого множества.

$\sqsupset x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \curvearrowright x \in A \cup B$ и $x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

$\sqsupset x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B), \curvearrowright x \in A \cup B$ и $x \notin A \cap B \Longrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ◄

Прямое или декартово произведение множеств

Пусть $a \in A$, $b \in B$. Пару элементов (a, b) называют упорядоченной, если в ней фиксировано расположение элементов a и b. Множество C, состоящее из всех упорядоченных пар элементов $a \in A$ и $b \in B$ называют прямым или декартовым произведением множеств A и B. Обозначают $C = A \times B = \{(a, b)\}$.

Прямое произведение не обладает свойством коммутативности, то есть $A \times B \neq B \times A$.

Примеры.

1. Пусть $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3\}$, тогда

$$A \times B = \{(1; 2), (1, 3), (2; 2), (2; 3)\}$$
$$B \times A = \{(2; 1), (2; 2), (3; 1), (3; 2)\}$$

2. Пусть $X = \{x\}$, Y = {y}, где $x, y \in \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ – множество вещественных чисел, тогда

$$X \times Y = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y)\} = \mathbf{R}^2,$$

где $\mathbf{R}^2$ – множество точек плоскости (x, y).

3. Показать, что прямое произведение двух отрезков $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$ можно рассматривать как прямоугольник на плоскости.

4. Показать, что прямое произведение круга и отрезка является цилиндром в пространстве.

5. Показать, что прямое произведение двух окружностей образуют поверхность тора.

1.2 Свойства операций над множествами

Операции объединения и пересечения множеств имеют следующие свойства:

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

2. Ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

3. Дистрибутивность

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \qquad (1)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (2)$$

► Докажем первое из равенств. Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$, $\curvearrowright$ $x \in A \cup B$ и $x \in C$, то есть $x \in A$ или $x \in B$ и $x \in C$. Это означает, что x принадлежит по крайней мере одному из множеств: $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$, тогда

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Longrightarrow (A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $\curvearrowright$ $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$, то есть $x \in A$ и $x \in C$ или $x \in B$ и $x \in C$. Это означает, что $x \in C$ и одному из множеств A или B, $\curvearrowright$ $x \in A \cup B \Longrightarrow$

$$x \in (A \cup B) \cap C \Longrightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C.$$

Из двух включений следует первое равенство (1). Равенство (2) доказывается аналогично ◄

Свойства дистрибутивности (1), (2) справедливы и для совокупности множеств

$$(\cup_\alpha A_\alpha) \cap C = \cup_\alpha (A_\alpha \cap C) \qquad (3)$$
$$(\cap_\alpha A_\alpha) \cup C = \cap_\alpha (A_\alpha \cup C) \qquad (4)$$

Отметим одно свойство разности множеств. Пусть $A = \cup_\alpha A_\alpha$ и B – произвольные множества. Тогда
$$A \setminus B = \cup_\alpha (A_\alpha \setminus B)$$
Проверка этой формулы элементарна.

1.3 Принцип двойственности

В теории множеств и ее приложениях весьма важную роль играет принцип двойственности.

Утверждение. Если множества $A_\alpha \subset S$, то

1. Дополнение суммы множеств равно пересечению дополнений
$$S \setminus \cup_\alpha A_\alpha = \cap_\alpha (S \setminus A_\alpha) \qquad (5)$$
2. Дополнение пересечений множеств равно сумме дополнений
$$S \setminus \cap_\alpha A_\alpha = \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha) \qquad (6)$$

► Сначала докажем равенство (5). Пусть $a \in S \setminus \cup_\alpha A_\alpha$, $\curvearrowright$ $a \in S$ и $a \notin \cup_\alpha A_\alpha$. То есть $a \notin A_\alpha$ ни при одном индексе α. Если это так, то элемент $a \in S \setminus A_\alpha$ при $\forall \alpha$, то есть $a \in \cap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Таким образом мы доказали включение $S \setminus \cup_\alpha A_\alpha \subset \cap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Обратно, пусть $a \in \cap_\alpha (S \setminus A_\alpha)$, $\curvearrowright$ $a \in S \setminus A_\alpha$ при $\forall\ \alpha$. Отсюда получим $a \in S$ и $a \notin A_\alpha$ при каждом α, тогда $a \notin \cup_\alpha A_\alpha$. То есть $a \in S \setminus \cup_\alpha A_\alpha$. Мы доказали включение $\cap_\alpha (S \setminus A_\alpha) \subset S \setminus \cup_\alpha A_\alpha$. Из двух противоположных включений следует равенство (5).

Перейдем к доказательству равенства (6). Пусть $a \in S \setminus \cap_\alpha A_\alpha$, $\curvearrowright$ $a \in S$ и $a \notin \cap_\alpha A_\alpha$, то есть не все множества A_α содержат элемент a. Следовательно, $a \in \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Доказано включение $S \setminus (\cap_\alpha A_\alpha) \subset \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha)$. Обратно, пусть $a \in \cup_\alpha (S \setminus A_\alpha)$, $\curvearrowright$ $a \in S \setminus A_\alpha$ хотя бы для одного индекса α. Для этого индекса α, будет $a \in S$ и $a \notin A_\alpha$. Следовательно $a \notin \cap_\alpha A_\alpha$, $\curvearrowright$ $a \in S \setminus \cap_\alpha A_\alpha$. Доказано включение $\cup_\alpha (S \setminus A_\alpha) \subset S \setminus \cap_\alpha A_\alpha$. Из двух включений следует равенство (6) ◄

Смысл принципа двойственности состоит в том, что из любого утверждения, относящегося к системе подмножеств A_α фиксированного множества S, совершенно автоматически может быть получено другое – двойственное утверждение путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями в S, суммы множеств – их пересечениями, а пересечения – суммами.

Примеры.

1. Доказать $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

► $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D) \Longrightarrow (x, y) \in (A \times B)$ и $(x, y) \in (C \times D) \Longrightarrow$ $x \in A \cap C$, $y \in B \cap D \Longrightarrow (x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$;

$(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D) \Longrightarrow x \in A \cap C$, $y \in B \cap D \Longrightarrow x \in A$ и $x \in C$, $y \in B$ и $y \in D \Longrightarrow (x, y) \in A \times B$ и $(x, y) \in C \times D \Longrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Из двух включений получим равенство множеств ◄

2. Доказать, что если $A \subset P$, $B \subset Q$, то выполняется равенство

$$A \times B = (A \times Q) \cap (P \times B).$$

► Из примера 1 следует

$$(A \times Q) \cap (P \times B) = (A \cap P) \times (Q \cap B) = A \times B \blacktriangleleft$$

3. Доказать, что $A \setminus B = A \cap (A \setminus B)$.

► 1) $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in A \cap (A \setminus B)$.

2) $x \in A \cap (A \setminus B) \Rightarrow x \in A,\ x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A,\ x \notin B \Rightarrow x \in A \setminus B$. ◄

4. Доказать включения:

а) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup B)$.

► $x \in (A \cap C) \cup (B \cap D) \Rightarrow x \in (A \cap C)$ или $x \in (B \cap D) \Rightarrow x \in A$ и $x \in C$ или $x \in B$ и $x \in D \Rightarrow x \in A \cup B$ и $x \in C \cup D \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (C \cup B)$. ◄.

б) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$.

► $x \in (B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \Rightarrow x \in (B \setminus C)$ и $x \notin B \setminus A$; $x \in (B \setminus C) \Rightarrow x \in B$ и $x \notin C$; $x \notin B \setminus A \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \setminus C$. ◄.

в) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

► $x \in (A \setminus C) \Rightarrow x \in A$ и $x \notin C$.

Рассмотрим два случая: $x \in B$ и $x \notin B$;

если $x \in B$, то $x \notin B \setminus C$,

если $x \notin B$, то $x \in A \setminus B$.

В любом варианте будет $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.◄.

5. Пусть A – заданное множество. Доказать, что множество $X = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A \triangle X = A$.

► Запишем равенство в виде $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = A$. Пусть $X = \varnothing$, тогда $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = A \cup \varnothing = A$. Пусть $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = A$, тогда из $x \in A \Rightarrow x \in A \setminus X$ или $x \in X \setminus A \Rightarrow x \in A, x \notin X$ или $x \in X, x \notin A$ Следовательно $x \notin A \cap X$, то - есть $X \setminus A = \varnothing$. Та часть множества X, которая не входит в A пуста. С другой стороны, $A \setminus X = A$, то - есть $A \cap X = \varnothing$, так что та часть множества X, которая входит в A, также пуста. Это означает $X = \varnothing$. ◄

Лекция 2. Сравнение множеств

В теории множеств важным является вопрос о том, как сравнивать между собой два множества в смысле количества содержащихся в них элементов. Если множества A и B содержат конечное число элементов, мы можем сравнить их, предварительно сосчитав число элементов в каждом. Другой способ состоит в установлении соответствия между элементами этих множеств. Второй способ сравнения пригоден и для бесконечных множеств.

2.1 Счетные и несчетные множества

Определение 1. Множества A и B называются эквивалентными, если между ними может быть установлено взаимно-однозначное соответствие. Эквивалентность множеств обозначается символом $A \sim B$.

Отношение эквивалентности обладает следующими свойствами:
рефлексивность: $A \sim A$,
симметричность: если $A \sim B$, то $B \sim A$,
транзитивность: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Определение 2. Пусть A – любое множество. Обозначим $\mathbf{N} = \{n\}$ – множество всех натуральных чисел, $N_n = \{1, 2, ..., n\}$ – конечное множество целых чисел от 1 до n.

Говорят, что множество A:
- конечно, если $A \sim N_n$ при некотором n,
- бесконечно, если A – не конечно,
- счетно, если $A \sim \mathbf{N}$,
- несчетно, если A не конечно и не счетно,
- не более чем счетно, если A – конечно или счетно.

Замечание. Если A и B – конечные множества и $A \subset B$ – собственное подмножество, то эти множества не могут быть эквивалентными. Для бесконечных множеств собственное подмножество может быть эквивалентно всему множеству.

Например, интервал $(-1, 1)$ эквивалентен всей числовой оси $(-\infty, \infty)$. Соответствие между элементами дается формулой $y = x/(1 - |x|)$. Множество всех целых положительных и отрицательных чисел $\mathbf{Z} = \{0; 1; -1; 2; -2; ...\}$ эквивалентно множеству натуральных чисел, то есть $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$. Соответствие между элементами множеств $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ можно установить с помощью формул: $f(n) = n/2$, если n – четное, и $f(n) = -(n-1)/2$, если n – нечетное.

Докажем несколько Лемм о счетных множествах.

Лемма 1. Всякое непустое подмножество счетного множества конечно или счетно.

► Пусть $B \subset A$ – непустое подмножество счетного множества A. Поскольку

$A \sim N$, элементы множества $A = \{a\}$ можно занумеровать, записав их в виде $\{a_n\}$, $n = 1, 2, ...$. Если элемент $a_1 \in B$, то обозначим его b_1 и переходим к элементу a_2, если $a_1 \notin B$, то сразу переходим к элементу a_2. Если $a_2 \in B$, то обозначим его b_2, если $a_2 \notin B$, то пропускаем его и переходим к элементу a_3. Продолжая этот процесс, мы занумеруем все элементы множества $B = \{b_k\}$, $k = 1, 2, ...$. Очевидно множество B конечно или счетно ◄

Лемма 2. Сумма конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.

► Пусть A_n, $n = 1, 2, ...$, – система счетных множеств. Элементы каждого множества A_n запишем в виде $\{a_{nk}\}$ и рассмотрим бесконечную таблицу, где элементы a_{nk} занимают n–ную строку. Эта таблица содержит все элементы множества $S = \cup_n A_n$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Произведем нумерацию элементов множества $S = \{s\}$ следующим образом: $s_1 = a_{11}$, $s_2 = a_{21}$, $s_3 = a_{12}$,... У некоторых множеств A_i, A_j, $i \neq j$, могут оказаться одинаковые элементы, в этом случае мы их учитываем только один раз. Таким образом элементы множества S будут занумерованы, то есть поставлены в соответствие с множеством натуральных чисел $\mathbf{N}$, тогда S – счетно ◄

Лемма 3. Прямое произведение счетных множеств есть счетное множество.

► Пусть A и B – счетные множества, докажем, что $A \times B$ – также счетное множество. Положим $A = \{a_m\}$, $B = \{b_n\}$, тогда $A \times B = \{(a_m, b_n)\}$, где $m, n \in \mathbf{N}$. Элементы множества $A \times B$ можно расположить в виде бесконечной таблицы, подобно тому, как мы делали при доказательстве счетности объединения счетных множеств, и занумеровать. Отсюда вытекает $A \times B \sim \mathbf{N}$ и $A \times B$ – счетное множество. Доказательство счетности прямого произведения любого числа счетных множеств проводится по методу математической индукции ◄

Следствие 1. Объединение, разность, пересечение и симметрическая разность двух счетных множеств A и B есть не более чем счетные множества.

► Счетность объединения множеств $A \cup B$ доказана в Лемме 2. Счетность разности $A \setminus B$, пересечения $A \cap B$ и симметрической разности $A \bigtriangleup B$ следует из Леммы 1, поскольку все эти множества являются подмножествами счетного множества $A \cup B$ ◄

Следствие 2. Множества $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, и $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ – счетные.

2.2 Некоторые теоремы для бесконечных множеств

Рассмотрим несколько теорем о бесконечных множествах.

Теорема 1. Если $A = B \cup C$, где B – любое бесконечное множество, а C – не более чем счетно, тогда $A \sim B$.

► Будем считать, что $B \cap C = \varnothing$. Выберем из B какое-нибудь счетное подмножество D. Тогда множества B и A можно представить в виде

$$B = (B \setminus D) \cup D, \quad A = (B \setminus D) \cup (D \cup C)$$

Тем самым множества A и B представлены в виде объединения двух дизъюнктных множеств, из которых первые совпадают, а вторые эквивалентны, так как D и $D \cup C$ – счетные и потому $A \sim B$ ◄

Теорема 2. Если A – бесконечное не счетное множество, а $B \subset A$ – не более чем счетно, то $(A \setminus B) \sim A$.

► Имеем $A = (A \setminus B) \cup B$. Ясно, что $A \setminus B$ – бесконечное не счетное множество, а тогда $(A \setminus B) \sim A$, что вытекает из Теоремы 1 ◄

Алгебраическими числами называются корни уравнений вида $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$, где n – натуральные числа, a_i – целые числа, $i = 1, 2, .., n$, $a_0 \neq 0$.

Теорема 3. Множество алгебраических чисел счетно.

► По лемме о счетности прямого произведения счетных множеств $Q^k = Q \times ... \times Q$ – счетное множество. Элемент $r \in Q^k$ есть упорядоченный набор $(r_1, ..., r_k)$ из k рациональных чисел. Алгебраическое уравнение k–ой степени имеет вид: $x^k + r_1 x^{k-1} + ... + r_k = 0$. Таким образом, различных алгебраических уравнений степени k столько же, сколько различных упорядоченных наборов рациональных чисел, то есть счетное множество.

Алгебраических уравнений произвольной степени с рациональными коэффициентами тоже счетное множество как счетное объединение (по степеням k) счетных множеств. У каждого такого уравнения лишь конечное число корней, значит множество алгебраических чисел счетно ◄

Числа, не являющиеся алгебраическими, называются трансцендентными. Позже будет показано, что множество всех вещественных чисел несчетно. Поскольку это множество состоит из алгебраических чисел и трансцендентных чисел, то множество трансцендентных чисел несчетно.

Следствие 1. Множество всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами $P = \cup_n P_n$, где P_n – множество полиномов степени n, счетно.

2.3 Отображения

Определение 1. Рассмотрим два множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$, элементами которых могут быть любые объекты, и предположим, что каждому элементу $x \in X$ некоторым способом поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Обозначим это соответствие $y = f(x)$, тогда f называется отображением из X в Y, а элемент $f(x)$ значением отображения. Мы будем писать $f : X \to Y$.

Множество X называется областью определения отображения f. Множество $B \subset Y$ всех значений отображения f на элементах $x \in X$

$$B := \{y \in Y \mid y = f(x), x \in X\}$$

называется областью значений отображения.

Два отображения f и g называются равными, если они имеют одну и ту же область определения X и их значения совпадают $f(x) = g(x)$ при $\forall x \in X$.

Пусть $f : X \to Y$ и $A \subset X$. Через $f|_A$ обозначают отображение $\varphi : A \to Y$, совпадающее с f на множестве A, то есть $f|_A(x) = f(x)$, если $x \in A$. Отображение $f|_A$ называют сужением отображения f на множество A и наоборот, отображение f называют расширением отображения $f|_A$ на множество X.

В зависимости от природы множеств X и Y наряду с терминами функция и отображение применяют и другие – функционал, оператор и т.д.

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называется сюръекцией или отображением X на Y, если для $\forall y \in Y$ $\exists$ по крайней мере один элемент $x \in X$, что $f(x) = y$.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется инъекцией, если разным $x \in X$ соответствуют разные $y \in Y$, то есть при $x_1 \neq x_2$ имеем $y_1 \neq y_2$ или $f(x_1) \neq f(y_2)$.

Отображение $f : X \to Y$ называется взаимно-однозначным или биекцией, если оно одновременно сюръективно и инъективно.

Если $f : X \to Y$ и $A \subset X$, то множество

$$B = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\}$$

называется образом подмножества A и обозначается $B = f(A)$.

Если $f\colon X \to Y$ и $B \subset Y$, то множество

$$A = \{x \in X \mid f(x) = y, y \in B\}$$

называется прообразом подмножества B и обозначается $A = f^{-1}(B)$.

Определение 3. Если заданы отображения $f\colon X \to Y$ и $g : Y \to Z$, то отображение $F\colon X \to Z$, определенное для $\forall x \in X$ равенством $F(x) = g(f(x))$, называется композицией отображений и обозначается $F(x) = (g \circ f)(x)$.

Определение 4. Если отображение $f : X \to Y$ взаимно-однозначно (биективно), то отображение $f^{-1} : Y \to X$ называется обратным по отношению к отображению $f : X \to Y$. Отображение f^{-1} очевидно взаимно-однозначно.

Определение 5. Графиком отображения (функции) $f\colon X \to Y$ называется подмножество $\Gamma \subset X \times Y$ с элементами $(x, f(x))$, то есть

$$\Gamma = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

Примеры.

1. Найти взаимно-однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[a, b]$. Решение. Пусть $x \in [0, 1]$, $y \in [a, b]$. Отображение $y = a + (b - a)\,x$ решает задачу.

2. Найти взаимно-однозначное отображение интервала $(0, 1)$ на всю числовую ось.

Решение. Искомым отображением будет $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

3. Построить взаимно-однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на интервал $(0, 1)$.

Решение. Выделим из интервала какую-либо последовательность попарно различных точек. Например:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{1}{4}, \quad ..., \quad x_n = \frac{1}{n+1}, ...$$

Установим следующее соответствие: точке $0 \in [0, 1]$ ставим в соответствие точку $x_1 \in (0, 1)$, точке $1 \in [0, 1]$ – точку $x_2 \in (0, 1)$, точке $x_1 \in [0, 1]$ – точку $x_3 \in (0, 1)$ и т.д. Точке $x_n \in [0, 1]$ – точку $x_{n+2} \in (0, 1)$ и т.д. Всем оставшимся точкам $x \in [0, 1]$ ставим в соответствие саму точку $x \in (0, 1)$. Полученное соответствие взаимно-однозначно.

4. Найти взаимно-однозначное соответствие между отрезком $[0, 1]$ и лучом $[0, \infty)$.

Решение. Сначала отобразим отрезок $[0, 1]$ на полуинтервал $[0, 1)$. Затем полуинтервал $[0, 1)$ на полуинтервал $[0, \pi/2)$. Наконец, полуинтервал $[0, \pi/2)$ отобразим на луч $[0, \infty)$ с помощью функции $y = \operatorname{tg} x$. Можно сразу полуинтервал $[0, 1)$ отобразить на луч $[0, \infty)$ с помощью функции $y = \operatorname{tg} \pi x/2$, $x \in [0, 1)$. Найдем отображение отрезка $[0, 1]$ на полуинтервал $[0, 1)$. Выделим на полуинтервале $[0, 1)$ ту же последовательность попарно различных точек как это сделано выше в примере 3. Точке $0 \in [0, 1]$ ставим в соответствие точку $0 \in [0, 1)$, точке $x = 1 \in [0, 1]$ – точку $x_1 \in [0, 1)$, точке $x_1 \in [0, 1]$ – точку $x_2 \in [0, 1)$ т.д. Точке $x_n \in [0, 1]$ – точку $x_{n+1} \in [0, 1)$ и т.д. Всем остальным точкам $x \in [0, 1]$ ставим в соответствие саму точку $x \in [0, 1)$. Полученное соответствие взаимно-однозначно.

Лекция 3. Теория вещественных чисел

Главным объектом исследования классического анализа являются функции вещественных переменных (числовые функции). Такие основные понятия для функций как предельный переход, непрерывность, дифференцируемость и другие должны основываться на точно определенном понятии вещественного числа и его свойствах.

Вещественные числа изучались в курсе элементарной математики. Напомним известные из элементарной математики свойства вещественных чисел и дополним их некоторыми свойствами, которые раньше не рассматривались.

Существуют различные способы введения вещественных чисел. Один из них состоит в использовании бесконечных десятичных дробей или бесконечных дробей другого вида, например двоичных.

Вещественные числа можно ввести с помощью так называемых сечений Дедекинда в области рациональных чисел (такой способ использован в книге Г.М. Фихтенгольца), с помощью последовательностей рациональных чисел (этот способ принадлежит Кантору).

В данном курсе математического анализа вещественные числа вводятся аксиоматически. Этот путь дает возможность наиболее компактно и полно изложить необходимые для анализа сведения о числах. Вместе с тем он и наиболее логически совершенен. Аксиоматический метод использован, например, в книгах В.А. Зорича и Л.Д. Кудрявцева.

3.1 Аксиоматика множества вещественных чисел

1. Сложение. Существует правило, посредством которого любым числам p и q ставится в соответствие третье число r, называемое суммой чисел и обозначаемое символом $r = p + q$. Эта операция называется сложением, она обладает следующими свойствами:
a) коммутативность: $p + q = q + p$,
b) ассоциативность или сочетательное свойство: $(p + q) + r = p + (q + r)$,
c) существует число, обозначаемое 0 (нейтральный элемент) такое, что $p+0 = p$ для $\forall p$,
d) для каждого числа p существует противоположное ему число $(-p)$ такое, что $p + (-p) = 0$.

Операция $p + (-q) = p - q$ называется вычитанием.

Можно доказать единственность нуля и противоположного элемента.

Если на множестве G определена операция, удовлетворяющая аксиомам b), c), d), то говорят, что множество G есть группа. Если выполнено также условие a), то группу называют коммутативной или Абелевой. Для операции сложения группу называют аддитивной.

2. Умножение. Существует правило, посредством которого любым двум числам p и q ставится в соответствие третье число r, называемое произведением и обозначаемое $r = p \cdot q$. Эта операция называется умножением и обладает следующими свойствами:
a) коммутативность: $p \cdot q = q \cdot p$,
b) ассоциативность или сочетательное свойство: $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$,
c) существует число 1 (нейтральный элемент) такое, что $p \cdot 1 = p$ для $\forall p$,
d) для каждого p существует обратное ему число $(1/p)$ такое, что $p \cdot (1/p) = 1$.
Операция $p \cdot (1/q) = p/q = p : q$, $q \neq 0$, называется делением.

Можно доказать единственность единицы и обратного элемента.

Множество $G \setminus 0$, удовлетворяющее условиям a) – d), образует Абелеву группу. Для операции умножения группа называется мультипликативной.

3. Дистрибутивный (распределительный) закон для сложения и умножения

$$(p + q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r.$$

Если на множестве G введены операции сложения и умножения, удовлетворяющие перечисленным аксиомам, то множество G называют числовым полем.

4. Аксиомы упорядоченности.

Существует правило упорядочения чисел, состоящее в том, что любые два числа p и q связаны одним и только одним из трех знаков:

либо $p = q$, либо $p > q$, либо $p < q$.

5. Транзитивность упорядоченности. Правило упорядоченности имеет свойства транзитивности:

из $p = q$ и $q = r \Longrightarrow p = r$,

из $p > q$ и $q > r \Longrightarrow p > r$,

из $p < q$ и $q < r \Longrightarrow p < r$.

6. Свойства операций упорядочения, сложения и умножения:

a) из $p > q \Longrightarrow p + r > q + r$,

b) из $p > q$ и $r > 0 \Longrightarrow p \cdot r > q \cdot r$.

Аксиомы 1 – 6 называют основными, так как все другие другие алгебраические свойства чисел, относящиеся к операциям сложения, умножения и неравенствам, могут быть получены как логические следствия из указанных свойств.

Например, из основных свойств вытекает правило, позволяющее складывать неравенства одного знака:

если $p > q$ и $r > s$, то $p + r > q + s$

► Из неравенств $p + r > q + r$ и $q + r > q + s \Longrightarrow p + r > q + s$ ◄

Однако указанных аксиом недостаточно, чтобы ввести вещественные числа. Необходима еще одна важная аксиома, отражающая их свойства.

7. Аксиома непрерывности (плотности). Если $A \subset \mathbf{R}$ и $B \subset \mathbf{R}$ – непустые подмножества и для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, то существует число $c \in \mathbf{R}$, что $a \leq c \leq b$.

Определение 1. Множество элементов, удовлетворяющее указанным аксиомам 1 – 7 и содержащее больше одного элемента, называется множеством вещественных чисел. Элементы множества называют вещественными числами. Множество обозначают $\mathbf{R}$.

Свойство непрерывности вещественных чисел связано с простейшим использованием математики на практике – с измерением величин. Оно гарантирует, что измеряемая величина имеет определенное значение, расположенное между ее приближенными значениями, вычисленными с недостатком и избытком.

Геометрически множество $\mathbf{R}$ изображается направленной прямой, а отдельные числа – точками этой прямой. Множество $\mathbf{R}$ дополняют элементами $+\infty$ и $-\infty$. Для $\forall a \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство: $-\infty < a < +\infty$. Множество $\mathbf{R}$, дополненное элементами $+\infty$ и $-\infty$, называется расширенным множеством вещественных чисел, которому соответствует расширенная числовая прямая. Множество обозначается $\overline{\mathbf{R}}$.

3.2 Промежутки и окрестности вещественных чисел

Пусть $a, b \in \mathbf{R}$, причем $a < b$.

Множество $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$
называется отрезком или сегментом,

Множество $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x < b\}$
называется интервалом,

Множества $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x < b\}$ и $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, a < x \leq b\}$
называются полуотрезками или полуинтервалами.

Все перечисленные множества называются также промежутками. Точки a и b называются концами промежутка, все остальные точки $a < x < b$ называются внутренними точками.

Будут рассматриваться также бесконечные промежутки:

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \geq a\}, \quad (a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x > a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x \leq a\}, \quad (-\infty, a) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, x < a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \,|\, -\infty < x < +\infty\}$$

Определение 1. Окрестностью точки $a \in \mathbf{R}$ называется любой интервал, содержащий эту точку. Обозначение окрестности $U\,(a)$.

Определение 2. Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$. Множество точек интервала $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ называется ε – окрестностью точки a. Число ε называется радиусом окрестности. Обозначение ε – окрестности: $U\,(a, \varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Будут рассматриваться также окрестности точек $a = +\infty$ и $a = -\infty$, обозначаемые символами

$$U\,(+\infty, 1/\varepsilon) = (1/\varepsilon, +\infty), \quad U\,(-\infty, -1/\varepsilon) = (-\infty, -1/\varepsilon).$$

3.3 Абсолютная величина и ее свойства

В множестве вещественных чисел $\mathbf{R}$ вводится понятие абсолютной величины числа $a \in \mathbf{R}$ с помощью равенств

$$|\,a| = \begin{cases} a, \text{ если}\, a \geq 0, \\ -a, \text{ если}\, a < 0 \end{cases}$$

Геометрически $|\,a|$ есть расстояние на числовой оси от $(\cdot)0$ до $(\cdot)a$.

Рассмотрим некоторые свойства абсолютной величины.

1. Для $\forall a \in \mathbf{R}$ выполняются неравенства:

$$|\,a| \geq 0, \quad |\,a| = |-a|, \quad |\,a| \geq a, \quad |\,a| \geq -a.$$

2. Неравенства $|\,a| < M$ и $-M < a < M$ равносильны.

► Докажем импликацию $|\,a| < M \Longrightarrow -M < a < M$:

$$a \leq |\,a| < M \Longrightarrow a < M, \quad -a \leq |\,a| < M \Longrightarrow -a < M \Longrightarrow a > -M.$$

Обратно: докажем $-M < a < M \Longrightarrow |\,a| < M$.

Если $a \geq 0$, то $|\,a| = a$ и $|\,a| < M$

Если $a < 0$, то $|\,a| = -a$, так как $-a < M$, то $|\,a| < M$

Равносильность неравенств доказана ◄

Аналогично доказывается эквивалентность неравенств

$$|\,a| \leq M \Longleftrightarrow -M \leq a \leq M.$$

3. Для любых $a, b \in \mathbf{R}$ справедливы неравенства:

$$|\,a+b| \leq |\,a| + |\,b|, \quad |\,|\,a| - |\,b|\,| \leq |\,a-b| \tag{1}$$

► Согласно свойству 1 имеем

$$a \leq |\,a|, \quad -a \leq |\,a|, \quad b \leq |\,b|, \quad -b \leq |\,b|$$

Отсюда следует: $a+b \leq |\,a| + |\,b|$, $-(a+b) \leq |\,a| + |\,b|$. Так как одно из чисел $(a+b)$ или $-(a+b)$ неотрицательно и совпадает с $|\,a+b|$, то первое неравенство доказано. Второе неравенство является следствием первого. В самом деле

$$|\,a| - |\,b| = |\,(a-b) + b| - |\,b| \leq |\,a-b| + |\,b| - |\,b| = |\,a-b|,$$

$$|\,b| - |\,a| = |\,b - a + a| - |\,a| \leq |\,b - a| + |\,a| - |\,a| = |\,b - a|.$$

дно из чисел слева равно $|\,|\,a| - |\,b||$ неравенство доказано ◄

4. Справедливы равенства:

$$|\,c \cdot a| = |\,c| \cdot |\,a|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|\,a|}{|\,b|} \text{ при } b \neq 0,$$

которые легко выводятся из определения абсолютной величины.

3.4 Сечения в множестве вещественных чисел

Аксиому непрерывности вещественных чисел можно формулировать различными способами. Сейчас мы сформулируем ее с помощью понятия сечения в множестве вещественных чисел $\mathbf{R}$.

Определение 1. Разбиение множества вещественных чисел $\mathbf{R}$ на два множества $A \subset \mathbf{R}$ и $B \subset \mathbf{R}$ называется сечением этого множества, если выполнены условия:
1. $A \cup B = \mathbf{R}$,
2. $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$,
3. если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$.

Свойство 1 означает, что каждое вещественное число попадает по крайней мере в одно из множеств A или B. Свойство 3 свидетельствует, что $A \cap B = \varnothing$. Таким образом, каждое вещественное число попадает только в одно из множеств A или B. Множество A называется нижним, а множество B – верхним классом данного сечения. Сечение множества вещественных чисел множествами A и B обозначают $A \mid B$.

Простые примеры сечений можно получить следующим образом. Фиксируем число $\alpha \in R$, далее определим множества A и B равенствами:

$$A := \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq \alpha\}, \quad B := \{x \in \mathbf{R} \mid x > \alpha\} \tag{1}$$

$$A := \{x \in \mathbf{R} \mid x < \alpha\}, \quad B := \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq \alpha\} \tag{2}$$

Так определенные множества образуют сечение, что устанавливается проверкой условий Определения 1. В обоих случаях говорят, что сечение производится числом α и пишут $\alpha = A \mid B$.

Отметим два свойства сечений произвольным числом α.

Свойство 1. Для сечения (1) в классе A есть наибольшее число, им является α, в классе B нет наименьшего числа. Для сечения (2) в классе A нет наибольшего числа, в классе B есть наименьшее число, им является α.

► Рассмотрим случай сечения (1). Из формул (1) видно, что α является наибольшим числом в классе A. Покажем, что в классе B нет наименьшего числа. Допустим противное, что в классе B есть наименьшее число, обозначим его β. Поскольку $\beta \in B$, то в силу второго равенства (1) $\alpha < \beta$, следовательно $\alpha + \alpha < \alpha + \beta \Longrightarrow \alpha < (\alpha + \beta)/2$. Откуда, снова в силу второй формулы (1), получаем $(\alpha+\beta)/2 \in B$. Аналогично из неравенства $\alpha < \beta$ получим $(\alpha+\beta)/2 < \beta$, так как β – наименьшее число в B, то $(\alpha+\beta)/2 \in A$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Совершенно аналогично доказывается, что в случае сечения (2) в классе A нет наибольшего числа ◄

Свойство 2. Число, производящее сечение, единственно.

► Допустим, что существует сечение $A \mid B$, которое определяется двумя разными числами $\alpha = A \mid B$ и $\beta = A \mid B$, $\alpha \neq \beta$. Пусть, например, $\alpha < \beta$. Тогда из доказательства предыдущего свойства получим $\alpha < (\alpha+\beta)/2 < \beta$. Из неравенства $\alpha < (\alpha+\beta)/2 \Longrightarrow (\alpha+\beta)/2 \in B$, а из неравенства $(\alpha+\beta)/2 < \beta \Longrightarrow (\alpha + \beta)/2 \in A$. Это противоречит тому, что множества A и B не пересекаются ◄

Свойство непрерывности вещественных чисел в терминах сечений можно сформулировать следующим образом:

Принцип Дедекинда. Для всякого сечения $A \mid B$ в множестве $\mathbf{R}$ существует число α, которое производит это сечение $\alpha = A \mid B$. Это число будет либо наибольшим в нижнем классе A, либо наименьшим в верхнем классе B.

Можно доказать равносильность аксиомы непрерывности 7 и принципа Дедекинда, это сделано, например, в книге Л.В. Кудрявцева.

Лекция 4. Основные Леммы, связанные с полнотой множества вещественных чисел

Здесь мы рассмотрим некоторые принципы, каждый из которых можно было положить в основу построения теории вещественных чисел в качестве аксиомы полноты (непрерывности). Впоследствии эти принципы будут использованы при доказательстве различных теорем анализа.

4.1 Лемма Коши – Кантора о вложенных отрезках

Определение 1. Числовые отрезки $\{[a_n, b_n]\}$, $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, называются системой вложенных отрезков, если каждый следующий отрезок содержится в предыдущем: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

Заметим, что для любых двух отрезков системы $[a_n, b_n]$, $[a_m, b_m]$ выполняется неравенство $a_m \leq b_n$ при $\forall\, m$ и n. В противном случае мы получили бы неравенства: $a_n \leq b_n < a_m \leq b_m$. То есть эти отрезки не имеют общих точек, что противоречит Определению 1 системы вложенных отрезков: отрезок с большим номером должен содержаться в любом отрезке с меньшим номером.

Определение 2. Пусть задана система отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, $a_n, b_n \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Длины отрезков $d_n = b_n - a_n$ называются стремящимися к нулю при возрастании номера n, если для $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε, то для $\forall\, n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство $d = b_n - a_n < \varepsilon$.

Лемма 1 (Коши – Кантора). Всякая система вложенных отрезков имеет непустое пересечение. Если длины отрезков стремятся к нулю с возрастанием номера, то существует единственная общая точка всех отрезков.

► Обозначим $A = \{a_m\}$ и $B = \{b_n\}$ – множества чисел, являющиеся левыми и правыми концами отрезков, соответственно. Оба множества не пусты и $a_m \leq b_n$ при $\forall\, m$ и n. Таким образом, для числовых множеств A и B выполнены условия аксиомы полноты. Найдется число $c \in \mathbf{R}$ такое, что для $\forall\, a_m \in A$ и $\forall\, b_n \in B$ выполняется неравенство $a_m \leq c \leq b_n$. В частности, $a_n \leq c \leq b_n$ для $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Это означает, что точка $c \in \cap_n [a_n, b_n]$, то есть пересечение не пусто.

Докажем единственность точки "c" при стремлении к нулю длин отрезков. Пусть существуют две точки c_1 и c_2, общие для всех отрезков, примем $c_1 < c_2$. Тогда

$$a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n \Longrightarrow b_n - a_n \geq c_2 - c_1 > 0.$$

Это противоречит условию $b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$ ◄

Замечание 1. Для интервалов и полуинтервалов множества вещественных чисел $\mathbf{R}$ аналог принципа вложенных отрезков не существует. Например,

$$\cap_n\, (0, \frac{1}{n}) = \cap_n\, (0, \frac{1}{n}\,] = \varnothing$$

Замечание 2. Для множества рациональных чисел $\mathbf{Q}$ принцип вложенных отрезков не справедлив. Например, возьмем систему вложенных отрезков: $[1;2]$, $[1,4;1,5]$, $[1,41;1,42]$,..., то есть систему отрезков, содержащих число $\sqrt{2}$ и длины которых стремятся к нулю (концы отрезков есть значения корня, вычисленные с недостатком и избытком). Очевидно не существует рационального числа, принадлежащего всем отрезкам (таким числом является $\sqrt{2}$).

4.2 Лемма Бореля – Лебега о конечном покрытии

Определение 3. Говорят, что система множеств $S = \{X\}$ покрывает множество Y, если $Y \subset \cup X$, $X \in S$, то есть $\forall\, y \in Y$ содержится по крайней мере в одном из множеств X.

Подмножество множества $S = \{X\}$ называется подсистемой S. Подсистема сама является системой множеств.

Лемма 2 (Бореля – Лебега). В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

► Пусть $S = \{V\}$ – система интервалов, покрывающих отрезок $I_1 = [a,b]$. Если отрезок I_1 не допускает покрытия конечным набором интервалов системы S, то поделив отрезок I_1 пополам, получим, что по крайней мере одна из половинок не допускает конечного покрытия, обозначим ее I_2. Продолжая эту процедуру деления отрезков пополам, получим систему вложенных отрезков, не допускающих конечного покрытия интервалами системы $S = \{V\}$. Поскольку длина отрезка, полученного на n-том шаге деления, равна $(b-a)/2^n$, то длины отрезков I_n стремятся к нулю при $n \to \infty$. По Лемме 1 о вложенных отрезках существует точка "c", принадлежащая всем отрезкам I_n, $n \in \mathbf{N}$. Поскольку $(\cdot)c \in [a,b]$, найдется интервал $(\alpha,\beta) \in S$, содержащий эту точку. Пусть $\varepsilon = \min\{c-\alpha, \beta-c\}$. Возьмем в системе $\{I_n\}$ отрезок, длина которого $d_n = |\,I_n| < \varepsilon$. Поскольку $(\cdot)\,c \in I_n$ и $|I_n| < \varepsilon$ получаем, что $I_n \subset (\alpha,\beta)$. Но это противоречит тому, что отрезок I_n нельзя покрыть конечным набором интервалов системы S ◄

4.3. Лемма Больцано – Вейерштрасса о предельной точке

Определение 4. Точка $c \in \mathbf{R}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbf{R}$, если любая окрестность точки "c" содержит бесконечно много точек множества X.

Лемма 3 (Больцано – Вейерштрасса). Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет по крайней мере одну предельную точку.

► Пусть $X \subset \mathbf{R}$ – заданное множество. Ограниченность множества X означает, что существуют числа $a, b \in \mathbf{R}$ такие, что для $\forall\, x \in X$ будет $a \le x \le b$, то есть $X \subset [a,b]$. Покажем, что по крайней мере одна из точек отрезка $[a,b]$ является предельной для множества X.

Если это не так, то каждая точке $x \in I = [a, b]$ имеет окрестность $U(x)$, в которой либо нет точек множества X, либо их конечное число. Совокупность таких окрестностей $S = \{U(x)\}$, построенная для каждой точки $x \in X$ образует покрытие отрезка $I = [a, b]$ интервалами $U(x)$, из которых можно извлечь конечное число интервалов $U(x_1)$,...,$U(x_n)$, покрывающих отрезок $I = [a, b]$. Поскольку $X \subset I$, эта же система интервалов покрывает и множество X. Однако в каждом интервале $U(x_i)$, $i = \overline{1, n}$, лишь конечное число точек множества X, значит и в их объединении тоже конечное число точек X, то есть X – конечное множество. Полученное противоречие завершает доказательство ◄

Следствие. Каждая точка числового промежутка, в том числе бесконечного, является его предельной точкой.

4.4 Верхняя и нижняя грани числового множества

Определение 1. Множество $X \subset \mathbf{R}$ называется ограниченным снизу, если существует такое число $a \in \mathbf{R}$, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \geq a$.

Множество $X \subset \mathbf{R}$ называется ограниченным сверху, если существует такое число $b \in \mathbf{R}$, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \leq b$.

Определение 2. Множество $X \subset \mathbf{R}$ называется ограниченным, если оно ограничено снизу и сверху, то есть существуют такие числа $a, b \in \mathbf{R}$, что для $\forall x \in \mathbf{R}$ выполняются неравенства $a \leq x \leq b$.

Множество, не являющееся ограниченным, называется неограниченным.

Например, множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ ограничено снизу и неограничено сверху. Отрезок $[a, b]$ и интервал (a, b) являются ограниченными множествами в $\mathbf{R}$. Множество вещественных чисел $\mathbf{R}$ и множество целых чисел $\mathbf{Z}$ являются неограниченными.

Верхняя и нижняя грани числового множества

Определение 3. Пусть числовое множество $X \subset \mathbf{R}$ ограничено сверху. Число "b" называется верхней гранью множества X, если:
1. $x \leq b$ для $\forall\, x \in X$,
2. для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X$, что $x > b - \varepsilon$.

Пусть числовое множество $X \subset \mathbf{R}$ ограничено снизу. Число "a" называется нижней гранью множества X, если:
1. $x \geq a$ для $\forall\, x \in X$,
2. для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X$, что $x < a + \varepsilon$.

Верхнюю и нижнюю грани множества $X \subset \mathbf{R}$ обозначают символами

$$b = \sup X = \sup_{x \in X}\{x\}, \quad a = \inf X = \inf_{x \in X}\{x\}$$

Очевидно, если для некоторого множества $X \subset \mathbf{R}$ имеется $\sup X$ $(\inf X)$, то это множество ограничено сверху (снизу). Это сразу следует из Определения 3.

Пример. Пусть $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, тогда

$$\sup\,[a, b] = \sup\,(a, b) = b, \quad \inf\,[a, b] = \inf\,(a, b) = a.$$

Этот пример показывает, что верхняя и нижняя грани могут принадлежать или не принадлежать самому множеству.

Дадим еще одно определение верхней и нижней граней числового множества.

Число $x_0 \in X \subset \mathbf{R}$ называется наибольшим (наименьшим) элементом множества X, если для $\forall\, x \in X$, будет $x \leq x_0$ ($x \geq x_0$). Пишется $x_0 = \max X$ ($x_0 = \min X$).

Определение 4. Пусть $X \subset \mathbf{R}$ и B – множество всех чисел, ограничивающих сверху множество X, тогда число $b = \min B$ называется верхней гранью множества X.

Пусть $X \subset \mathbf{R}$ и A – множество всех чисел, ограничивающих снизу множество X, тогда число $a = \max A$ называется нижней гранью множества X.

Покажем, что Определение 4 является по существу другой формулировкой Определения 3.

► Из условия $b \in B \Longrightarrow x \leq b$ для $\forall\, x \in X$, то есть выполняется условие 1 Определения 3. Условие $b = \min B$ означает, что любое число $(b - \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, не ограничивает сверху множество X, то есть $\exists\, x \in X$, что $x > b - \varepsilon$ – это есть условие 2 Определения 3. Аналогично доказывается утверждение для нижней грани ◄

Если множество $X \subset \mathbf{R}$ не ограничено сверху или снизу, то по Определению считают, что $\sup X = +\infty$ или $\inf X = -\infty$.

Заметим, что не всякое, даже ограниченное множество, имеет максимальный или минимальный элемент. Например множество $X = (0; 1)$ не имеет min и max элемента, множество $X = [0; 1)$ имеет min элемент, но не имеет max элемента.

Покажем, что среди всех чисел, ограничивающих данное множество сверху (снизу), есть наименьшее (наибольшее). Ответ на вопрос о существовании верхней и нижней граней числового множества дает следующая теорема.

Теорема 1. Всякое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет и притом единственную верхнюю (нижнюю) грань.

► Рассмотрим случай верхней грани. Единственность минимального элемента числового множества очевидна, это следует из аксиомы упорядоченности вещественных чисел. Поэтому нам нужно доказать лишь существование верхней грани множества.

Пусть $X \subset \mathbf{R}$ – данное множество, $B = \{b \in \mathbf{R} \,|\, x \leq b,\ \forall\, x \in X\}$ – множество чисел, ограничивающих множество X сверху. По условию $X \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$, тогда в силу аксиомы полноты $\exists\, c \in \mathbf{R}$ такое, что для $\forall\, x \in X$ и $\forall\, b \in B$ будет

$x \le c \le b$. Так как число "c" ограничивает сверху множество X, то $c \in B$ и $c = \min B$. По Определению 4 получим $c = \sup X$. Аналогичным способом доказывается второе утверждение теоремы для нижней грани ◄

Теорема 2. Для любого $a \in \mathbf{R}$ существует $n \in \mathbf{N}$ такое, что $n > a$.

► Если утверждение неверно, то нашлось бы такое $a \in \mathbf{R}$, что для $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполнялось бы неравенство $a \ge n$, то есть множество $\mathbf{N}$ было бы ограничено сверху. Тогда, согласно Теореме 1, у множества $\mathbf{N}$ существовала бы конечная верхняя грань $\beta = \sup \mathbf{N} < +\infty$. В силу определения верхней грани $\exists\, n \in \mathbf{N}$, что $n > \beta - 1$, то есть $n + 1 > \beta$. Но $n + 1 \in \mathbf{N}$, поэтому неравенство $n + 1 > \beta$ противоречит соотношению $\beta = \sup \mathbf{N} < +\infty$. ◄

Следствие (Принцип Архимеда). Для любых $a, b \in \mathbf{R}$ таких, что $0 < a < b$ $\exists\, n \in \mathbf{N}$, для которого выполняется неравенство $na > b$.

► Действительно, согласно Теореме 2, для b/a существует такое $n \in \mathbf{N}$, что $n > b/a$, и потому $na > b$. ◄

Упражнение. Доказать

$$[\alpha, \beta] = \cap_n [a_n, b_n], \quad \alpha = \sup\, A,\, \beta = \inf\, B, \quad A = \{a_n\},\ B = \{b_n\}.$$

► Множество A ограничено сверху (любым b_n), поэтому существует конечная верхняя грань $\alpha = \sup A$. Аналогично множество B ограничено снизу (любым a_n), поэтому имеет конечную нижнюю грань $\beta = \inf B$. Причем $\alpha \le \beta$, так как $\alpha \le b_n$, а β – наибольшее из чисел, ограничивающих множество $B = \{b_n\}$ снизу.

Из неравенства $a_n \le \alpha \le \beta \le b_n$ следует, что $[\alpha, \beta] \subset [a_n, b_n]$ при $\forall\, n \in \mathbf{N}$, то есть $[\alpha, \beta] \subset \cap_n [a_n, b_n]$.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in \cap_n [a_n, b_n]$, $\curvearrowright$ $a_n \le x \le b_n$ для $\forall\, n$. Очевидно $\alpha \le x \le \beta$, то есть $x \in [\alpha, \beta]$ и $\cap_n [a_n, b_n] \subset [\alpha, \beta]$. Из двух включений получим требуемое равенство ◄

Примеры.

1. Показать, что множество всех правильных рациональных дробей m/n, где m, n – натуральные числа, $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти нижнюю и верхнюю грани множества.

Решение. Из неравенства $0 < m/n < 1$ видно, что не существует наименьшего и наибольшего элементов рассматриваемого множества. Докажем, что $\inf\{m/n\} = 0$. Проверим выполнение условий Определения 3:
1^0. $m/n \ge 0$; 2^0. Для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, m/n$, что $m/n < \varepsilon$.
Аналогично докажем, что $\sup\{m/n\} = 1$:
1^0. $m/n \le 1$; 2^0. Для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, m/n$, что $m/n > 1 - \varepsilon$.

2. Пусть $X = \{x\}$ – некоторое множество чисел, а $-X = \{-x\}$ – множество противоположных чисел. Доказать,что:
а) $\inf(-X) = -\sup X$; б) $\sup(-X) = -\inf X$.

► Докажем первое равенство. Пусть $\inf\{x\} = -a$, тогда
1^0. $-x \geq -a$; 2^0. $\forall \varepsilon > 0\ \exists\,(-x) \in -X,\ -x < -a + \varepsilon$.
Из 1^0 следует $x \leq a$ для $\forall x \in X$,
Из 2^0 получим $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X,\ x > a - \varepsilon$.
Следовательно, $a = \sup X$, то есть $\inf(-X) = -\sup X$. ◄

3. Пусть $Z = X + Y$, $Z = \{z\}$; $z = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$.
Доказать равенства:
а) $\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$,
б) $\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.
Решение.

а) Обозначим $a_1 = \inf\{x\}$, $a_2 = \inf\{y\}$. Тогда
1^0. $\forall\, x \in X,\ x \geq a_1$; $\forall\, y \in Y,\ y \geq a_2$;
2^0. $\forall\, \varepsilon_1 > 0\ \exists\, x < a_1 + \varepsilon_1$; $\forall\, \varepsilon_2 > 0\ \exists\, y < a_2 + \varepsilon_2$.
Из 1^0 получим $\forall\,(x + y) \in Z,\ x + y \geq a_1 + a_2$,
Из 2^0 следует $\forall\, \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\ \exists\,(x + y) < a_1 + a_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.
Это означает $\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

б) Обозначим $a_1 = \sup\{x\}$, $b_2 = \sup\{y\}$. Тогда
1^0. $\forall\, x \in X,\ x \leq b_1$; $\forall\, y \in Y,\ y \leq b_2$;
2^0. $\forall\, \varepsilon_1 > 0\ \exists\, x > b_1 - \varepsilon_1$; $\forall\, \varepsilon_2 > 0\ \exists\, y > b_2 - \varepsilon_2$.
Из 1^0 получим $\forall\,(x + y) \in Z,\ x + y \leq b_1 + b_2$,
Из 2^0 следует $\forall\, \varepsilon_1,\ \varepsilon_2\ \exists\,(x| + y) < b_1 + b_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$.
Это означает $\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

4. Пусть $X \subset \mathbf{R}$, $Y \subset \mathbf{R}$ и $Z = X - Y = \{z \in Z \mid z = x - y,\ x \in X,\ y \in Y\}$.
Доказать, что
$$\sup\,(X - Y) = \sup X - \inf Y,$$
$$\inf\,(X - Y) = \inf X - \sup Y.$$
Решение.
$\sup\,(X - Y) = \sup\,(X + (-Y)) = \sup X + \sup\,(-Y) = \sup X - \inf Y$,
$\inf\,(X - Y) = \inf\,(X + (-Y)) = \inf X + \inf\,(-Y) = \inf X - \sup Y$.

4.5 Мощность множества

Для бесконечных множеств нельзя говорить о числе их элементов, количественной характеристикой, обобщающей понятие числа элементов, является мощность множества.

Если множества A и B эквивалентны: $A \sim B$, то говорят, что A и B имеют одинаковую мощность. В частности, все счетные множества эквивалентны и потому имеют одинаковую мощность.

Мощность множества A обычно обозначают символом $card\, A$, используют также другие обозначения.

Пусть A – конечное множество из n элементов. В этом случае под мощностью множества A понимают количество его элементов, то есть $card\, A = n$. Пустое множество также считается конечным, полагают $card\, \varnothing = 0$.

Говорят, что счетное множество имеет счетную мощность.

Мощность множества $\mathbf{R}$ называется мощностью континуума и обозначается $card\, \mathbf{R} = c$. Любой числовой промежуток из множества $\mathbf{R}$ имеет мощность "c".

Если задано некоторое множество E, то множество, элементами которого являются все подмножества $P\,(E)$ множества E, имеет мощность $card\, P\,(E) > card\, E$.

Если E – конечное множество из n элементов, то $card\, E = n$, $card\, P\,(E) = 2^n$.

Если E – счетное множество, то $P\,(E)$ имеет мощность континуума, то есть $card\, P\,(E) = c$.

Еще при возникновении теории множеств возник вопрос о том, существуют ли множества имеющие мощность, промежуточную между счетной мощностью и мощностью континуума. Было высказано предположение, называемое гипотезой континуума, что промежуточные мощности отсутствуют. Вопрос оказался глубоко затрагивающим основы математики. Он был решен в 1963 г. современным американским математиком П. Коэном. Коэн доказал неразрешимость гипотезы континуума, показав, что она сама, как и ее отрицание, не противоречит принятой в теории множеств аксиоматике.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема (Кантора – Бернштейна). Пусть A и B – произвольные множества. Если в A имеется подмножество эквивалентное множеству B, а в множестве B имеется подмножество эквивалентное A, то множества A и B эквивалентны (равномощны).

4.6 Теоремы Кантора для множеств рациональных и вещественных чисел

Теорема 1 (Кантора). Множество всех рациональных чисел счетно.

► Чтобы доказать утверждение, нужно показать эквивалентность множеств $\mathbf{Q} \sim \mathbf{N}$. Пусть $\mathbf{Q} = \{r\}$, где $r = m/n$ – несократимая дробь $n > 0$. Число 0 будем считать записанным одним способом $0 = 0/1$. Рациональное число m/n задается упорядоченной парой целых чисел (m, n). Выбирая каждый раз для записи рационального числа единственную пару (m, n) с минимально возможным натуральным знаменателем $n \in \mathbf{N}$, мы получим, что множество $\mathbf{Q}$ эквивалентно некоторому подмножеству множества $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ и потому счетно ◄

Теорема 2 (Кантора). Множество всех вещественных чисел не счетно.

► Предварительно докажем, что множество всех вещественных чисел отрезка $[0; 1]$ не счетно. Затем из этого результата сделаем заключение о несчетности всего множества $\mathbf{R}$.

Допустим, что множество $[0; 1]$ – счетно и все его числа могут быть занумерованы: x_1, x_2,..., x_n,... Разделим отрезок $[0; 1]$ на три равные части. Из трех отрезков выберем тот, который не содержит элемент x_1, этот отрезок обозначим $[a_1, b_1]$. Отрезок $[a_1, b_1]$ также разделим на три части и возьмем ту часть, которая не содержит число x_2, отрезок обозначим $[a_2, b_2]$. Продолжая процесс деления до бесконечности, получим систему вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, причем число $x_n \notin [a_n, b_n]$ при $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

По Лемме о вложенных отрезках существует $(\cdot)\, c \in [0; 1]$, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$. Но $(\cdot)\, c$ отрезка $[0; 1]$ по построению не совпадает ни с одной точкой множества $\{x_n\}$. Значит множество вещественных чисел отрезка $[0; 1]$ несчетно. Отсюда следует, что и все множество $\mathbf{R}$ несчетно, ибо если $\mathbf{R}$ – счетно, то и любое его подмножество, в частности $[0; 1]$, счетно ◄

Лекция 5. Теория пределов числовой последовательности

Понятие предела является фундаментальным в математическом анализе. Операция предельного перехода позволила математически безупречно обосновать основные разделы математического анализа – дифференциальное и интегральное исчисления. Однако понятие предела не лежало в основе дифференциального и интегрального исчисления при их возникновении. Впервые понятие предела появилось в 17 веке у Дж. Валлиса (английский математик 1616-1703 г.г.). Однако никому из великих математиков 18 века, в том числе создателям дифференциального исчисления Ньютону и Лейбницу, не приходила идея обосновать новое исчисление на понятии предела и тем самым ответить на справедливую критику. Характерна позиция Эйлера, который в предисловии своей книги "Дифференциальное исчисление" отчетливо говорит о пределе, но нигде в книге им не пользуется.

Перелом в рассматриваемом вопросе был сделан О. Коши (1789-1857 г.г.) в книге "Алгебраический анализ" и последующих работах. Им впервые была развита теория пределов, послужившая средством строго обоснования всего математического анализа.

Заслуги Коши разделяют и другие ученые, среди них особое место занимает Больцано, в ряде случаев опередивший Коши и других математиков. Однако его работы не получили распространения и о них вспомнили спустя многие десятилетия.

5.1 Предел числовой последовательности

Определение 1. Пусть каждому натуральному числу $n \in \mathbf{N}$ поставлено в соответствие вещественное число $x_n \in \mathbf{R}$, то есть задана функция $x_n = f(n)$ или $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$. Упорядоченное счетное множество чисел $\{x_n\}$, расположенных в порядке возрастания номеров n, называется последовательностью.

Числа x_n называют элементами или членами последовательности, саму последовательность обозначают $\{x_n\}$ или x_1, x_2,..., x_n,... По своему определению последовательность содержит бесконечное множество элементов.

Отметим два отличия последовательности от произвольного множества:
1. В множестве каждый элемент встречается один раз, последовательность может содержать одинаковые элементы;
2. Множество аморфно относительно расположения элементов, в последовательности элементы упорядочены – расположены в порядке возрастания номеров.

Определение 2. Число "a" называется пределом последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$, если для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для $\forall\, n > n_\varepsilon$ выполняется неравенство

$$| x_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$, $n \to \infty$.

В символической форме Определение 2 записывается так

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n := (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, n_\varepsilon \in \mathbf{N})(\forall\, n > n_\varepsilon) : | x_n - a| < \varepsilon.$$

Запись n_ε подчеркивает зависимость этого числа от ε. Неравенство (1) эквивалентно неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Последовательность, у которой существует предел, называется сходящейся. Последовательность, не имеющая предела (не являющаяся сходящейся), называется расходящейся.

Можно дать другое определение предела, используя понятие окрестности.

Определение 3. Число "a" называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любой его окрестности $U(a)$ содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Эквивалентность двух определений легко проверить, если заметить, что в любой окрестности $U(a)$ точки "a" содержится некоторая ε – окрестность этой точки $U(a, \varepsilon)$.

В символической записи Определение 3 выглядит так:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n := (\forall\, U(a))(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall\, n > n_0) \,:\, x_n \in U(a).$$

Примеры.

1) Рассмотрим последовательности:

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n = -\frac{1}{n}, \quad x_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Все три последовательности имеют пределом 0, поскольку

$$| x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \ \text{ при } n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Отметим, что элементы первой последовательности все время больше своего предела, второй – меньше, третьей – то больше, то меньше.

2) Предел последовательности

$$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n} \,:\, 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5}, \cdots$$

равен нулю. Действительно

$$| x_n - 0| \le \frac{3}{n} < \varepsilon \ \text{ при } n > \frac{3}{\varepsilon}$$

Здесь переменная то приближается к своему пределу, то удаляется от него.

Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 1 (о единственности предела). Числовая последовательность не может иметь более одного предела.

► Допустим противное. Пусть у последовательности $\{x_n\}$ имеются два различных предела $a = \lim x_x$ и $b = \lim x_n$, причем $a < b$. Возьмем $\varepsilon = (b - a)/2$. По Определению 2 предела имеем неравенства:

$$n > n_a \,:\, a - \frac{1}{2}(b - a) < x_n < a + \frac{1}{2}(b - a) \Longrightarrow x_n < \frac{1}{2}(b + a)$$

$$n > n_b : b - \frac{1}{2}(b-a) < x_n < b + \frac{1}{2}(b-a) \Longrightarrow x_n > \frac{1}{2}(b+a)$$

При $n > \max\{n_a, n_b\}$ должны выполняться оба неравенства, что невозможно ◀

Теорема 2 (о трех последовательностях). Пусть даны три последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, для которых $x_n \le y_n \le z_n$. Если $\lim x_n = \lim z_n = a$, то и $\lim y_n = a$.

▶ Возьмем $\forall \varepsilon > 0$. По Определению 2 предела имеем

$$\exists n_1,\ n > n_1 : a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$
$$\exists n_2,\ n > n_2 : a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

Тогда для $\forall n > \max\{n_1, n_2\}$ будет

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon.$$

Что означает $\lim y_n = a$ ◀

Теорема 3 (о стабилизации знака последовательности). Если $\lim x_n = a$ и $a < b$ $(a > b)$, то начиная с некоторого номера будет $x_n < b$ $(x_n > b)$.

▶ Пусть $a < b$. Возьмем $\varepsilon = b - a$. По Определению 2 предела $\exists n_b$, что при $\forall n > n_b$ имеем неравенства $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Отсюда следует $x_n < b$. Аналогично рассматривается случай $a > b$ ◀

Следствие 1. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел $a > 0$ $(a < 0)$, то сама переменная $x_n > 0$ $(x_n < 0)$, начиная с некоторого номера n.

Теорема 4 (о предельном переходе в неравенстве). Если $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$ и $x_n \ge y_n$, то $a \ge b$.

▶ Допустим противное, пусть $a < b$. Возьмем число "c" такое, что $a < c < b$. По Теореме 3 (о стабилизации знака):
$\exists n_1$, что для $\forall n > n_1$ будет $x_n < c$,
$\exists n_2$, что для $\forall n > n_2$ будет $y_n > c$.
Тогда для $\forall n > \max\{n_1, n_2\}$ получим $x_n < c < y_n \Longrightarrow x_n < y_n$, что противоречит условию. Значит наше предположение неверно, следовательно $a \ge b$ ◀

Теорема 4 устанавливает допустимость предельного перехода в неравенстве

$$x_n \ge y_n \quad \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \ge \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Из Теоремы 4 непосредственно вытекает:
если $x_n \ge y_n$ и $\lim y_n = +\infty$, то $\lim x_n = +\infty$,
если $x_n \le y_n$ и $\lim y_n = -\infty$, то $\lim x_n = -\infty$.

Замечание. Если в условиях Теоремы 4 вместо неравенства $x_n \ge y_n$ задать строгое неравенство $x_n > y_n$, то из него не следует, что $a > b$.

Например, возьмем $x_n = 1/n$, $y_n = -1/n$. Очевидно при $\forall n$ имеем $x_n > y_n$. Однако $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

Следствие 2. Если $\lim x_n = a$ и $x_n \ge b$ $(x_n \le b)$, то $a \ge b$ $(a \le b)$.

▶ Результат следует из Теоремы 4, если взять $y_n = b$ ◀

5.2 Ограниченные последовательности

Следует различать множество элементов последовательности $\{x_n\}$ и множество чисел, из которых она состоит. Первое всегда бесконечно и состоит из элементов, отличающихся по крайней мере номерами. Второе множество может быть конечным.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если существует такое число b (a), что для $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq b$ $(x_n \geq a)$.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если она ограничена сверху и снизу.

Очевидно, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда существует такое число $M > 0$, что $|\,x_n| \leq M$ для $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Определение 3. Последовательность, не являющаяся ограниченной (сверху, снизу), называется неограниченной (сверху, снизу).

Например, последовательность $\{n\}$ ограничена снизу и не ограничена сверху, последовательность $\{(-1)^n n\}$ – не ограничена, последовательность $\{1/n\}$ – ограничена.

Ограниченность последовательности не гарантирует существование предела. Например, последовательность $\{(-1)^n\}$ – ограничена, но не имеет предела.

Теорема 1. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то она ограничена.

► Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} = a$. По определению предела для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что для $\forall\, n > n_\varepsilon$: $|\,x_n - a| < \varepsilon$. Таким образом, все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с номеров $n > n_\varepsilon$, расположены в окрестности $U\,(a, \varepsilon)$. Вне окрестности находится лишь конечное число членов: x_1, x_2,...,$x_{n\varepsilon}$. Возьмем $d = \max\{|\,a - x_1|,\ |\,a - x_2|, ..., |\,a - x_{n\varepsilon}|,\ \varepsilon\}$. Тогда для $\forall\, n \in \mathbf{N}$ будет $|\,x_n - a| \leq d$, то есть $a - d \leq x_n \leq a + d$ и последовательность $\{x_n\}$ – ограничена ◄

5.3 Монотонные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонно возрастающей (монотонно убывающей), если для $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \leq x_{n+1}$ $(x_n \geq x_{n+1})$.

Монотонно возрастающую последовательность обозначают символом $\{x_n\}\uparrow$, монотонно убывающую последовательность – символом $\{x_n\}\downarrow$.

Теорема 1. Для того, чтобы монотонно возрастающая (убывающая) последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху (снизу). В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\nolimits_n\{x_n\} \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\nolimits_n\{x_n\})$$

► *Необходимость*. Если последовательность имеет предел, то она ограничена (Теорема 1 п. 5.2).

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\} \uparrow$ и ограничена сверху. Ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань $b = \sup_n\{x_n\}$. По Определению верхней грани: $x_n \le b$ и для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что $x_{n_\varepsilon} > b - \varepsilon$. В силу монотонного возрастания последовательности для $\forall\, n > n_\varepsilon$ будет $b - \varepsilon < x_n \le b < b + \varepsilon$. Согласно Определению предела это означает $\lim x_n = b$. Аналогично рассматривается случай монотонно убывающей последовательности ◄

Примеры. Вычислить пределы.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \dfrac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}} = \dfrac{1}{3}.$

2. $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + a + a^2 + ... + a^n}{1 + b + b^2 + ... + b^n}$ $(|\,a| < 1,\ |\,b| < 1).$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-b)(1-a^{n+1})}{(1-a)(1-b^{n+1})} = \frac{1-b}{1-a}.$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}(1 + 2 + ... + n - 1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - n}{n^2} = \dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}[1 - 2 + 3 - ... + (-1)^{n-1}n] = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2}(-1)^{n+1}.$
Предел не существует.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + ... + \dfrac{2n-1}{2^n}\right).$
Преобразуем общий член последовательности

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + ... + \frac{2n-1}{2^n} = 2s_n - s_n =$$
$$= 1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{5}{2^2} - \frac{3}{2^2}\right) + ... + \left(\frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{2n-3}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{2}{2^2} + ... + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} = 1 + \frac{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Окончательно получим $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 3.$

6. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1,\ a > 0.$
Положим $a^{1/n} - 1 = \alpha_n$. Тогда $a = (1+\alpha)^n \ge n\alpha_n$. Это неравенство считаем известным, оно легко доказывается методом математической индукции. Отсюда вытекает неравенство $0 < \alpha_n \le a/n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0,\ a > 1.$

Из равенств $x_n = \frac{a^n}{n!}$, $x_{n+1} = \frac{a}{n+1}\, x_n$
видно, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно убывает и ограничена снизу (например, нулем). Значит она имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1}\, x_n = 0.$$

8. Найти предел последовательности

$$x_n = \sqrt{c + \sqrt{c + \ldots + \sqrt{c}}},\ n \text{ – корней},\ c > 0.$$

Из соотношения $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$ ясно, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает, кроме того, она ограничена сверху, например, $x_n < \sqrt{c} + 1$. Докажем эту оценку методом математической индукции. Для $x_1 = \sqrt{c}$ имеем $x_1 < \sqrt{c} + 1$. Пусть для $n = k$: $x_k < \sqrt{c} + 1$. Тогда $x_{k+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{c} + 1$. Следовательно последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, обозначим его a,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{c + x_n} \Rightarrow a = \sqrt{c + a}.$$

Из последнего уравнения находим

$$a^2 = c + a,\ a = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 + 4c}].$$

9. Доказать существование пределов.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0.$

Докажем методом математической индукции, что $2^n > \frac{n(n-1)}{2}$. При $n = 1$ неравенство очевидно. Пусть оно выполнено при $n = n$. При $n = n + 1$ имеем

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2\frac{n(n-1)}{2} = n(n+1) - 2n > \frac{n(n+1)}{2}$. Таким образом,

$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1} \to 0$ при $n \to \infty$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$

$0 < \frac{2^n}{n!} = \underline{\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3}} \cdot \underline{\frac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n}} < 2^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 2^6 \cdot \frac{1}{2^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Лекция 6. Свойства пределов последовательностей

6.1 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$, имеющая пределом нуль, называется бесконечно малой последовательностью.

Можно дать другое определение бесконечно малой последовательности, без упоминания предела.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно малой последовательностью, если для $\forall\, \varepsilon > 0$ будет $|\, x_n| < \varepsilon$, начиная с некоторого номера n.

Лемма 1. Чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась и $\lim x_n = a$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, n \in \mathbf{N}$: $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность.

► *Необходимость*. Пусть последовательность $\{x_n\}$ – сходится и $\lim x_n = a$. По Определению предела для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что для $\forall\, n > n_\varepsilon$: $|\, x_n - a| < \varepsilon$. Это означает, что последовательность $\{\alpha_n = x_n - a\}$ является бесконечно малой.
Достаточность. Пусть $x_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Это означает, для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что при $\forall\, n > n_\varepsilon : |\, \alpha_n| = |\, x_n - a| < \varepsilon$, то есть $\lim x_n = a$ ◄

На основании Леммы 1 можно дать другое Определение предела последовательности, равносильное прежнему.

Определение 3. Число "a" называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если разность $\{x_n - a = \alpha_n\}$ есть бесконечно малая последовательность.

6.2 Арифметические операции над последовательностями

Определение 4. Суммой, разностью, произведением и частным двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ называются, соответственно, последовательности:

$$\{x_n + y_n\},\ \{x_n - y_n\},\ \{x_n \cdot y_n\},\ \{x_n/y_n\},$$

в последнем случае предполагается, что $y_n \neq 0$ при $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Свойство 1. Сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

► Пусть $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Тогда для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что при $\forall\, n > n_\varepsilon : |\, \alpha_n| < \varepsilon/2$, $|\, \beta_n| < \varepsilon/2$. Из этих неравенств получим $|\, \alpha_n \pm \beta_n| \leq |\, \alpha_n| + |\, \beta_n| < \varepsilon$ ◄

Свойство 2. Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность.

► Пусть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность, $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность. Последнее означает, что $|\, x_n| < M$ для $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$, что для $\forall\, n > n_\varepsilon$:

$$|\, \alpha_n| < \varepsilon/M \implies |\, \alpha_n x_n| = |\, \alpha_n|\, |\, x_n| < (\varepsilon/M) \cdot M = \varepsilon$$

Последовательность $\{\alpha_n x_n\}$ является бесконечно малой ◀

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ называется бесконечно большой, если для $\forall\, M > 0$ будет $|\, x_n| > M$, начиная с некоторого номера n.

Особенно важным является случай, когда бесконечно большая последовательность сохраняет знак, начиная с некоторого номера n. В этом случае, в соответствии со знаком, пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Используя понятие ε – окрестности конечного числа или бесконечности, можно Определение предела сформулировать следующим образом.

Определение 6. Величина "a" (число или один из символов $\pm\infty$) называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любой ε – окрестности $U\,(a, \varepsilon)$ величины "a" существует номер n_ε, что $x_n \in U\,(a, \varepsilon)$ при $\forall\, n > n_\varepsilon$.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми последовательностями существует простая зависимость:

Утверждение. Если последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то последовательность $\{\alpha_n = 1/x_n\}$ будет бесконечно малой. Обратно, если последовательность $\{\alpha_n\}$ $(\alpha_n \neq 0)$ является бесконечно малой, то последовательность $\{x_n = 1/\alpha_n\}$ будет бесконечно большой.

▶ Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$. По Определению бесконечно большой последовательности $\exists\, n_\varepsilon$, что $|\, x_n| > 1/\varepsilon$ при $\forall\, n > n_\varepsilon$. Тогда $|\, \alpha_n| < \varepsilon$, то есть $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность. Аналогично доказывается обратное утверждение ◀

6.3 Свойства пределов при арифметических операциях с последовательностями

Теорема 1. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся и имеют конечные пределы, то их сумма, разность и произведение также сходятся и имеют конечные пределы, причем

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \tag{1}$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = (\lim x_n) \cdot (\lim y_n). \tag{2}$$

▶ Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$. Согласно Лемме 1 имеем $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Из этих равенств получим

$$x_n \pm y_n = a \pm b + (\alpha_n \pm \beta_n), \tag{3}$$

$$x_n \cdot y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n. \tag{4}$$

здесь $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$, $\{a\beta_n\}$, $\{b\alpha_n\}$, $\{\alpha_n\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Переходя в равенствах (3), (4) к пределу при $n \to \infty$, получим равенства (1) и (2). ◀

Следствие 1. Если последовательность $\{x_n\}$ – сходится, то и последовательность $\{cx_n\}$, $c \in \mathbf{R}$, также сходится и $\lim(cx_n) = c\lim x_n$.

Теорема 2. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – сходятся и $y_n \neq 0, \lim y_n \neq 0$, то последовательность $\{x_n/y_n\}$ также сходится, причем

$$\lim(x_n/y_n) = (\lim x_n)/(\lim y_n). \tag{5}$$

► Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, причем $b \neq 0$. Тогда $x_n = a+\alpha_n$, $y_n = b+\beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности. Преобразуем выражение

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{by_n} \tag{6}$$

Последовательность $\{b\alpha_n - a\beta_n\}$ является бесконечно малой. Покажем, что последовательность $\{1/(by_n)\}$ – ограничена. Возьмем случай $b > 0$. Вставим между 0 и b некоторое число $0 < c < b$. Согласно Теореме 3 (о стабилизации знака), начиная с некоторого номера n будет $y_n > c$. Следовательно, $0 < (1/by_n) < (1/bc)$ и последовательность $\{1/by_n\}$ ограничена. Последовательность $\{(b\alpha_n - a\beta_n)/by_n\}$ является бесконечно малой как произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность. Переходя к пределу в равенстве (6), получим равенство (5). Случай $b < 0$ рассматривается аналогично ◄

Лемма 1. Пусть $\{x_n\} \uparrow$ и $\{y_n\} \downarrow$ – некоторые последовательности. Если $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, то обе последовательности сходятся и имеют общий конечный предел: $\lim x_n = \lim y_n$.

► Из условия $\lim(x_n - y_n) = 0$ следует

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon,\ \text{что для } \forall\, n > n_\varepsilon:\ -\varepsilon < x_n - y_n < \varepsilon.$$

Отсюда вытекает

$$x_n < y_n + \varepsilon \leq y_1 + \varepsilon, \quad y_n > x_n - \varepsilon \geq x_1 - \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность $\{x_n\} \uparrow$ и ограничена сверху, последовательность $\{y_n\} \downarrow$ и ограничена снизу. Следовательно они сходятся и имеют конечные пределы. Пусть $\lim x_n = a$, $\lim y_n = b$, так как $\lim(x_n - y_n) = 0$, то $a = b$ ◄

Замечание. Очевидно доказанная Лемма при дополнительном условии $x_n \leq y_n$ при $\forall\, n$ представляет собой аналог Леммы 1 (Коши – Кантора) о вложенных отрезках. Действительно, пусть x_n, y_n – концы отрезка $[x_n, y_n]$. Тогда множество $\{[x_n, y_n]\}$ является системой вложенных отрезков. Условие Леммы 1 $\lim(x_n - y_n) = 0$ означает, что длины отрезков стремятся к нулю. Существует единственная общая для всех отрезков точка.

6.4 Неопределенные выражения

При рассмотрении арифметических операций с последовательностями $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ предполагалось, что они сходятся и имеют конечные пределы, в случае частного $\{x_n/y_n\}$ предполагалось $y_n \neq 0$ и $\lim y_n \neq 0$. Были оставлены без рассмотрения случаи, когда пределы переменных x_n и y_n бесконечны или, если речь идет о частном, когда предел знаменателя равен нулю. Вообще говоря для таких последовательностей утверждения Теорем 1 и 2 не имеют места.

Примеры.

1) $x_n = n + 1,\ y_n = n$:
$\lim(x_n + y_n) = +\infty,\ \lim(x_n - y_n) = 1,$
$\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty,\ \lim(x_n/y_n) = 1.$
2) $x_n = n + (-1)^n,\ y_n = n$:
$\lim(x_n + y_n) = +\infty,\ \lim(x_n - y_n)$ – не существует,
$\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty,\ \lim(x_n/y_n) = 1.$
3) $x_n = n,\ y_n = 2n$:
$\lim(x_n + y_n) = +\infty,\ \lim(x_n - y_n) = -\infty,$
$\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty,\ \lim(x_n/y_n) = 1/2.$

Далее остановимся на четырех особых случаях, представляющих некоторый интерес.

1. Рассмотрим частное x_n/y_n и предположим, что пределы обеих последовательностей равны нулю: $\lim x_n = 0$, $\lim y_n = 0$. Хотя пределы конечны, о пределе их отношения, не зная самих функций, мы никакого заключения сделать не можем. Говорят, что когда переменные $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, выражение x_n/y_n представляет неопределенность вида $0/0$.

Примеры.

1) $x_n = 1/n^2,\ y_n = 1/n, \quad x_n/y_n = 1/n \to 0.$
2) $x_n = 1/n,\ y_n = 1/n^2, \quad x_n/y_n = n \to +\infty.$
3) $x_n = (-1)^{n+1}/n,\ y_n = 1/n, \quad x_n/y_n = (-1)^{n+1}$ – предел не существует.

2. В случае, когда одновременно $x_n \to \pm\infty$ и $y_n \to \pm\infty$ имеет место подобное же обстоятельство. Не зная самих функций, вывода о поведении их отношения сделать нельзя. В этом случае говорят, что выражение x_n/y_n представляет неопределенность вида ∞/∞.

Примеры.

1) $x_n = n,\ y_n = n^2, \quad x_n/y_n = 1/n \to 0.$
2) $x_n = n^2,\ y_n = n, \quad x_n/y_n = n \to \infty.$
3) $x_n = [2 + (-1)^n]\, n,\ y_n = n, \quad x_n/y_n = 2 + (-1)^n$ – предел не существует.

3. Рассмотрим произведение $x_n \cdot y_n$. Если $x_n \to 0$, а $y_n \to \pm\infty$, то исследуя произведение $x_n \cdot y_n$, мы также сталкиваемся с особенностью. Говорят, что при $x_n \to 0$, $y_n \to \pm\infty$ выражение $x_n \cdot y_n$ имеет неопределенность вида $0 \cdot \infty$.

Примеры.

1) $x_n = 1/n^2,\ y_n = n, \quad x_n \cdot y_n = 1/n \to 0,$
2) $x_n = 1/n,\ y_n = n^2, \quad x_n \cdot y_n = n \to \infty,$

3) $x_n = (-1)^{n+1}/n,\ y_n = n, \quad x_n \cdot y_n = (-1)^{n+1}$ – нет предела.

4. Рассмотрим сумму и разность последовательностей $x_n \pm y_n$. Здесь особым является случай, когда x_n и y_n стремятся к бесконечности разных знаков для суммы и одного знака для разности. В этих случаях говорят, что выражение $x_n \pm y_n$ имеет неопределенность вида $+\infty - \infty$.

Примеры.

1) $x_n = 2n,\ y_n = -n, \quad x_n + y_n = n \to \infty,$

2) $x_n = n,\ y_n = -2n, \quad x_n + y_n = -n \to -\infty,$

3) $x_n = n + (-1)^{n+1},\ y_n = -n, \quad x_n + y_n = (-1)^{n+1}$ – предел не существует.

Аналогичные примеры можно привести и для разности двух последовательностей.

Таким образом, мы нашли четыре случая неопределенностей: $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, которые могут появиться при выполнении арифметических операций с последовательностями.

Пример: найти пределы последовательностей

$$x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}},\ y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},\ z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

Выражения x_n, y_n представляют собой неопределенность вида ∞/∞. Чтобы найти пределы, преобразуем их

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1+1/n}} \to 1, \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} \to 1$$

Выражение z_n является суммой, причем число слагаемых растет с ростом n. Заметим, что каждое слагаемое меньше первого и больше последнего, поэтому

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < z_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}, \quad \text{то есть } x_n < z_n < y_n$$

Отсюда следует $\lim z_n = 1$ при $n \to \infty$.

Лекция 7. Число "e" как предел последовательности. Подпоследовательности

7.1 Перестановки и сочетания элементов

Определение 1. Конечное упорядоченное множество элементов назовем группой. Группы, отличающихся только расположением элементов, называют перестановками.

Определение 2. Множество, содержащее m элементов из n заданных, $m \leq n$, называется сочетанием из n элементов по m и обозначается C_n^m. По определению полагают $C_n^0 = 1$.

Из Определения 2 вытекают два свойства сочетаний:
1. $C_n^m = C_n^{n-m}$, $m = 0, 1, ..., n$.
2. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$, $m = 0, 1, ..., n-1$.

Лемма. Если P_n – число перестановок в группе из n элементов, $n > 1$, то $P_n = n\, P_{n-1}$. Если C_n^m – число сочетаний из n элементов по m, то

$$C_n^m = \frac{n}{m}\, C_{n-1}^{m-1}.$$

► Доказательство первого утверждения очевидно. Докажем второе. Пусть $A = \{a_k\}$, $k = 1, 2, ..., n$, – множество из n элементов. Фиксируем элемент a_k множества A, из оставшихся $(n-1)$ элементов образуем сочетания по $(m-1)$ элементу, то есть C_{n-1}^{m-1} сочетаний. Поскольку элемент a_k можно выбрать n способами, то общее число полученных сочетаний $S = n\, C_{n-1}^{m-1}$. Каждое сочетание из m элементов учтено в этой сумме m раз. Действительно, сочетание из m первых элементов $(a_1, ..., a_m)$ учитывается в сумме S всякий раз при выборе элемента $\{a_k\}$, с индексом $k = 1, 2, ..., m$; если $k > m$, то сочетаний с указанными элементами нет. Аналогичная ситуация будет для всех других сочетаний из m элементов. Таким образом только $(n/m)C_{n-1}^{m-1}$ сочетаний из общего числа $S = n\, C_{n-1}^{m-1}$ будут различными. ◄

Утверждение. Число всевозможных перестановок в группе из n элементов равно $P_n = n!$ $(n! = 1 \cdot 2 \cdots n)$. Для числа сочетаний C_n^m справедлива формула

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_m P_{n-m}} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

► Оба утверждения легко выводятся из Леммы ◄

Формула бинома Ньютона

Утверждение. Имеет место равенство

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m \tag{1}$$

► Рассмотрим произведение n биномов и преобразуем его, раскрыв скобки,

$$(a+b_1)(a+b_2)\cdots(a+b_n) = a^n + (b_1+\cdots+b_n)\,a^{n-1} + \\ +(b_1b_2+\cdots+b_{n-1}b_n)\,a^{n-2}+\cdots+b_1b_2\cdots b_n \qquad .$$

Коэффициент при a^n можно записать как C_n^0, коэффициент при a^{n-1} представляет собой сочетание из n элементов по одному, коэффициент при a^{n-2} – сочетание из n элементов по два и т. д. Коэффициент при a^k представляет собой сочетание из n элементов по k, то есть C_n^k. Положим $b_1 = b_2 = \cdots = b$. В результате получим формулу (1) ◄

Замечание. Формулу (1) можно доказать с помощью метода математической индукции.

Неравенство Бернулли. При $\forall\, x > -1$ и $\forall\, n \in N$ имеем неравенство

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

► При $n = 1$ неравенство справедливо. Пусть оно справедливо для $n \in N$. Докажем, что оно верно и для $n+1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = \\ = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$$

По принципу индукции неравенство верно ◄

7.2 Число "e" как предел последовательности

Мы используем здесь операцию предельного перехода для определения нового, до сих пор не встречавшегося нам числа, которое имеет исключительно важное значение как для самого анализа, так и для его приложений.

Теорема 1. Последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = (1+1/n)^n$, сходится и имеет конечный предел, обозначаемый символом "e",

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

► Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = (1+1/n)^{n+1}$. Эта последовательность ограничена снизу, например нулем (все члены положительны). Докажем, что последовательность $\{y_n\}$ монотонно убывает:

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n \Big/ \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \frac{n^{2n}}{(n^2-1)^n}\cdot\frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1} \geq \left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\frac{n}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1} = 1$$

Таким образом $y_{n-1} > y_n$ и последовательность $\{y_n\}\downarrow$. Следовательно существует конечный предел $\lim(1+1/n)^{n+1}$ при $n\to\infty$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ имеет тот же предел

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} x_n$$

По примеру Эйлера предел последовательности $\{x_n\}$ обозначают "e" ◀

Замечание. Хотя последовательность

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, ...$$

и сходится к числу $e = 2,718...$, но весьма медленно: $x_1 = 2$, $x_2 = 2,25$, $x_3 = 2,37, \ldots$, $x_{100} = 2,705$. Последовательность $\{z_n\}$, где

$$z_n = 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

которая также сходится и имеет предел "e", гораздо удобнее для вычисления числа "e", уже z_7 дает точность пять знаков.

В математике и ее приложениях широко применяются логарифмы по основанию e, для них существует специальное название – натуральные логарифмы и обозначение, например натуральный логарифм числа $a > 0$ записывается так $\ln a$, основание логарифма здесь не указывается.

Примеры.

1. Доказать неравенство

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

▶ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1 \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

$1 < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. ◀

2. Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$, $a > 0$.

▶ Обозначим $a^{1/n} - 1 = t$, тогда $a^{1/n} = 1 + t$, $\frac{1}{n} = \log_a(1+t)$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{1/n}-1}{1/n} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{1/t}} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a$. ◀

7.3 Подпоследовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса

Определение 1. Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, $k = 1, 2, ...$. Тогда последовательность $\{y_k\} = \{x_{n_k}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Иначе говоря, если задана последовательность $\{x_n\}$ и из некоторого бесконечного подмножества ее элементов образована новая последовательность с сохранением порядка следования элементов, то она называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

В подпоследовательности $\{y_k\} = \{x_{n_k}\}$ индекс k является номером элемента этой последовательности, а n_k – его номер в исходной последовательности $\{x_n\}$. Заметим, что всегда $n_k \geq n$, ибо любая подпоследовательность получается путем удаления части элементов последовательности $\{x_n\}$.

Справедливы два утверждения.

1. Если последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = a$, то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.

► Согласно Определению 3 предела последовательности $\{x_n\}$, все ее элементы, начиная с некоторого номера n, содержатся в любой окрестности $U(a)$. Там же содержатся и все элементы любой подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, начиная с номера n_k, поскольку $n_k \geq n$. Это означает $\lim x_{n_k} = a$ ◄

2. Если все подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$ сходятся, то они имеют общий предел, к этому же пределу сходится и сама последовательность $\{x_n\}$.

► Сама последовательность $\{x_n\}$ есть частный случай подпоследовательности. Поскольку по условию $\{x_n\}$ сходится, то и любая подпоследовательность, в силу утверждения 1, сходится и имеет тот же предел. ◄

Замечание. Если последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела, это не исключает возможности существования предела у какой-либо ее подпоследовательности. Например, последовательность $\{x_n = (-1)^{n+1}\}$ не имеет предела, но подпоследовательности из четных и нечетных элементов имеют пределы.

В случае неограниченной последовательности не всегда возможно извлечь подпоследовательность, имеющую конечный предел. Для ограниченных последовательностей имеет место следующее утверждение.

Теорема (Больцано – Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, которая имеет конечный предел.

► Ограниченность последовательности $\{x_n\}$ означает $a \leq x_n \leq b$ для $\forall\, n \in N$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам, тогда хоть в одной половине содержится бесконечное множество членов последовательности $\{x_n\}$, обозначим его $[a_1, b_1]$. Аналогично из отрезка $[a_1, b_1]$ возьмем его половину $[a_2, b_2]$, содержащую бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Продолжая этот процесс деления, получим систему вложенных отрезков $\{[a_k, b_k]\}$. Длины отрезков $b_k - a_k = (b-a)/2^k$ стремятся к нулю с возрастанием номера k. По Лемме о вложенных отрезках существует $(\cdot)\, c$, принадлежащая всем отрезкам: $a_k \leq c \leq b_k$ при $\forall\, k \in \mathbf{N}$, причем $\lim a_k = \lim b_k = c$.

Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ построим следующим образом. В качестве x_{n_1} возьмем любой элемент последовательности $\{x_n\}$, содержащийся в отрезке $[a_1, b_1]$, в качестве x_{n_2} возьмем любой элемент из $\{x_n\}$, следующий за x_{n_1} и содержащийся в отрезке $[a_2, b_2]$, и т.д. В качестве x_{n_k} возьмем любой элемент из $\{x_n\}$, следующий за $x_{n_{k-1}}$ и содержащийся в $[a_k, b_k]$, и т.д. Возможность такого последовательного выбора элементов обеспечена тем, что любой отрезок $[a_k, b_k]$ содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$ со сколь угодно большими номерами. Так как

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \text{ и } \lim a_k = \lim b_k = c,$$

то по Теореме о трех последовательностях подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится и $\lim x_{n_k} = c$ ◀

Теорема Больцано – Вейерштрасса значительно облегчает доказательство многих трудных теорем.

Определение 2. Число "a" называется предельной точкой (или частичным пределом) последовательности $\{x_n\}$, если из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к "a" .

Можно дать другое Определение предельной точки последовательности, эквивалентное данному.

Определение 3. Число "a" называется предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, если в любой ε – окрестности $U(a, \varepsilon)$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$.

Докажем эквивалентность Определений 2 и 3 предельной точки последовательности.

▶ Пусть "a" – предельная точка последовательности $\{x_n\}$ согласно Определению 2. Тогда из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. В любой ε – окрестности $U(a, \varepsilon)$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_{n_k}\}$, следовательно и последовательности $\{x_n\}$. То есть точка a является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ по Определению 3.

Пусть "a" – предельная точка последовательности $\{x_n\}$ согласно Определению 3. Тогда в любой ε – окрестности $U(a, \varepsilon)$ содержится бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$. Эти элементы образуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, причем $|\, x_{n_k} - a| < \varepsilon$ при $\forall\, n_k \in \mathbf{N}$. Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. То есть точка a является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$ по Определению 2. ◀

Замечание 1. Из утверждения 1 следует, что сходящаяся последовательность имеет только одну предельную точку, совпадающую с ее пределом.

Замечание 2. Из Теоремы Больцано – Вейерштрасса следует, что любая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.

Лекция 8. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности

8.1. Критерий Коши сходимости последовательности

Рассмотрим вопрос об общем признаке существования конечного предела последовательности. Нам нужен признак, который использовал бы лишь то, что нам известно, а именно саму последовательность и базировался на свойствах ее элементов.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной или последовательностью Коши, если для $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, n_\varepsilon$ такое, что для $\forall\, n, m$, удовлетворяющих условию $n > n_\varepsilon$ и $m > n_\varepsilon$, выполняется неравенство

$$|\,x_n - x_m| < \varepsilon. \tag{1}$$

Неравенство (1) можно записать в другой форме

$$|\,x_n - x_{n+p}| < \varepsilon, \tag{2}$$

где $p \geq 0$. Чтобы убедиться в равносильности неравенств (1) и (2) достаточно положить $p = m - n$.

Символическая запись Определения фундаментальной и не фундаментальной последовательности

$$\{x_n\} \text{ – фундам.:} = \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon,\ \forall\, n > n_\varepsilon \text{ и } \forall\, p\text{: } |\,x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$
$$\{x_n\} \text{ – не фундам.:} = \exists\,\varepsilon > 0\ \forall\, N,\ \exists\, n > N \text{ и } \exists\, p\text{: } |\,x_n - x_{n+p}| \geq \varepsilon.$$

Теорема 1 (критерий сходимости Коши). Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась и имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

► *Необходимость*. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = a$.

По Определению предела

$$\text{для } \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon, \text{ что для } \forall\, m, n > n_\varepsilon\text{: } |\,x_n - a| < \varepsilon/2 \text{ и } |\,x_m - a| < \varepsilon/2.$$

Откуда получим

$$|\,x_n - x_m| = |\,(x_n - a) - (x_m - a)| \leq$$
$$\leq |\,x_n - a| + |\,x_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальна, то есть

$$\text{для } \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon, \text{ что для } \forall\, m, n > n_\varepsilon\text{: } |\,x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Фиксируем номер m и неравенство перепишем так

$$x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon.$$

Все члены последовательности $\{x_n\}$, кроме конечного их числа, содержатся в интервале $(x_m - \varepsilon, x_m + \varepsilon)$.

Мы доказали утверждение: если последовательность фундаментальна, то она ограничена. По Теореме Больцано – Вейерштрасса из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, имеющую конечный предел $\lim x_{n_k} = a$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ также сходится и имеет тот же предел $\lim x_n = a$. Имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, n_{k_\varepsilon}, \quad \forall\, n_k > n_{k_\varepsilon} : |\, x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $N_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$, тогда для $\forall\, n > N_\varepsilon$

$$|\, x_n - a| = |\, (x_n - x_{n_k}) + (x_{n_k} - a)| \le$$

$$\le |\, x_n - x_{n_k}| + |\, x_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Что и доказывает сходимость последовательности $\{x_n\}$ и $\lim x_n = a$ ◄

Замечание. Последовательности Коши ввел Больцано, пытавшийся доказать их сходимость, не располагая точным понятием вещественного числа. Коши дал такое доказательство, приняв за очевидное принцип вложенных отрезков, позже обоснованный Кантором.

Пример 1. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\sin k)/k^2$.

►

$$|\, x_n - x_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \sin k \right| \le \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right|.$$

Так как

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} <$$

$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Для $\forall\, n \in \mathbf{N}$ и $\forall\, p \in \mathbf{N}$ имеем

$$|\, x_n - x_{n+p}| < 1/n < \varepsilon \text{ при } n > 1/\varepsilon$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ – фундаментальна и потому сходится ◄

Пример 2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 1/k$.

►

$$|\, x_n - x_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \ge \frac{p}{n+p} \text{ при } \forall\, n, p \in N.$$

В частности при $n = p$ получим $|\, x_n - x_{n+p}| \geq 1/2$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Последовательность $\{x_n\}$ не является фундаментальной и потому расходится ◀

Пример 3. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей.

а) $x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + ... + a_n x^n$,

где $|\, a_k| < M$, $(k = 0, 1, 2, ...)$, и $|\, q| < 1$.

$|\, x_n - x_{n+p}| = |\, a_{n+1} q^{n+1} + ... + a_{n+p} q^{n+p}| \leq M\, |\, q|^{n+1}\, (1 + |\, q| + ... + |\, q|^{p-1}) =$
$= M\, |\, q|^{n+1} \dfrac{1 - |\, q|^p}{1 - |\, q|} < \varepsilon.$

Поскольку последовательность $|\, q|^{n+1}$ сходится, а выражение $M\, \dfrac{1 - |\, q|^p}{1 - |\, q|}$ – фиксированное число.

б) $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + ... + \dfrac{\sin n}{2^n}$.

$$|\, x_n - x_{n+p}| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + ... + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| <$$

$$< \frac{1}{2^{n+1}} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{p-1}} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - (1/2)^p}{1 - (1/2)} = \frac{1}{2^n} \left(1 - (1/2)^p\right) < \varepsilon.$$

Пример 4. Для вычисления $\sqrt{a}$, $a > 0$, пользуются рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad x_1 > 0. \tag{1}$$

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится и $\lim x_n = \sqrt{a}$.

▶ Так как $x_1 > 0$, то $x_2 > 0$ и т.д., то есть $x_n > 0$ $n \in \mathbf{N}$. Покажем, что последовательность $\{x_n\} \downarrow$ и ограничена снизу. Перепишем формулу (1) в виде

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\frac{x_n}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{x_n} \right). \tag{2}$$

Обозначим $x = x_n / \sqrt{a}$, тогда

$$x_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot 2 = \sqrt{a}.$$

Мы использовали неравенство $x + 1/x \geq 2$ для $\forall\, x > 0$. Из формулы (1) вытекает

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq 1.$$

Так как $x_n \geq \sqrt{a}$ при $n \geq 2$. Мы доказали, что $\{x_n\} \downarrow$ и $x_n \geq \sqrt{a}$, следовательно она сходится. Обозначим $\lim x_n = c$, тогда из равенства (1), переходя к пределу, получим

$$c = \frac{1}{2} \left(c + \frac{a}{c} \right). \tag{3}$$

Единственный положительный корень уравнения (3) $c = \sqrt{a}$.◄

8.2 Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 1. Частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ называется конечный или бесконечный предел ее подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$.

Определение 2. Символы $(+\infty)$ или $(-\infty)$ называются бесконечными частичными пределами последовательности $\{x_n\}$, если существуют такие подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty \text{ или } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty.$$

Теорема Больцано – Вейерштрасса утверждает, что всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы один частичный конечный предел. Рассмотрим теперь последовательность $\{x_n\}$, которая не ограничена, либо не ограничена сверху или снизу.

Теорема 1. Из любой неограниченной последовательности можно извлечь частичную последовательность, стремящуюся к бесконечности определенного знака.

► Пусть для определенности последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху. Это значит, что для $\forall\,\varepsilon$ найдется элемент $x_n > \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\exists\, n_1 \in \mathbf{N}$, что $x_{n_1} > 1$. Очевидно последовательность $\{x_n\}$, $n > n_1$, также неограничена сверху, так как получена из $\{x_n\}$ отбрасыванием конечного числа членов. Поэтому $\exists\, n_2 \in \mathbf{N}$, что $x_{n_2} > 2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots \text{ и } x_{n_1} > 1, x_{n_2} > 2, \cdots, x_{n_k} > k, \cdots$$

Отсюда следует, что $\{x_{n_k}\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ и очевидно $\lim x_{n_k} = +\infty$.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ неограничена снизу. Это означает, что для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, x_n < -\varepsilon$. Взяв $\varepsilon = 1$, найдем элемент $x_{n_1} < -1$. Последовательность $\{x_n\}$, $n > n_1$, также неограничена снизу, поэтому найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что $x_{n_2} < -2$ и т.д. В результате получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $x_{n_k} < -k$ для $\forall\, k \in \mathbf{N}$ и значит $\lim x_{n_k} = -\infty$ ◄

Получен следующий результат: у каждой последовательности существует по крайней мере один конечный или бесконечный частичный предел. Наибольший и наименьший частичный предел (будет показано, что они всегда существуют) играют особую роль в теории последовательностей.

Определение 3. Наибольший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее верхним пределом и обозначается $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Наименьший частичный предел последовательности $\{x_n\}$ называется ее нижним пределом и обозначается $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Можно дать другое определение.

Определение 4. Пусть M – множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ (наряду с числами M может содержать и $\pm\infty$). Для любой последовательности $\{x_n\}$ множество M не пусто.

Верхним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется $\sup M$ и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup M$.

Нижним пределом последовательности $\{x_n\}$ называется $\inf M$ и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf M$.

Например, если $x_n = n$, $n \in \mathbf{N}$, то $M = \{+\infty\}$ и, следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty.$$

Эквивалентность Определений 3 и 4 вытекает из следующей Леммы.

Лемма. Наибольший и наименьший частичные пределы последовательности $\{x_n\}$ являются соответственно верхней и нижней гранью множества M всех ее частичных пределов и обратно.

$$\blacktriangleright \sqsupset b = \overline{\lim}\, x_n,\ \curvearrowright b \in M \text{ и } b = \max M \Longrightarrow b = \sup M,$$

$$\sqsupset a = \underline{\lim}\, x_n,\ \curvearrowright a \in M \text{ и } a = \min M \Longrightarrow a = \inf M.$$

Обратно, пусть $b = \sup M$, докажем, что $b \in M$. Если $b \notin M$, то $\exists\, \varepsilon > 0$, что в интервале $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ имеется лишь конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$ (точка "b" не является предельной) и потому в этом интервале нет элементов множества M, что противоречит условию $b = \sup M$.

Из условия $b = \sup M$ и $b \in M \Longrightarrow b = \max M$, то есть $b = \overline{\lim}\, x_n$.

Аналогично доказывается утверждение $a = \inf M \Longrightarrow a = \underline{\lim}\, x_n$ ◀

Теорема 2. У любой последовательности $\{x_n\}$ существует как наибольший, так и наименьший частичный предел.

▶ Докажем существование наибольшего частичного предела. Возможны два случая: последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху или нет. Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то $+\infty$ является ее частичным пределом и очевидно наибольшим, то есть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$.

Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху, то снова возможны два случая: множество A ее конечных пределов не пусто или оно пусто. Пусть $A \neq \varnothing$. Из ограниченности последовательности $\{x_n\}$ сверху следует ограниченность сверху множества A ее конечных частичных пределов: $x_n \le c \Longrightarrow \lim x_{n_k} \le c$. В силу этого множество A имеет конечную верхнюю грань $b = \sup A$. Покажем, что "b" является частичным пределом, то есть $b \in A$. Если $b \notin A$, то $\exists\, \varepsilon > 0$, что в интервале $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ $\{x_n\}$ содержится лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$, и потому в этом интервале нет элементов множества A, что противоречит условию $b = \sup A$. Таким образом $b \in A$ и, следовательно, является наибольшим элементом A и по Определению 4 $b = \overline{\lim}\ x_n$.

В оставшемся случае, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху и множество $A = \varnothing$, получим $\overline{\lim}\ x_n = -\infty$. Действительно, здесь последовательность $\{x_n\}$ не ограничена снизу (иначе множество A не пусто). То есть в этом случае множество частичных пределов состоит из одного элемента $-\infty$, который и будет наибольшим в этом множестве, $\overline{\lim}\ x_n = -\infty$.

Аналогично доказывается существование наименьшего предела (конечного или бесконечного) у любой последовательности ◄

Пример 1. Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = \frac{1}{2}, \quad 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad 1 - \frac{1}{3}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{n}, \quad 1 - \frac{1}{n}, \cdots$$

Докажем, что последовательность имеет только две предельные точки: $x = 0$ и $x = 1$.

► Тот факт, что точки $x = 0$ и $x = 1$ являются предельными, следует из того, что частичная последовательность $\{1/n\}$ имеет предел 0, а последовательность $\{1 - 1/n\}$ имеет предел 1. Нужно доказать, что других предельных точек нет. Пусть число "a" является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. Так как $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то можно указать число $\varepsilon > 0$, что ε – окрестности точек 0; 1 и a не будут пересекаться. Поскольку все нечетные элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера, содержатся в окрестности $U(0, \varepsilon)$, а все четные в окрестности $U(1, \varepsilon)$, то вне этих окрестностей может находиться лишь конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Это означает, что $(\cdot)\, a$ не может быть предельной точкой последовательности $\{x_n\}$. ◄

Пример 2. Пусть $x_n = (-1)^n/n + [1 + (-1)^n]/2$. Найти $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

Решение. Если n – четное, то

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \lim x_n = 1, \quad 1 < x_n \leq 1,5.$$

Если n – нечетное, то

$$x_n = -\frac{1}{n}, \quad \lim x_n = 0, \quad -1 \leq x_n < 0.$$

Таким образом

$$\underline{\lim}\, x_n = 0, \quad \overline{\lim}\, x_n = 1, \quad \inf\{x_n\} = -1, \quad \sup\{x_n\} = 1,5.$$

Пример 3. Для последовательности $x_n = 3\cos\dfrac{n\pi}{2} - 1 + \dfrac{1}{n}$ найти: множество M, $\underline{\lim}\, x_n$, $\overline{\lim}\, x_n$, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$.

Решение. При $n = 4k$ имеем

$$x_n = 2 + \frac{1}{n},\ \lim x_{4k} = 2,\ 2 < x_{4k} \leq \frac{9}{4}.$$

При $n = 4k+1$ и $n = 4k+3$ имеем:

$$x_n = -1 + \frac{1}{n},\ \lim x_{4k+1} = \lim x_{4k+3} = -1,\ -1 < x_n \leq 0.$$

При $n = 4k+2$ имеем:

$$x_n = -4 + \frac{1}{n},\ \lim x_{4k+2} = -4,\ -4 < x_n \leq -\frac{7}{2}.$$

Таким образом, $M = \{-4; -1; 2\}$, других частичных пределов нет.

$$\underline{\lim}\, x_n = -4, \quad \overline{\lim}\, x_n = 2, \quad \inf\{x_n\} = -4, \quad \sup\{x_n\} = 9/4.$$

Лекция 9. Функции и их пределы

9.1 Понятие функции

Раньше было введено понятие отображения $f\colon X \to Y$ одного произвольного множества в другое. В курсе анализа имеют дело с вещественными переменными, то есть множества $X \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset \mathbf{R}$. Если множества X и Y являются числовыми, то отображение называют функцией.

Определение 1. Пусть заданы множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$ и известно правило, согласно которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$, обозначаемый $y = f\,(x)$. Тогда f называют функцией из X в Y и пишут $f\colon X \to Y$.

Чтобы задать функцию, нужно задать область ее определения – множество X, область значений – Y и правило или закон, который устанавливает соответствие $x \to y$, то есть функцию f. Можно в Определении 1 стать на более общую точку зрения, допуская, чтобы каждому значению $x \in X$ отвечало не одно, а несколько значений $y \in Y$, или даже бесконечное множество. В подобных случаях функцию называют многозначной, в отличие от определенной выше функции, которая является однозначной. В анализе обычно избегают многозначных функций. Впредь в соотношении $f : X \to Y$ мы будем подразумевать однозначную функцию, если не оговорено противное.

Обратимся теперь к самому правилу, или закону соответствия между переменными $x \to y$. Это правило может быть самой разнообразной природы. Наиболее просто соответствие устанавливается с помощью формулы, которая представляет функцию с помощью аналитического выражения. Однако это не единственный способ задания функции. В математике нередки случаи, когда функция определяется без помощи формулы. Такова, например, функция $y = E\,(x)$ (целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x). В частности легко установить, что $E\,(2,5) = 2$, $E\,(\sqrt{12}) = 3$, $E\,(-0,5) = -1$ и т.д., хотя никакой формулы нет.

В физике и других естественных науках зависимость между величинами часто устанавливается экспериментально и задается в виде таблиц или графиков.

В анализе применяется аналитическая форма зависимости. К их числу относятся не только функции и операции, которые известны из школы, но и другие, которые появились и будут появляться в процессе изучения анализа, например операция предельного перехода.

Определение 2. Числовая (вещественнозначная) функция $f\colon X \to Y$ называется ограниченной сверху (снизу), если множество ее значений ограничено сверху (снизу). Функция f, ограниченная сверху и снизу, называется ограниченной.

Очевидно, функция f ограничена сверху (снизу), если существует число M такое, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство: $f(x) \leq M$, $(f(x) \geq M)$. Если функция $f\colon X \to Y$ ограничена, то существует число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ при $\forall x \in X$.

Определение 3. Верхней (нижней) гранью функции $f: X \to Y$ называется верхняя (нижняя) грани множества значений этой функции.

Обозначают:

$$\sup f,\ \sup_X f,\ \sup_{x\in X} f(x),$$

$$\inf f,\ \inf_X f,\ \inf_{x\in X} f(x).$$

Более подробно определение верхней и нижней граней означает:

$$b = \sup f(x):\ 1) f(x) \leq b,\ 2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X:\ f(x_\varepsilon) > b - \varepsilon,$$

$$a = \inf f(x):\ 1)\ f(x) \geq a,\ 2)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in X:\ f(x_\varepsilon) < a + \varepsilon.$$

В приведенном Определении верхней и нижней граней функции эта грань может быть как конечной, так и бесконечной.

Будем говорить, что числовая функция $f: X \to Y$ принимает в $(\cdot)\, x_0 \in X$ наибольшее (наименьшее) значение, если $f(x) \leq f(x_0)$, $(f(x) \geq f(x_0))$, для $\forall x \in X$. Наибольшее и наименьшее значения называют также максимальным и минимальным значениями. В этих случаях пишут $f(x_0) = \max f(x)$ или $f(x_0) = \min f(x)$, соответственно.

9.2 Первое определение предела функции

Напомним, что ε – окрестностью $(\cdot)\, x_0 \in \mathbf{R}$ называется интервал вида $U(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Проколотой ε – окрестностью называется интервал, из которого удалена $(\cdot)\, x_0$

$$\overset{\circ}{U}(x_0, \varepsilon) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus x_0.$$

Аналогично, если $U(x_0)$ – окрестность $(\cdot)\, x_0$, то $\overset{\circ}{U}(x_0) = U(x_0) \setminus x_0$ – проколотая окрестность.

Выражение "функция f определена (задана) на множестве E"не означает, что множество E является областью определения функции f, а лишь то, что множество E принадлежит области X определения функции f. То есть по существу рассматривается сужение функции f на множество E, $f\colon E \subset X \to Y$.

Используют несколько определений предела функции.

Определение 1 (по Гейне). Пусть функция f определена на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)\ (\cdot)\, a \in \mathbf{R}$. Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, сходящейся к $(\cdot)\, a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Из Определения следует, что функция не может иметь двух разных пределов в одной точке. Из Определения также ясно, что значения функции f в точках x, лежащих вне любой фиксированной окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$, и значения функции f в самой $(\cdot)\,a$ не влияют ни на существование ни на величину предела функции $f(x)$ в $(\cdot)\,a$.

Существование и величина предела функции f в данной точке "a" полностью определяются значениями функции f в сколь угодно малой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки "a". В этом смысле говорят, что свойство функции иметь предел в данной точке является ее локальным свойством.

Подчеркнем, что если функция имеет предел в $(\cdot)\,a \in \mathbf{R}$, то она определена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ этой точки.

Замечание. Условия в Определении 1 предела функции можно смягчить. Достаточно потребовать только существование пределов последовательностей $\{f(x_n)\}$, отсюда будет следовать, что эти пределы совпадают.

Лемма. Чтобы функция $f\colon\ \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ имела предел в точке "a", необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, сходящейся к $(\cdot)\,a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ имела предел.

► *Необходимость*. Пусть функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$. Согласно Определению 1 для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, сходящейся к $(\cdot)\,a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ имеет предел.

Достаточность. Пусть для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, $\lim x_n = a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Нужно доказать, что $\lim f(x_n)$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Возьмем две любые последовательности $x_n' \in \overset{\circ}{U}(a)$ и $x_n'' \in \overset{\circ}{U}(a)$, $\lim x_n' = \lim x_n'' = a$. Последовательность

$$x_n = \begin{cases} x_k', & \text{если } n = 2k-1, \\ x_k'', & \text{если } n = 2k, \end{cases}$$

также сходится и $\lim x_n = a$. Согласно условию, существуют пределы: $\lim f(x_n')$, $\lim f(x_n'')$, $\lim f(x_n)$. Так как $\{f(x_n')\}$, $\{f(x_n'')\}$ являются подпоследовательностями последовательности $\{f(x_n)\}$, то

$$\lim f(x_n') = \lim f(x_n) \text{ и } \lim f(x_n'') = \lim f(x_n)$$

Откуда следует $\lim f(x_n') = \lim f(x_n'')$. Таким образом, предел последовательности $\{f(x_n)\}$, где $x_n \in \overset{\circ}{U}(a)$, $x_n \to a$, не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ по Определению 1.◄

Примеры.

1) Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ функции $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x-1}$.

Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$. На основании Теоремы о пределах арифметических операций над последовательностями получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^2 + x_n - 1}{x_n - 1} = \frac{\lim 2x_n^2 + \lim x_n - 1}{\lim x_n - 1} = 1.$$

Предполагалось, что $x_n \neq 1$, так как в этой точке функция не определена. Таким образом, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$ и он не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Значит существует и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

2) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$. Выяснить, существует ли предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Возьмем две последовательности: $x'_n = \dfrac{1}{\pi n}$ и $x''_n = \dfrac{1}{\pi/2 + 2\pi n}$. Очевидно $\lim x'_n = \lim x''_n = 0$, $x'_n \neq 0$, $x''_n \neq 0$. Найдем $f(x'_n) = \sin n\pi = 0$, $f(x''_n) = \sin(\pi/2) = 1$. Поэтому $\lim f(x'_n) = 0$, $\lim f(x''_n) = 1$ и значит предел функции $f(x)$ при $x \to 0$ не существует.

Замечание. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a, b), кроме $(\cdot)\, x_0 \in (a, b)$ и пусть $f(x) = g(x)$ при $x \neq x_0$. Так как в Определении предела не участвуют значения функций в $(\cdot)\, x_0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ одновременно существуют или нет. На этом замечании основано правило раскрытия неопределенности с помощью сокращения дробей.

3) Найти предел функции $f(x) = \dfrac{(2x^2 + x - 1)x}{x^2 - x}$ при $x \to 0$.

Здесь мы имеем неопределенность вида $0/0$ и рассуждения, аналогичные примеру 1), не дают ответа на вопрос о существовании предела. Возьмем функцию $g(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$. Так как $f(x) = g(x)$ при $x \neq 0$, то, согласно замечанию, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$.

Односторонние пределы.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, x_0). Число A называется пределом слева функции f в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $a < x_n < x_0$, сходящейся к $(\cdot)\, x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A. Пишут $A = \lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (x_0, b). Число B называется пределом справа функции f в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_0 < x_n < b$, сходящейся к $(\cdot)\, x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу B. Пишут $B = \lim\limits_{x\to x_0 + 0} f(x)$.

Пределы слева и справа функции $f(x)$ называются односторонними, в отличие от ранее данного предела функции, который называют двухсторонним пределом. Связь между этими пределами устанавливается теоремой:

Теорема 1. Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно существование порознь односторонних пределов и их равенство: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

► *Необходимость*. Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, тогда $A = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ для любой последовательности $x_n \to x_0$, в том числе для любой последовательности $x_n \to x_0 - 0$ и любой последовательности $x_n \to x_0 + 0$. Это означает $A = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

Достаточность. Пусть $A = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Возьмем любую последовательность $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$. Выделим из нее две частичные последовательности $x'_n < x_0$ и $x''_n > x_0$ так, чтобы в нее вошли все члены последовательности $\{x_n\}$. Очевидно $x'_n \to x_0$ и $x''_n \to x_0$. Взяв $\forall\,\varepsilon > 0$, найдем номер n_ε, что для $\forall\, n > n_\varepsilon$ будет $|f(x'_n) - A| < \varepsilon$ и $|f(x''_n) - A| < \varepsilon$. Следовательно $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ◄

9.3 Второе определение предела функции

Определение 1 (по Коши). Пусть функция $f(x)$ определена на некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$. Число A называется пределом функции $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ при $x \to a$, если для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_\varepsilon > 0$, что для $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a)$, удовлетворяющих условию $0 < |\,x - a| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|\,f(x) - A| < \varepsilon$.

В логических символах Определение 1 записывается в виде

$$A = \lim_{x\to a} f(x) := (\forall\,\varepsilon > 0)(\exists\,\delta_\varepsilon > 0)(\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a),\ 0 < |\,x - a| < \delta_\varepsilon) \Longrightarrow .$$

$$\Longrightarrow |\,f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение 1 можно записать в терминах окрестности точки:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) := (\forall\, U(A,\varepsilon))(\exists\ \overset{\circ}{U}(a,\delta) \subset \overset{\circ}{U}(a)):\ f(\overset{\circ}{U}(a,\delta)) \subset U(A,\varepsilon).$$

Более общей формулировкой определения предела функции будет следующая:

Определение 2. Пусть функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ определена на множестве E и "a" – предельная точка множества E. Число A называется пределом функции $f\colon E \to \mathbb{R}$ при $x \to a$, $(x \in E)$, если для любой окрестности $U(A) \subset \mathbf{R}$ точки A найдется проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a)$ точки "a" в множестве E, образ которой при отображении $f\colon E \to \mathbb{R}$ содержится в окрестности $U(A)$.

Символически это Определение запишется так:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) := (\forall\, U_R(A))(\exists\ \overset{\circ}{U}_E(a)) : f(\overset{\circ}{U}_E(a)) \subset U_R(A).$$

Последняя формулировка позволяет распространить определение предела функции на любые отображения $f\colon X \to Y$, если в множествах X и Y определено понятие окрестности точки (элемента).

Теорема 1. Два определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

► Пусть функция $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ и $A = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Гейне. Это означает: для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, $x_n \to a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Нужно доказать, что число A будет пределом функции f по Определению Коши. Если A не является пределом функции f при $x \to a$, то

$$\exists\,\varepsilon > 0,\ \forall\,\delta > 0,\ \exists\,x \in \overset{\circ}{U}(a),\ 0 < |\,x - a| < \delta:\ |\,f(x) - A| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

Будем последовательно выбирать $\delta_n = \delta_0/n$, $n = 1, 2, ...$, а соответствующее им $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ обозначим x_n, тогда из (1) следует

$$0 < |\,x_n - a| < \delta_0/n, \quad |\,f(x_n) - A| \geq \varepsilon. \tag{2}$$

Из первого неравенства (2) вытекает, что $x_n \in \overset{\circ}{U}(a, \delta_0) \subset \overset{\circ}{U}(a)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Второе неравенство (2) означает,что число A не является пределом последовательности $\{f(x_n)\}$. Это противоречит первому определению предела функции.

Пусть A – предел функции f при $x \to a$ по Коши:

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta_\varepsilon > 0,\ \forall\,x \in \overset{\circ}{U}(a),\ 0 < |\,x - a| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |\,f(x) - A| < \varepsilon. \tag{3}$$

Возьмем любую последовательность $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, $\lim x_n = a$. Покажем, что если функция f удовлетворяет условию (3), то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$. Так как $\lim x_n = a$, то для фиксированного $\delta > 0$, $\exists\,n_\delta$, $\forall\,n > n_\delta$: $0 < |\,x_n - a| < \delta$. Поэтому в силу (3) для $\forall\,n > n_\delta$: $|\,f(x_n) - A| < \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это означает $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ ◄

Для односторонних пределов функции также можно дать новые определения.

Определение 3. Пусть функция f определена на интервале (a, x_0) (соответственно на интервале (x_0, b)). Число A называется пределом слева (справа) функции f в точке x_0, если для $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta_\varepsilon > 0$, что для $\forall\,x \in (a, x_0)$, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, (соответственно для $\forall\,x \in (x_0, b)$, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$), выполняется неравенство $|\,f(x) - A| < \varepsilon$.

Равносильность этого Определения первому доказывается аналогично Теореме 1. Связь между односторонними и двухсторонними пределами устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Для существования предела по Коши функции $f\colon \overset{\circ}{U}(x_0) \to \mathbf{R}$ в точке x_0 необходимо и достаточно существование порознь односторонних пределов и их равенство: $\lim\limits_{x\to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_) + 0} f(x)$. Общее значение пределов и является двухсторонним пределом функции f в точке x_0.

◄ *Необходимость*. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Согласно определению предела

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\ \forall\, x \in \overset{\circ}{U}(x_0),\ 0 < |\, x - x_0| < \delta_\varepsilon :\ |\, f(x) - A| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство справедливо для $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$. Это означает, что число A является пределом функции f слева и справа в точке x_0, то есть

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A. \tag{4}$$

Достаточность. Пусть выполнены условия (4). По определению предела функции f слева и справа в точке x_0 имеем: для $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_1 > 0$ и $\exists\, \delta_2 > 0$, что для $\forall\, x$, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta_1 < x < x_0$, и для $\forall\, x$, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta_2$, справедливо неравенство $|\, f(x) - A| < \varepsilon$. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, тогда для $\forall\, x$, удовлетворяющих условию $0 < |\, x - x_0| < \delta$, будет $|\, f(x) - A| < \varepsilon \Longrightarrow A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ◄

Лекция 10. Свойства пределов функций

10.1 Обобщение понятия предела функции

Понятие предела функции $f(x)$ можно обобщить для случая, когда аргумент x функции или ее значение стремятся к бесконечности. Например можно дать следующие определения.

Определение 1. Пусть задана функция $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$. Будем говорить, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, $x_n \to a$, имеет место соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$.

Определение 2. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если для $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta_\varepsilon > 0$, что для $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a)$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x)| > \varepsilon$.

Встречаются и различные другие сочетания предельных значений аргументов и функций. Для каждого отдельного случая можно дать свое определение предела функции. Однако целесообразно ввести единое определение предела функции для конечных и бесконечных предельных значений.

Сформулируем общее определение предела функции.

Определение 3. Пусть задана функция $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$, где "$a$" – число или один из символов $x_0 \pm 0$, $\pm\infty$. Величина A, являющаяся числом или одним из символов $\pm\infty$, называется пределом функции f при $x \to a$, если для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, $x_n \to a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и имеет место равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Определение 4. Пусть задана функция $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$, где "$a$" – число или один из символов $x_0 \pm 0$, $\pm\infty$. Величина A, являющаяся числом или одним из символов $\pm\infty$, называется пределом функции f при $x \to a$, если для любой ε – окрестности $U(A, \varepsilon)$ величины A существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(a, \delta) \subset \overset{\circ}{U}(a)$ величины "a", что для $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ значения функции $f(x)$ содержатся в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(A, \varepsilon)$. Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Эквивалентность двух определений предела доказывается аналогично случаю, когда "a" и A – конечные числа.

Для общего определения предела функции в точке справедливо обобщение Леммы, в которой смягчаются условия Определения 3.

Лемма. Для того, чтобы функция $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ имела в точке "a" предел, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a)$, $x_n \to a$, последовательность $\{f(x_n)\}$ имела предел (конечный или бесконечный).

► Доказательство аналогично случаю конечных пределов ◄

Предел сложной функции.

Определение 5. Пусть заданы функции $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$, функция $F\colon X \to Z$, определенная для $\forall\, x \in X$ равенством $F\,(x) = g\,(f\,(x))$, называется сложной функцией или композицией и обозначается $F = (g \circ f)\,(x)$.

Теорема. Пусть функция $g\,(y)$ определена в $\overset{\circ}{U}\ (y_0)$, а функция $y = f\,(x)$ в $\overset{\circ}{U}\ (x_0)$, причем $f\,(\overset{\circ}{U}\ (x_0)) \subset \overset{\circ}{U}\ (y_0)$. Если существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x)$ и $\lim\limits_{y \to y_0} g\,(y)$, то сложная функция $g\,(f\,(x))$ определена в $\overset{\circ}{U}\ (x_0)$ и также имеет предел при $x \to x_0$, причем $\lim\limits_{x \to x_0} g\,(f\,(x)) = \lim\limits_{y \to y_0} g\,(y)$.

► Функция $g\,(f\,(x))$ определена на $\overset{\circ}{U}\ (x_0)$, так как $f\,(\overset{\circ}{U}\ (x_0)) \subset \overset{\circ}{U}\ (y_0)$ по условию. Пусть $\lim\limits_{y \to y_0} g\,(y) = B$, тогда для $\forall\, U\,(B)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_1\ (y_0) \subset \overset{\circ}{U}\ (y_0)$, что $g\,(\overset{\circ}{U}_1\ (y_0)) \subset\ U(B)$. Из существования $\lim\limits_{x \to x_0} f\,(x)$ следует, для $\overset{\circ}{U}_1\ (y_0)\ \exists\ \overset{\circ}{U}_1\ (x_0)$, что $f\,(\overset{\circ}{U}_1\ (x_0)) \subset \overset{\circ}{U}_1\ (y_0)$. Тогда $g\,(f\,(\overset{\circ}{U}_1\ (x_0)) \subset\ U(B)$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} g\,(f\,(x)) = B$ ◄

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, $a > 1$.

► Требуется для заданного $1 > \varepsilon > 0$ найти такое $\delta > 0$, что для всех $|\,x| < \delta$ выполняется неравенство $|\,a^x - 1| < \varepsilon$. Равносильное неравенство $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$ выполняется, если

$$\log_a(1 - \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon). \qquad (1)$$

Так как

$$\log_a(1 - \varepsilon^2) = \log_a(1 + \varepsilon) + \log_a(1 - \varepsilon) < 0,$$

то

$$-\log_a(1 - \varepsilon) > \log_a(1 + \varepsilon)$$

и неравенство (1) будет выполняться, если

$$-\log_a(1 + \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon) \iff |\,x| < \log_a(1 + \varepsilon).$$

Достаточно положить $\delta = \log_a(1 + \varepsilon)$, чтобы при $|\,x| < \delta$ было $|\,a^x - 1| < \varepsilon$ ◄

10.2 Свойства пределов функций

Под пределом функции дальше понимается конечный предел, если не оговорено противное. Все функции, рассматриваемые в данном разделе, определены в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}\ (a)$ величины "a". Под "a" понимается число, или один из символов $x_0 \pm 0$, ∞, $\pm\infty$.

Многие свойства предела функции аналогичны уже рассмотренным свойствам предела числовой последовательности. Более того, на основании Определения предела функции по Гейне через предел последовательности многие свойства предела функции непосредственно следуют из свойств предела последовательности. Тем не менее, мы вновь рассмотрим доказательства свойств предела функции.

1. Если у функции $f(x)$ существует конечный предел в точке "a", то в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ функция ограничена.

► Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда, согласно Определению 4,

$$\text{для } \forall\, U(A,\varepsilon),\ \exists\ \overset{\circ}{U}(a,\delta), \text{ что для } \forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta) \text{ будет } f(x) \in U(A,\varepsilon),$$

то есть выполняется неравенство: $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$, где ε – фиксированное число. Это означает ограниченность функции $f(x)$ на $\overset{\circ}{U}(a,\delta)$ ◄

2. Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где $A \neq 0$, то в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ функция f имеет тот же знак, что и предел A.

► Пусть $A > 0$. Согласно Определению 4 предела функции

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \overset{\circ}{U}(a,\delta), \text{ что для } \forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a,\delta) : f(x) \in U(A,\varepsilon)$$

Возьмем $\varepsilon = A > 0$, тогда $A - A < f(x) < A + A \Longrightarrow f(x) > 0$ ◄

3. Если $f(x) = c$ при $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.

► Результат следует из Определения 3 предела функции ◄

4. Если $f(x) \geq A$ при $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a)$ и существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq A$.

► Утверждение следует из Определения 3 предела функции и свойств предела последовательности ◄

5. Если $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ при $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a)$ и существуют конечные или определенного знака бесконечные пределы $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to a} \psi(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

► Утверждение вытекает из Определения 3 предела функции и Теоремы о трех последовательностях ◄

6. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, для $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, то существуют и конечные пределы функций

$$f(x) \pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ f(x)/g(x), \text{ если } \lim g(x) \neq 0$$

Причем

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x),$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x),$$

$$\lim[f(x)/g(x)] = \lim f(x) / \lim g(x).$$

► Свойство может быть доказано с использованием Определения 3 предела функции и свойств пределов последовательностей. Например, докажем формулу для произведения $f(x) \cdot g(x)$. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Согласно Определению 3 предела функции для любой последовательности $x_n \in \overset{\circ}{U}(a)$ такой, что $x_n \to a$, справедливы равенства

$$A = \lim_{n \to \infty} f(x_n), \quad B = \lim_{n \to \infty} g(x_n).$$

Предел произведения сходящихся последовательностей существует и равен произведению пределов, поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} [f(x_n) \cdot g(x_n)] = A \cdot B$. Это согласно Определению 3 предела функции означает, что

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = AB$$

◄

Заметим, что частное $f(x)/g(x)$ может быть не определено на всей проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, участвующей в определении предела. Однако по свойству 2 из условия $\lim g(x) \neq 0$ следует существование проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a, \delta_1)$, на которой $g(x) \neq 0$ и имеет смысл частное $f(x)/g(x)$.

10.3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 1. Функция $\alpha\colon \ \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ называется бесконечно малой (бесконечно большой) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, $(\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \infty)$.

Бесконечно малые функции играют важную роль в анализе, связанную в частности с тем, что понятие предела функции может быть сведено к понятию бесконечно малой функции. Аналогичную ситуацию мы имели для бесконечно малых последовательностей.

Лемма. Предел функции $f\colon \ \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ при $x \to a$ существует и равен A тогда и только тогда, когда $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

► Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то полагая $\alpha(x) = f(x) - A$, получим

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - A] = A - A = 0.$$

Обратно: пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A + \lim_{x \to a} \alpha(x) = A$$

◄

Имеют место Теоремы, аналогичные теоремам для бесконечно малых последовательностей.

Теорема. Сумма и разность бесконечно малых функций $\alpha(x) \pm \beta(x)$ при $x \to a$, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию $\alpha(x) \cdot f(x)$ являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$.

► Доказательство проводится на основе Определения 3 предела функции с использованием свойств бесконечно малых последовательностей. ◄

Можно доказать, что функция $\alpha\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ является бесконечно малой при $x \to a$ тогда и только тогда, когда функция $1/\alpha$, $\alpha \neq 0$, является бесконечно большой при $x \to a$.

Замечание. Свойство 6 предела функции, полученной при арифметических операциях, можно доказать непосредственно на основе Леммы, не используя Определение 3 предела функции и свойства последовательностей.

10.4 Пределы монотонных функций

Определение 1. Функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ называется монотонно возрастающей (убывающей) на множестве $E \subset \mathbf{R}$, если для $\forall\, x_1, x_2 \in E$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$, (соответственно $f(x_1) \ge f(x_2)$).

Иногда слово "монотонно" опускают и говорят просто о возрастающей или убывающей функции. Пишут $f(x) \uparrow$ или $f(x) \downarrow$.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, b) (конечном или бесконечном). Тогда в точках "a" и "b" существуют односторонние пределы:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x),$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x).$$

Для убывающей функции $f(x)$ существуют односторонние пределы

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = \inf_{x \in (a,b)} f(x),$$

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \sup_{x \in (a,b)} f(x).$$

► Пусть функция $f(x) \uparrow$ на (a, b) и $\beta = \sup\limits_{x \in (a,b)} f(x)$, где β – конечное число. Согласно определению верхней грани,

для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in (a, b)$, что $\beta - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \le \beta$.

Положим $\delta = b - x_\varepsilon$. Тогда, в силу возрастания функции $f(x)$, для $\forall\, x$, удовлетворяющих неравенству $x_\varepsilon = b - \delta < x < b$, то есть для $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(b-0, \delta)$, выполняется неравенство $f(x_\varepsilon) \le f(x)$. Таким образом, для $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(b-0, \delta)$ имеем

$$\beta - \varepsilon < f(x) \le \beta < \beta + \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, это неравенство означает $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \beta$.

Если $\sup\limits_{x \in (a,b)} f(x) = +\infty$, то для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x_\varepsilon \in (a, b)$, что $f(x_\varepsilon) > \varepsilon$. Положим снова $\delta = b - x_\varepsilon$. Тогда, в силу возрастания функции $f(x)$, для $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(b-0, \delta)$ выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_\varepsilon) > \varepsilon$. Это означает $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, а также утверждение для убывающей функции $f(x)\downarrow$ ◄

Следствие. Если функция $f(x)$ монотонна на интервале (a,b), то в любой точке $x_0 \in (a,b)$ существуют конечные односторонние пределы слева и справа: $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$.

► Пусть функция $f(x)$ возрастает на интервале (a,b). Тогда для $\forall(\cdot)x_0 \in (a,b)$ имеем

$$f(x_1) \le f(x_0) \le f(x_2),$$

где $x_1 \in (a,x_0)$ и $x_2 \in (x_0,b)$ – любые точки. То есть функция $f(x)$ ограничена сверху на (a,x_0) и снизу на (x_0,b) числом $f(x_0)$. Поэтому существуют конечная верхняя грань $\sup\limits_{(a,x_0)} f(x)$ и конечная нижняя грань $\inf\limits_{(x_0,b)} f(x)$. Этим следствие доказано, так как согласно Теореме 1, примененной к интервалам (a,x_0) и (x_0,b), имеем

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \sup_{(a,x_0)} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \inf_{(x_0,b)} f(x).$$

Аналогично доказывается случай убывающей функции. ◄

Лекция 11. Критерий Коши существования предела

11.1. Критерий Коши существования предела функции

Как и в случае предела числовой последовательности получим необходимое и достаточное условие того, что функция $f : \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ имеет предел в точке "a", основанное лишь на поведении самой функции $f(x)$ в окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$.

Под "a" будем понимать либо число x_0, либо один из символов $(x_0 \pm 0)$, ∞, $\pm\infty$.

Определение 1. Говорят, что функция $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ удовлетворяет условию Коши при $x \to a$, если

для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall\, x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \subset \overset{\circ}{U}(a)$

выполняется неравенство $|\, f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Теорема 1 (критерий Коши). Для того, чтобы функция $f\colon \overset{\circ}{U}(a) \to \mathbf{R}$ имела конечный предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши при $x \to a$.

► *Необходимость*. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тогда

для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, что для $\forall\, x \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \subset \overset{\circ}{U}(a)$

выполняется неравенство

$$|\, f(x) - A| < \varepsilon. \tag{1}$$

Возьмем $\forall\, x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \subset \overset{\circ}{U}(a)$, в силу неравенства (1) имеем

$$|\, f(x_1) - f(x_2)| = |\, (f(x_1) - A) - (f(x_2) - A)| \le$$

$$\le |\, f(x_1) - A| + |\, f(x_2) - A| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

То есть условие Коши выполнено.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Коши при $x \to a$. Это означает

для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall\, x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \subset \overset{\circ}{U}(a)$

выполняется неравенство

$$|\, f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Возьмем любую последовательность

$$\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a, \delta) \subset \overset{\circ}{U}(a), \quad x_n \to a.$$

Покажем, что последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Заменим в неравенстве (2) числа x_1 и x_2 любыми элементами последовательности $\{x_n\}$ с номерами x_m и x_n, соответственно. Тогда получим $|\, f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной и потому сходится. Таким образом, для любой последовательности $\{x_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a, \delta) \subset \overset{\circ}{U}(a)$, $x_n \to a$, последовательность

$\{f(x_n)\}$ сходится. Потому в силу Леммы п. 10.1 существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ◀

В случае, когда величина "a" является числом, критерий Коши можно сформулировать следующим образом.

Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall x_1, x_2 \in \overset{\circ}{U}(a)$, удовлетворяющих условиям $|x_1 - a| < \delta$, $|x_2 - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Если $a = \infty$, критерий Коши примет вид.

Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall x_1, x_2$, удовлетворяющих условиям $|x_1| > \delta$, $|x_2| > \delta$, выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

11.2 Сравнение функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$, где "a" – число x_0, или один из символов $(x_0 \pm 0)$, ∞, $\pm\infty$.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ограниченной по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$, если для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $|f(x)| \le C|g(x)|$, где $C > 0$ – const. Пишут $f(x) = O(g(x))$, при $x \to a$, читается: $f(x)$ есть "O" большое от $g(x)$ при $x \to a$.

Подчеркнем, что запись $x \to a$ имеет здесь другой смысл, не связанный с понятием предела: она указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ точки "a".

Определение 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x) = O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$, то они называются функциями одного порядка при $x \to a$.

Лемма 1. Если $f(x) = \varphi(x)\cdot g(x)$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = k$, то $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

► Из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = k$ следует существование проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$, на которой функция $\varphi(x)$ ограничена, то есть для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \le C$. Отсюда следует $|f(x)| = |\varphi(x)|\cdot|g(x)| \le C|g(x)|$. Это означает $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$ ◀

Лемма 2. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)] = k$, и $k \ne 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x \to a$.

► Положим $\varphi(x) = f(x)/g(x)$, тогда $f(x) = \varphi(x)\cdot g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = k$. По Лемме 1 $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)] = k$, и $k \ne 0$, то $\exists\ \overset{\circ}{U}(a)$, что для $\forall x \in \overset{\circ}{U}(a)$ будет $f(x)/g(x) \ne 0$, то есть $f(x) \ne 0$. Положим $\psi(x) = g(x)/f(x)$, отсюда получим $g(x) = \psi(x)\cdot f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = 1/k$. Согласно Лемме 1 $g(x) = O(f(x))$ при $x \to a$. Таким образом, функции $f(x)$ и $g(x)$ одного порядка при $x \to a$ ◀

Определение 3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными или асимптотически равными при $x \to a$, если в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ величины "a" определена такая функция $\varphi(x)$, что $f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1$.

Эквивалентные функции обозначают: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Отношение эквивалентности функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обладает свойствами: рефлексивности $f \sim f$; симметричности, если $f \sim g$, то $g \sim f$; транзитивности, если $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.

Доказательство проводится на основе Определения 3.

Определение 4. Если в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ величины "a" функция $\alpha(x) = \varepsilon(x) \cdot f(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой по сравнению с функцией $f(x)$ при $x \to a$. Пишут $\alpha(x) = o(f(x))$, $x \to a$, читается: $\alpha(x)$ есть "o" – малое от $f(x)$ при $x \to a$.

В силу данного Определения, запись "$\alpha(x) = o(1)$, $x \to a$" означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Если функция $f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, то говорят, что функция $\alpha(x) = o(f(x))$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $f(x)$ при $x \to a$.

Суммируя введенные понятия, получим следующий результат.

Пусть в некоторой проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ величины "a" выполняется равенство $f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$. Тогда:

$$\text{если } |\varphi(x)| \leq C, \text{то } f(x) = O(g(x)) \quad \text{при } x \to a;$$

$$\text{если } \lim_{x \to a} \varphi(x) = 1, \text{то } f(x) \sim g(x) \quad \text{при } x \to a;$$

$$\text{если } \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0, \text{то } f(x) = o(g(x)) \quad \text{при } x \to a.$$

Например, функции

$$\sin x, \quad \operatorname{tg} \mathrm{x}, \quad \sqrt{1+\mathrm{x}} - 1$$

будут эквивалентными или асимптотически равными при $x \to 0$. Действительно

$$\frac{\sin x}{x} \to 1, \quad \frac{\operatorname{tg} \mathrm{x}}{x} \to 1, \quad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \to \frac{1}{2}, \quad x \to 0.$$

Первое из соотношений $(\sin x)/x \to 1$ при $x \to 0$ будет доказано несколько позже.

11.3 Условие эквивалентности функций

Теорема 1. Для того, чтобы две функции $f(x)$ и $g(x)$ были эквивалентны при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий:

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \quad x \to a, \tag{1}$$

$$g(x) = f(x) + o(f(x)), \quad x \to a. \tag{2}$$

►*Необходимость*. Пусть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$, то есть $f(x) = \varphi(x) \cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1$. Тогда

$$f(x) = g(x) + [\varphi(x) - 1]\, g(x).$$

Обозначим $\varepsilon(x) = \varphi(x) - 1$, очевидно $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Из равенства $f(x) = g(x) + \varepsilon(x) \cdot g(x)$ следует $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to a$,. Формула (2) доказывается аналогично.

Достаточность. Пусть $f(x) = g(x) + o(g(x))$, то есть $f(x) = g(x) + \varepsilon(x) \cdot g(x)$, где $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$. Тогда

$$f(x) = [1 + \varepsilon(x)]\, g(x) = \varphi(x) \cdot g(x),$$

где $\varphi(x) = 1 + \varepsilon(x) \to 1$ при $x \to a$, то есть $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$. Вторая формула (2) доказывается аналогично ◄

11.4 Метод выделения главной части функции

Определение 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(a)$ величины "a". Если функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = g(x) + o(g(x)), \text{ при } x \to a,$$

то функция $g(x)$ называется главной частью функции $f(x)$ при $x \to a$.

Если функция $f(x)$ задана, то ее главная часть не определяется однозначно: любая функция $g(x) \sim f(x)$ будет ее главной частью. Например, пусть $f(x) = x + x^2 + x^3$. Можно записать $f(x) = x + o(x)$ при $x \to a$, а также $f(x) = x + x^2 + o(x + x^2)$ при $x \to a$.

Однако, если задаваться определенным видом главной части, то главная часть будет определяться однозначно.

Лемма. Если функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет главную часть вида $A(x-a)^k$, где A, k – const, $A \neq 0$, то среди главных частей такого вида она определяется однозначно.

► Пусть функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет две главные части

$$f(x) = A(x-a)^k + o((x-a)^k), \quad A \neq 0,$$

$$f(x) = B(x-a)^m + o((x-a)^m), \quad B \neq 0.$$

Тогда $f(x) \sim A(x-a)^k$ и $f(x) \sim B(x-a)^m$ при $x \to a$. Поэтому $A(x-a)^k \sim B(x-a)^m$ при $x \to a$, то есть

$$\lim_{x \to a} \frac{A(x-a)^k}{B(x-a)^m} = 1.$$

Это возможно лишь в случае $A = B$ и $k = m$. ◀

Понятие главной части функции полезно при изучении бесконечно малых и бесконечно больших функций и успешно используется при решении различных задач математического анализа. Часто удается бесконечно малую функцию сложного вида заменить в окрестности рассматриваемой точки более простой функцией с точностью до бесконечно малых более высокого порядка.

При вычислении пределов функций с помощью метода выделения главной части не всегда возможно заменить рассматриваемую функцию на любую эквивалентную функцию. Например, при отыскании предела $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ было бы ошибкой заменить функцию $\sqrt{x^2+x} = x\sqrt{1+1/x}$ эквивалентной ей функцией x при $x \to \infty$, ибо тогда предел равен нулю. На самом деле

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x(\sqrt{1+1/x}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Лекция 12. Некоторые важные пределы

12.1. Некоторые важные пределы

Мы рассмотрим пределы некоторых функций, которые будут встречаться неоднократно в дальнейшем.

1. Доказать

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Предварительно докажем неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \text{ при } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

С этой целью в круге радиуса r построим острый угол x и треугольники $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$, где AC – касательная к окружности в точке A (Рис. 3). Для площадей фигур имеем

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект.}AOB} < S_{\triangle AOC}. \tag{2}$$

Длина дуги $\smile AB = rx$, где x – величина угла. Неравенство (2) приводится к

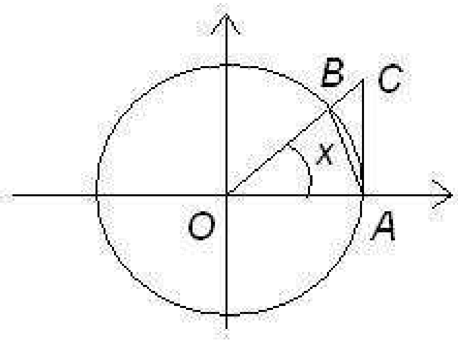


Рис. 3

виду

$$0,5\,r^2\sin x < 0,5\,r^2 x < 0,5\,r^2 \operatorname{tg} x,$$

сократив на $0,5r^2$, придем к неравенству (1). В предположении, что $0 < x < \pi/2$ разделим $\sin x$ на каждый из членов неравенства (1)

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{3}$$

Ввиду четности функций в этом неравенстве, оно будет справедливо для всех x, $|\,x| < \pi/2$. Переходя к пределу при $x \to 0$ в неравенстве (3), получим требуемый результат.

2. Доказать

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Докажем существование пределов справа и слева при $x \to \pm 0$ и их равенство. Раньше было показано, что $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e$. Отсюда следует, что для любой последовательности $\{n_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$, имеем $\lim\limits_{k\to\infty}(1+1/n_k)^{n_k} = e$.

Найдем предел справа $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{1/x}$. Возьмем любую последовательность $\{x_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, $x_k > 0$. Не ограничивая общности можно считать $x_k < 1$. Положим

$$n_k \le \frac{1}{x_k} < n_k + 1, \quad \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty,$$

Так как $\dfrac{1}{n_k+1} < x_k \le \dfrac{1}{n_k}$, то $\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}$.
Переходя к пределу при $k \to \infty$ и используя Теорему о трех последовательностях, получим $\lim\limits_{k\to\infty}(1+x_k)^{1/x_k} = e$. Ввиду произвольности последовательности $\{x_k\}$, имеем $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{1/x} = e$.

Найдем предел слева $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{1/x}$. Не ограничивая общности, полагаем $x > -1$. Сделаем замену $x = -y$, где $0 < y < 1$. Тогда

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{1/x} = \lim_{y\to+0}(1-y)^{-1/y} = \lim_{y\to+0}\left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/y} =$$

$$= \lim_{y\to+0}\left[\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1-y}{y}} \cdot \left(1+\frac{y}{1-y}\right)\right] = e.$$

Таким образом, мы доказали существование и равенство пределов справа и слева функции $(1+x)^{1/x}$ при $x \to 0$. Отсюда следует наше равенство.

3. Доказать

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{1/x} = \log_a e$$

4. Доказать

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a > 0.$$

Обозначим $\beta(x) = a^x - 1$, очевидно $\lim\limits_{x\to 0}\beta(x) = 0$. Тогда $x = \log_a(1+\beta)$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+\beta)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

5. Доказать

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Обозначим $\beta(x) = (1+x)^\alpha - 1$. Очевидно $\lim\limits_{x\to 0}\beta(x) = 0$, $\alpha\ln(1+x) = \ln(1+\beta)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+x)}{x}\right] = \alpha.$$

Примеры.

$$1).\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\sqrt{1+x}-1\sim 0,5\,x,\ x\to 0.$$

$$2).\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}=\frac{1}{2}\Longrightarrow 1-\cos x\sim 0,5\,x^2,\ x\to 0.$$

$$3).\ \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{0,5(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4}.$$

Решение получено методом выделения главной части.

$$4).\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}\right)=\frac{1}{2}\Longrightarrow\operatorname{tg}x-\sin x\sim 0,5\,x^3,\ x\to 0.$$

12.2. Пределы степенно - показательных выражений

Рассмотрим степенно показательные функции вида $y=u^v$, где $u\,(x)$, $v\,(x)$ – функции переменной $x\in X\subset\mathbf{R}$. Предполагается, что множество X имеет предельную точку x_0. В частности u и v могут быть функциями натурального аргумента, то есть последовательностями $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

Пусть существуют конечные пределы

$$a=\lim_{x\to x_0}u\,(x),\quad b=\lim_{x\to x_0}v\,(x),$$

причем $a>0$. Требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0}u^v$. Представим функцию в виде $y=u^v=e^{v\ln\,u}$. Используя теорему о пределе сложной функции, найдем $\lim\limits_{x\to x_0}v\,(x)\ln\,u\,(x)=b\ln\,a$. Отсюда следует

$$\lim_{x\to x_0}u^v=\lim_{x\to x_0}e^{v\ln\,u}=e^{b\ln\,a}=a^b.$$

Определение предела $\lim\limits_{x\to x_0}(v\ln\,u)$ по известным пределам a и b возможно всегда, кроме случаев, когда произведение $v\ln\,u$ при $x\to x_0$ представляет неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. В этих случаях выражение u^v представляет неопределенность вида 1^∞, 0^0, ∞^0. Для решения вопроса о пределе функции u^v мало знать лишь пределы функций u и v, а нужно учесть закон, по которому они стремятся к этим пределам.

Примеры.

1) Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2x}$. Здесь имеем неопределенность вида 1^∞. Запишем функцию в виде $(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2x}=e^{\operatorname{ctg}^2x\ln\,\cos x}$ и вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2x\ln\,\cos x=\lim_{x\to 0}\cos^2x\cdot\frac{\ln\,\sqrt{1-\sin^2x}}{\sin^2x}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos^2x\cdot\frac{\ln\,(1-\sin^2x)}{-\sin^2x}=-\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{ctg}^2 x(\ln\cos x)} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

2) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)^{\mathrm{tg}(1/n)}$. Имеем неопределенность вида $0/0$. Запишем функцию в виде $(1/n)^{\mathrm{tg}(1/n)} = e^{\mathrm{tg}(1/n)\ln(1/n)}$ и вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{tg}\frac{1}{\mathrm{n}}\cdot\ln\frac{1}{\mathrm{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}(1/\mathrm{n})}{(1/n)}\cdot\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} = -\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{tg}(1/\mathrm{n})}{(1/n)}\cdot\frac{\ln n}{n} = 0.$$

$$\lim_{n\to\infty}(1/n)^{\mathrm{tg}(1/\mathrm{n})} = \lim_{n\to\infty} e^{\mathrm{tg}(1/\mathrm{n})\ln(1/\mathrm{n})} = e^0 = 1$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{1/x}+1/x)^x$. Имеем неопределенность 1^∞. Обозначим $y = 1/x$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}(e^{1/x}+1/x)^x = \lim_{y\to 0}(e^y+y)^{1/y} = \lim_{y\to 0} e^{(1/y)\ln(e^y+y)} = e^2.$$

Здесь использован следующий результат

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(e^y+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+e^y+y-1)}{e^y+y-1}\cdot\frac{e^y+1-1}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+e^y+y-1)}{e^y+y-1}\cdot\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{e^y-1}{y}\right) = 2.$$

4). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x)^{1/m}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{(1+\beta x)^{1/n}-1}{x} = \frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

5). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\cdot\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{[(1+\alpha x)^{1/m}-1][(1+\beta x)^{1/n}-1]}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x} =$$

$$= 2\frac{\alpha}{m} - \left(\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}\right) = \frac{\alpha}{m}+\frac{\beta}{n}.$$

Здесь были использованы результаты предыдущего примера.

6). Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$. Обозначим $x = t^{mn}$, тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{t\to 0}\frac{t^n-1}{t^m-1} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{t^n-1}{t-1}\cdot\frac{t-1}{t^m-1} = \frac{n}{m}.$$

7). Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\sin^3 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{\cos x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2(x/2)}{(x/2)^2}\cdot\frac{(x/2)^2}{\cos x\sin^2 x}=\frac{1}{2}.$$

8). Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}=\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(x-1)\right)=$$

$$=-\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}(x-1)=\lim_{x\to 1}\cos\frac{\pi}{2}(x-1)\,\frac{x-1}{\sin\dfrac{\pi}{2}(x-1)}=\frac{2}{\pi}.$$

9). Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\dfrac{1}{1-\pi/4}}$. Положим $t=x-\dfrac{\pi}{4}$, тогда

$$\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\dfrac{1}{1-\pi/4}}=\lim_{t\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\right)^{\dfrac{1}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1+\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}t}\right]^{\dfrac{1}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[\frac{1+\operatorname{tg}t}{1-\operatorname{tg}t}\right]^{\dfrac{1}{\operatorname{tg}t}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}t}{t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[(1+\operatorname{tg}t)^{\dfrac{1}{\operatorname{tg}t}}\cdot(1-\operatorname{tg}t)^{-\dfrac{1}{\operatorname{tg}t}}\right]^{\dfrac{\operatorname{tg}t}{t}}=e^2.$$

10). Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{1/3}-1}{\dfrac{1}{x}}-\frac{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{1/2}-1}{\dfrac{1}{x}}\right]=2.$$

Лекция 13. Непрерывные функции

13.1 Определение непрерывной функции

С понятием предела тесно связано другое важное понятие анализа – непрерывность функций. Установление его принадлежит Больцано и Коши.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbf{R}$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в $(\cdot)\, x_0$, если существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Подчеркнем, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $(\cdot)\, x_0$, то она определена в некоторой окрестности этой точки, а не в проколотой окрестности, как это было в случае определения предела.

Согласно Определению предела функции по Гейне (в терминах последовательностей) Определение 1 непрерывной функции в точке x_0 равносильно тому, что для любой последовательности $\{x_n\} \subset U(x_0)$, $x_n \to x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится и $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Согласно Определению предела функции по Коши (в терминах ε – δ) Определение 1 непрерывной функции в точке x_0 равносильно тому, что

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0,\ \text{что для } \forall\, x \in U(x_0),\ |\, x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

выполняется неравенство $|\, f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

В этих определениях непрерывности функции в точке x_0 вместо проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(x_0)$ взята обычная окрестность $U(x_0)$, требования $x_n \neq x_0$ и $x \neq x_0$ опущены, так как здесь они являются лишними. Предел функции $f(x_0)$ при $x \to x_0$ равен значению $f(x_0)$ в этой точке.

Можно сказать, что понятие непрерывности является частным случаем понятия предела, здесь предел функции равен значению функции в этой точке.

Определение непрерывности функции в точке можно сформулировать в других терминах. Пусть $x = x_0 + \Delta x$, где $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента в точке x_0. Значение функции $f(x)$ запишем в виде

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f,$$

где $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ есть приращение функции f точке x_0.

В этих обозначениях условие непрерывности функции перепишется так

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0.$$

Отсюда следует утверждение: для того, чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы ее приращение в этой точке $\Delta f \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Иными словами непрерывность функции в точке означает, что бесконечно малым приращениям аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b), возможно кроме точки $x_0 \in (a, b)$. Точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$, если она не является непрерывной или не определена в этой точке.

Определение 3. Если точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ и существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода.

Величина $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Если $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то $(\cdot)\, x_0$ называется точкой устранимого разрыва. Это название оправдано тем, что в этом случае можно доопределить функцию $f(x)$ в точке x_0, положив

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

в результате получим непрерывную в точке x_0 функцию.

Определение 4. Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется точкой разрыва второго рода.

Очевидно, что в точке разрыва второго рода не существует по крайней мере один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$.

Примеры.
1) Функция $f(x) = \operatorname{sign} x$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода. Функция $f(x) = 1/x$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода.
2) Функция Дирихле

$$D\,(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

разрывна во всех точках, причем все точки разрыва второго рода, так как в любой окрестности точки x есть как рациональные, так и иррациональные числа.

Определение 5. Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $(a, x_0]$. Функция $f\,(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to\, x_0 - 0} f\,(x) = f(x_0)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[x_0, b)$. Функция $f\,(x)$ называется непрерывной справа в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to\, x_0 + 0} f\,(x) = f(x_0)$.

Пример. Функция $y = E(x) = [x]$ непрерывна справа в точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ разрывна слева в этих точках. Во всех других точках функция непрерывна.

13.2 Локальные свойства непрерывных функций

Локальными называют такие свойства, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки из области определения. Примерами локальных свойств являются существование предела и непрерывность функции в точке.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $a \in \mathbf{R}$, то она ограничена в некоторой окрестности $U(a)$; если при этом $f(a) \neq 0$, то существует окрестность $U(a)$, где функция $f(x)$ сохраняет знак.

► Непрерывность функции $f(x)$ в точке "a" равносильна условию

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ что для } \forall\, x \in U(a),\ |\, x - a| < \delta$$

выполняется неравенство $|\, f(x) - f(a)| < \varepsilon$ или $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.

Это означает ограниченность функции $f(x)$ в окрестности $U(a, \delta)$. Из этого неравенства следует совпадение ее знака со знаком числа $f(a) \neq 0$. При $f(a) > 0$ возьмем $\varepsilon = f(a)$, получим $f(x) > 0$; при $f(a) < 0$ возьмем $\varepsilon = -f(a)$, получим $f(x) < 0$. ◄

Теорема 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в $(\cdot)\, a \in \mathbf{R}$, то и функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g, (при условии $g(a) \neq 0$) также непрерывны в $(\cdot)\, a$.

► Утверждение Теоремы непосредственно следует из Определения 1 непрерывности функции в точке и свойств пределов функций. Докажем, например, непрерывность отношения $f(x)/g(x)$. По условию $g(a) \neq 0$, согласно Теореме 1 $\exists\, U(a)$, где $g(x) \neq 0$. Поэтому отношение $f(x)/g(x)$ определено в этой окрестности. По свойству пределов функций имеем

$$\lim_{x \to a} [f(x)/g(x)] = (\lim_{x \to a} f(x))/(\lim_{x \to a} g(x)) = f(a)/g(a), \tag{1}$$

так как пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ существуют и равны $f(a)$ и $g(a)$, соответственно, в силу непрерывности этих функций. Равенство (1) и означает непрерывность отношения $f(x)/g(x)$ ◄

Теорема 3. Пусть $F(x) = (g \circ f)(x)$ – сложная функция или композиция функций $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$, а функция $g(y)$, где $y = f(x)$, непрерывна в точке $y_0 = f(x_0) \in Y$, то и сложная функция $F(x) = g(f(x))$ будет непрерывна в точке $x_0 \in X$.

► Так как функция $g(y)$ непрерывна в точке $y = y_0$, то

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \Delta(\varepsilon) > 0, \text{ что для } \forall\, y,\ |\, y - y_0| < \Delta \Longrightarrow |\, g(y) - g(y_0| < \varepsilon.$$

С другой стороны, ввиду непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, по $\Delta > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $|\, x - x_0| < \delta$ следует $|\, f(x) - f(x_0)| = |\, y - y_0| < \Delta$. Таким образом, мы получили для $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, что из

$$|\, x - x_0| < \delta \Longrightarrow |\, g(y) - g(y_0)| = |\, g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$$

Этим доказана непрерывность функции $F(x) = g(f(x))$ в $(\cdot)\, x_0$ ◀

Утверждение Теоремы 3 можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x)),$$

следовательно, операция предельного перехода перестановочна с операцией взятия функции.

Пример. Степенную функцию x^α, $\alpha > 0$, можно представить в виде $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, которая является суперпозицией логарифмической и показательной функций. Из непрерывности последних двух функций вытекает непрерывность степенной функции.

13.3 Глобальные свойства непрерывных функций. Теоремы Больцано – Коши для непрерывных функций

Будут рассмотрены свойства непрерывных функций, связанные со всей областью определения функции, такие свойства называют глобальными.

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$ и непрерывная в каждой его точке, называется непрерывной на этом отрезке. При этом под непрерывностью функции в точке "a" понимают непрерывность справа, а под непрерывностью в точке "b" – непрерывность слева.

Аналогично определяется непрерывность функции на любом промежутке.

Теорема 1 (Больцано - Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда на этом отрезке найдется точка, в которой функция обращается в нуль.

▶ Пусть для определенности $f(a) < 0$, и $f(b) > 0$. Поделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если в точке деления функция $f(x)$ обращается в нуль, это и будет искомая точка. Если в точке деления функция $f(x) \neq 0$, то на концах одного из отрезков, функция $f(x)$ снова принимает значения разных знаков, обозначим этот отрезок $[a_1, b_1]$. Разделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и продолжим далее процесс деления. При этом мы либо на конечном шаге получим точку деления, где $f(x) = 0$, ибо получим бесконечную последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, длины которых стремятся к нулю. Для n – отрезка $[a_n, b_n]$ будет $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$. По Лемме о вложенных отрезах существует единственная точка "c", принадлежащая всем отрезкам, для которой $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = c$. По свойствам предела и определения непрерывности функции получаем

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(c) \leq 0, \quad \lim_{n \to \infty} f(b_n) = f(c) \geq 0.$$

Отсюда следует $f(c) = 0$ ◀

Теорема 2 (Больцано - Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения $f(a) = A$ и

$f(b) = B$. Тогда для любого числа C, лежащего между A и B найдется точка "c" в которой $f(c) = C$.

► Введем функцию $\varphi(x) = f(x) - C$, которая определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. На концах отрезка функция $\varphi(x)$ принимает значения разных знаков, поскольку $\varphi(a) \cdot \varphi(b) = (A - C)(B - C) < 0$. По Теореме 1 найдется $(\cdot)\, c$, в которой $\varphi(c) = f(c) - C = 0$. То есть $f(c) = C$ ◄

Теорема 2 означает, что непрерывная на промежутке функция, переходя от одного значения к другому, принимает хотя бы один раз и все промежуточные значения. Указанное свойство есть следствие непрерывности функции, однако и разрывные функции могут обладать этим свойством. Например, функция $y = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, принимает все значения между -1 и $+1$.

Если функция $f : X \to Y$ определена на промежутке X, то есть принимает конечные значения при $\forall\, x \in X$, это не влечет за собой ограниченность функции $f(x)$, то есть ограниченность множества значений $\{f(x)\} = Y$. Например, функция $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1]$ и $f(0) = 0$, определена на отрезке $[0, 1]$, но не ограничена. Иначе дело обстоит с функциями, определенными и непрерывными на отрезке.

13.4 Теоремы Вейерштрасса для непрерывных функций

Теорема 3 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке, то есть $\exists\, M > 0$, что $|\, f(x)| \leq M$ для $\forall\, x \in [a, b]$.

► В силу локальных свойств непрерывной функции для $\forall\, x \in [a, b]$ найдется окрестность $U(x)$, на которой функция $f(x)$ ограничена. Совокупность таких окрестностей, построенная для каждой точки $\in [a, b]$, образует покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами, из которого по Лемме о конечном покрытии можно извлечь конечную систему интервалов $U(x_1)$, $U(x_2)$,...,$U(x_n)$, в совокупности покрывающих отрезок $[a, b]$. Поскольку на каждом из множеств $U(x_k) \cap [a, b]$, $k = \overline{1, n}$, функция $f(x)$ ограничена, то есть $m_k \leq f(x) \leq M_k$, то она будет ограничена и на всем отрезке $[a, b]$:

$$\text{для } \forall\, x \in [a, b] : \; \min_k \{m_k\} \leq f(x) \leq \max_k \{M_k\}.$$

◄

Теорема 4 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке верхней и нижней граней.

► Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и потому ограничена. Всякое ограниченное множество имеет верхнюю и нижнюю грани. Положим $M = \sup\, f(x)$, $m = \inf\, f(x)$, $x \in [a, b]$.

Допустим, что всегда $f(x) < M$, то есть верхняя грань не достигается на

$[a, b]$. Возьмем вспомогательную функцию $\varphi(x) = 1/[M - f(x)]$. Так как знаменатель в нуль не обращается, эта функция непрерывна на $[a, b]$ и, следовательно, ограничена $0 < \varphi(x) \le K$. Отсюда получим $f(x) \le M - 1/K$, то есть число $M - 1/K$, меньшее чем M, ограничивает функцию $f(x)$, чего не может быть, так как $M = \sup f(x)$. Полученное противоречие доказывает теорему для случая верхней грани. То есть на отрезке $[a, b]$ найдется точка x_0, где $f(x_0) = M$.

Аналогично доказывается утверждение для нижней грани ◄

Свойства непрерывных функций, доказанные в Теоремах 3 и 4, определяются не только поведением самой функции, то есть ее непрерывностью, но также и свойствами области определения, в частности тем, что из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие. Например, функции $f(x) = x$ и $f(x) = 1/x$ непрерывны на интервале $(0, 1)$, но первая не имеет ни максимума, ни минимума, а вторая функция не ограничена на этом интервале.

Лекция 14. Непрерывность монотонных функций
Непрерывность элементарных функций

14.1. Непрерывность монотонных функций

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на промежутке X. Этот промежуток может быть конечным или бесконечным. Мы установим признак, с помощью которого можно доказать непрерывность монотонной функции во всем промежутке.

Утверждение 1. Любая монотонная на интервале (a, b) функция может иметь только точки разрыва первого рода.

► Это вытекает из Следствия Теоремы 1 п. 10.4 (монотонная функция имеет в каждой точке конечные пределы слева и справа). ◄

Теорема 1. Пусть функция $f\colon X \to Y$ – монотонна на промежутке X и ее значения сплошь заполняют промежуток Y. Тогда функция $f(x)$ непрерывна на X.

► Предположим, что функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутке X. Возьмем $\forall\,(\cdot)\,x_0 \in X$ и пусть функция $f(x)$ имеет разрыв слева в этой точке. Этот разрыв может быть только первого рода и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0)$, который меньше $f(x_0)$. Так как для $x < x_0$ будет $f(x) \le f(x_0-0)$, а для $x > x_0$ очевидно $f(x) > f(x_0)$, то функция $f(x)$ не может принимать значения $y = f(x)$, лежащие между числами $f(x_0-0)$ и $f(x_0)$ из Y.

Это противоречит условию теоремы, что каждое значение $y \in Y$ принимается функцией $f(x)$ хоть один раз и доказывает невозможность существования разрыва слева в точке x_0 функции $f(x)$.

Аналогично доказывается, что функция $f(x)$ не может иметь разрыва справа в точке $x_0 \in X$, а также утверждение для монотонно убывающей функции ◄

Следствие. Для того, чтобы функция $f(x)$, монотонная на отрезке $[a, b]$, была непрерывна на нем, необходимо и достаточно, чтобы множество $f([a, b])$ ее значений было отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

► *Необходимость.* Если функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на $[a, b]$, то все ее значения лежат между числами $f(a)$ и $f(b)$, которые она принимает на концах отрезка. Из Теоремы 2 (Больцано - Коши) следует, что функция $f(x)$ принимает и все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Значит множество значений функции $f(x)$ является отрезком с концами $f(a)$ и $f(b)$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ монотонна на $[a, b]$ и множество ее значений есть отрезок с концами $f(a)$ и $f(b)$. Тогда выполнены условия Теоремы 1 и функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. ◄

Утверждение 2. Множество точек разрыва монотонной функции $f\colon X \to \mathbf{R}$ не более чем счетно.

► С каждой точкой разрыва a функции $f\colon X \to \mathbf{R}$ свяжем некоторую окрестность этой точки $U(a)$ (интервал), где функция $f(x)$ определена (кроме самой точки a). Такой интервал существует, так как точка a является предельной точкой множества X. Интервалы различных точек разрыва можно выбрать так, чтобы они не пересекались. Но на прямой может быть не более чем счетное множество непересекающихся интервалов. В самом деле, в каждом из них можно выбрать по рациональной точке, и тогда множество интервалов окажется эквивалентным некоторому подмножеству рациональных чисел. Значит оно счетно. Не более чем счетно и эквивалентное ему по построению множество точек разрыва монотонной функции. ◄

14.2 Обратные функции

В определении понятия функции $f : X \to Y$ предполагалось, что каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y = f\,(x) \in Y$. Иногда приходится иметь дело с функциями, значения которых являются множествами, состоящими более чем из одного элемента. Такие функции называют многозначными. Многозначные функции возникают, например, при рассмотрении обратных функций.

Определение 1. Пусть определена функция $f : X \to Y$. Обозначим через $f^{-1}(y)$ прообраз элемента $y = f\,(x) \in Y$, то есть

$$f^{-1}(y) := \{x|\, x \in X,\ f(x) = y\}.$$

Тогда функция $f^{-1}(y) : Y \to X$, определенная на множестве Y и ставящая в соответствие каждому $y \in Y$ множество элементов $x = f^{-1}(y) \in X$, называется обратной к функции $f\,(x)$.

Определение 2. Функция $f : E \to \mathbf{R}$ называется строго возрастающей (строго убывающей) на множестве E, если для $\forall\, x_1, x_2 \in E$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство

$$f\,(x_1) < f\,(x_2), \quad (f\,(x_1) > f\,(x_2)).$$

Строго возрастающие и строго убывающие функции называются строго монотонными. Очевидно такие функции являются и просто монотонными в смысле прежнего определения. Строго возрастающие и строго убывающие функции будем обозначать символами $f(x) \Uparrow$ и $f(x) \Downarrow$, соответственно.

Лемма 1. Если функция $f : X \to Y$ непрерывна на промежутке $X = \{x\}$, то множество $Y = \{y\}$, $y = f\,(x)$, также является промежутком.

► Пусть $M = \sup f(x)$, $m = \inf f(x)$, $x \in X$, и y_0 – любое число между m и M: $m < y_0 < M$. Необходимо найдутся значения функции $y_1 = f(x_1)$ и

$y_2 = f(x_2)$ такие, что
$$m \le y_1 < y_0 < y_2 \le M.$$
Это вытекает из определения верхней и нижней граней. Тогда, в силу Теоремы 2 (Больцано - Коши), найдется между x_1 и x_2 такое значение x_0, что $f(x_0) = y_0$. Следовательно $y_0 \in Y = \{f(x)\}$.

Таким образом, множество Y представляет собой промежуток с концами m и M, которые могут принадлежать ему или нет ◀

Мы видели, что в случае монотонной функции только что сформулированное свойство функции влечет ее непрерывность. Для немонотонной функции так будет не всегда. Это видно из рассмотренного ранее примера функции $y = \sin(1/x)$, $x \neq 0$, которая в любом промежутке, содержащем точку $x = 0$ принимает все значения интервала $(-1, 1)$, но не является непрерывной.

Применим изученные свойства непрерывной функции к установлению при некоторых предположениях обратной функции, однозначной и непрерывной.

Теорема 1. Пусть функция $f : X \to Y$ строго монотонна и непрерывна в некотором промежутке X. Тогда в соответствующем промежутке $Y = \{f(x)\}$ значений функции $y = f(x)$ существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, которая также строго монотонна и непрерывна на промежутке Y.

▶ Ограничимся случаем строгого возрастания функции $f(x)$. Так как значения непрерывной функции $f(x)$ сплошь заполняют промежуток Y, то для $\forall\, y_0 \in Y\ \exists\, x_0 \in X$, что $f(x_0) = y_0$. Ввиду строгой монотонности функции $f(x)$ такое значение x_0 только одно: если $x \neq x_0$, то и $f(x) \neq y_0$. Сопоставляя произвольно взятому числу $y_0 \in Y$ именно это значение $x_0 \in X$, мы получим однозначную функцию $x = g(y)$, обратную для функции $y = f(x)$.

Докажем, что функция $g(y)$, подобно функции $f(x)$, строго возрастает. Пусть $y_1 < y_2$ и $x_1 = g(y_1)$, $x_2 = g(y_2)$. Тогда по Определению 1 обратной функции $g(y)$ имеем $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Если $x_1 \ge x_2$, то в силу монотонного возрастания функции $f(x)$ будет $y_1 \ge y_2$, что противоречит условию, значит возможно только $x_1 < x_2$. Согласно Определению 2 функция $g(y)$ строго возрастает на промежутке Y.

Чтобы доказать непрерывность функции $x = g(y)$, сошлемся на Теорему 1, условия которой выполнены: функция $g : Y \to X$ строго монотонна на Y и ее значения сплошь заполняют промежуток X ◀

С помощью доказанной теоремы можно установить ряд уже известных результатов. Например, если применить ее к функции $y = x^n$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in [0, \infty)$, то придем к существованию и непрерывности арифметического корня $x = \sqrt[n]{y}$, $y \in [0, \infty)$.

Замечание. При построении графиков взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ полезно иметь в виду, что точки плоскости с координатами $(x,\ f(x))$ и $(y,\ f^{-1}(y))$ в одной и той же координатной системе симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, графики взаимно обратных функций, изображенные в одной системе координат, оказываются симметричными относительно этой биссектрисы.

14.3 Непрерывность элементарных функций

Основными (или простейшими) элементарными функциями называют следующие функции:

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x,\ \arcsin x,\ \arccos x,$$

$$\operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,\ x^{\alpha},\ a^{x},\ \log_a x.$$

Элементарными называют функции, полученные из основных элементарных функций посредством конечного числа арифметических операций и суперпозиций.

1) **Тригонометрические функции**.

Рассмотрим функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна при $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Известно, что при $x \in (0, \pi/2)$ справедливо неравенство: $\sin x < x$. Отсюда легко вывести неравенство $|\sin x| < |x|$, справедливое при $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Фиксируем $(\cdot)\, x \in \mathbf{R}$ и возьмем приращение аргумента Δx. Оценим приращение функции

$$|\sin(x + \Delta x) - \sin x| = 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leq |\Delta x|.$$

Отсюда следует, что при $\Delta x \to 0$ будет $\Delta y \to 0$, это означает непрерывность функции $y = \sin x$ в $(\cdot)\, x \in \mathbf{R}$.

Аналогично доказывается непрерывность функции $y = \cos x$ при $\forall\, x \in \mathbf{R}$. Непрерывность функций $y = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $y = \operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ всюду на $\mathbf{R}$, кроме точек, где знаменатель обращается в нуль, следует из непрерывности функций $\sin x$ и $\cos x$ и Теоремы о частном непрерывных функций.

2) **Обратные тригонометрические функции**.

1. Функция $y = f(x) = \sin x$ непрерывна и возрастает на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Значит сужение этой функции на отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ имеет обратную функцию, обозначаемую $x = \arcsin y$. Эта функция определена и непрерывна на отрезке $[\sin(-\pi/2),\ \sin(\pi/2)] = [-1, 1]$, она возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$.

2. Функция $y = f(x) = \cos x$ непрерывна и убывает на отрезке $[0, \pi]$. В силу Теоремы 1 она имеет обратную функцию, обозначаемую $x = \arccos y$, которая определена и непрерывна на отрезке $[-1, 1]$. Функция убывает от значения π до значения 0.

3. Ограничение функции $y = \operatorname{tg} x$ на интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ является возрастающей от $-\infty$ до $+\infty$ непрерывной функцией, которая имеет обратную функцию, обозначаемую $x = \operatorname{arctg} y$, определенную на всей числовой прямой, непрерывную и возрастающую в пределах интервала $(-\pi/2, \pi/2)$.

4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна на интервале $(0, \pi)$ и убывает от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому она имеет обратную функцию, обозначаемую $x = \operatorname{arcctg} y$, которая определена и непрерывна на всей числовой прямой и убывает на ней в пределах интервала своих значений $(0, \pi)$ от π до 0.

3) **Показательная функция** $y = a^x$**,** $a > 1$.

На промежутке $(-\infty, \infty)$ функция возрастает, ее значения положительны и заполняют весь интервал $(0, \infty)$. Следовательно, в силу Теоремы 1, функция a^x непрерывна на интервале $(-\infty, \infty)$.

Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$, где функция строго убывает.

4) **Логарифмическая функция** $y = \log_a x$**,** $a > 0$**,** $a \neq 1$.

Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ строго возрастает на интервале $(0, +\infty)$. Ее значения заполняют весь интервал $(-\infty, \infty)$, (обратная функция $x = a^y$ определена на этом интервале), поэтому функция $y = \log_a x$ непрерывна на интервале $(0, +\infty)$.

Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$, где функция строго убывает.

5) **Степенная функция** $y = x^\alpha$**,** $\alpha \in \mathbf{R}$.

Эта функция на интервале $(0, +\infty)$ возрастает при $\alpha > 0$ и убывает при $\alpha < 0$. При этом она принимает все значения из интервала $(0, +\infty)$. Следовательно функция $y = x^\alpha$ непрерывна на интервале $(0, +\infty)$.

Из доказанного выше следует, что все основные элементарные функции непрерывны в области их определения.

Лекция 15. Равномерная непрерывность функций

15.1 Равномерная непрерывность функций

Непрерывность функции $f\colon E \to \mathbf{R}$ в точке $x_0 \in E$ означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Это Определение равносильно тому, что

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_\varepsilon > 0, \text{ что для } \forall\, x \in U(x_0),\ |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

выполняется неравенство

$$|\, f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Предположим, что функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ непрерывна на всем промежутке E. Тогда при изменении точки x_0 в пределах промежутка E, даже если число $\varepsilon > 0$ остается неизменным, число $\delta_\varepsilon > 0$ вообще говоря меняется. Иными словами, число δ_ε зависит не только от ε, но и от точки x_0. Это можно показать на графике функции (рис. 4). Чтобы удовлетворить неравенству (2) при фиксированном $\varepsilon > 0$, нужно брать разные δ_ε для разных точек x_0.

Таким образом, по отношению к функции $f\colon E \to \mathbf{R}$, непрерывной на промежутке E, встает вопрос: существует ли при заданном $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, которое годилось бы для всех точек x_0 промежутка E?

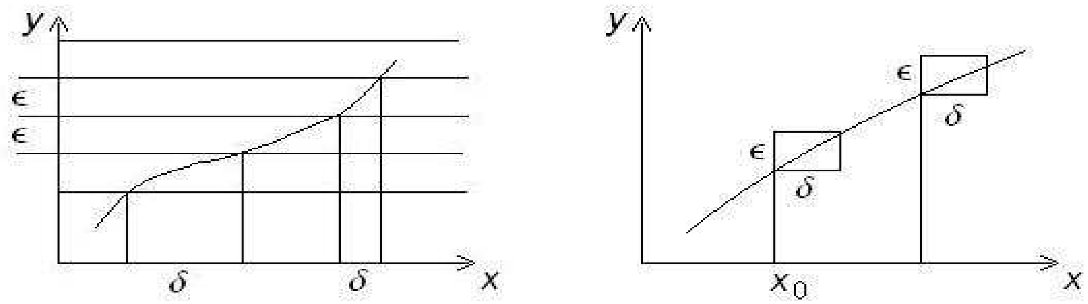


Рис. 4 Равномерная непрерывность функции

Определение 1. Функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ называется равномерно непрерывной на промежутке $E \subset \mathbf{R}$, если для $\forall\, \varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall\, x_1, x_2 \in E$ таких, что $|\, x_1 - x_2| < \delta$ выполняется неравенство

$$|\, f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

В этом случае число $\delta > 0$ зависит только от числа $\varepsilon > 0$ и может быть указано до выбора точки x_0, так как δ годится для всех точек промежутка E одновременно.

Геометрически равномерная непрерывность функции $f(x)$, непрерывной на промежутке E, означает, что график функции не выходит за пределы прямоугольника со сторонами ε и δ в любой точке промежутка E (рис. 4).

Если функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ равномерно непрерывна на E, то она и непрерывна в каждой $(\cdot)\, x_0 \in E$. Действительно, сделав замену $x_1 = x$ и $x_2 = x_0$ в Определении 1 равномерной непрерывности, мы получим Определение функции, непрерывной в $(\cdot)\, x_0$.

Однако из непрерывности функции $f\colon E \to \mathbf{R}$ на множестве E не вытекает ее равномерная непрерывность на этом множестве.

Примеры.

1) Функция $f(x) = \sin(1/x)$ непрерывна на интервале $(0, 1)$. Однако в любой окрестности точки $x = 0$, функция $f(x)$ принимает как значение - 1, так и значение + 1, поэтому при $0 < \varepsilon < 2$ для нее не будет выполнено условие равномерной непрерывности.

2) Функция $f(x) = x^2$ непрерывна на $\mathbf{R}$, однако она не является равномерно непрерывной на $\mathbf{R}$. В самом деле, возьмем точки $x'_n = \sqrt{n+1}$ и $x''_n = \sqrt{n}$, в этих точках $f(x'_n) = n + 1$, $f(x''_n) = n$ и $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$. Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,$$

то при $\forall\, \delta > 0$ найдутся точки x'_n и x''_n такие, что $|\, x'_n - x''_n| < \delta$, в то время как $f(x'_n) - f(x''_n) = 1$.

Для функций, непрерывных на отрезке, подобных вещей не может быть.

15.2 Теорема Кантора о равномерной непрерывности

Теорема Кантора (о равномерной непрерывности). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она и равномерно непрерывна на этом отрезке.

► Доказательство проведем методом от противного. Пусть функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на отрезке $[a, b]$. То есть,

$$\exists\, \varepsilon > 0, \text{ что для } \forall\, \delta > 0\; \exists\, x_1, x_2 \in [a, b],\; |\, x_1 - x_2| < \delta :\; |\, f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

Возьмем последовательность чисел $\delta_n = \delta_0/n$, очевидно $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для каждого δ_n найдутся значения x'_n и x''_n в $[a, b]$, (они играют роль элементов x_1 и x_2) такие, что

$$|\, x'_n - x''_n| < \delta_n, \text{ но } |\, f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon.$$

Последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ ограничены, по Лемме Больцано - Вейерштрасса из ограниченной последовательности можно извлечь частичную последовательность, сходящуюся к некоторой $(\cdot)\, x_0$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что уже сама последовательность $\{x'_n\}$ сходится к x_0. Вторая последовательность $\{x''_n\}$ также сходится к x_0, ввиду $|\,x'_n - x''_n| \to 0$ при $n \to \infty$, (ибо $|\,x'_n - x''_n| < \delta_n$, а $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$).

Так как функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) = f(x_0)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f(x''_n) = f(x_0).$$

Так что $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x'_n) - f(x''_n)] = 0$, а это противоречит тому, что при $\forall\, n \in N$ $|\,f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$. Теорема доказана ◄

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subset \mathbf{R}$ и $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ на $E \subset X$. Число $\omega = M - m$ называется колебанием функции f на множестве E.

Часто используется другая формулировка.

Определение 3. Колебанием функции $f\colon X \to \mathbf{R}$ на множестве $E \subset X$ называется величина

$$\omega(f, E) = \sup|\,f(x_1) - f(x_2)|, \quad x_1, x_2 \in E,$$

то есть верхняя грань модуля разности значений функции на всевозможных парах точек $x_1, x_2 \in E$.

Оба определения совпадают, так как

$$\sup_{x_1,x_2\in E}|\,f(x_1) - f(x_2)| = \sup_E f(x) - \inf_E f(x).$$

Первая формулировка определения удобнее для практического использования.

Примеры.

$$\omega\left(x^2, [-1, 2]\right) = 4, \quad \omega\left(x, (-1, 2)\right) = 3,$$

$$\omega\left(\operatorname{sign} x, [0, 2]\right) = 1, \quad \omega\left(\operatorname{sign} x, (0, 2)\right) = 0.$$

Следствие. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда по заданному $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, что при произвольном разбиении отрезка $[a, b]$ на отрезки с длинами меньше δ, колебание функции $f(x)$ в каждом из них будет меньше ε.

► Если по заданному $\varepsilon > 0$ взять в качестве $\delta > 0$ число из Определения равномерной непрерывности функции $f(x)$, то в любом частичном отрезке с длиной меньше δ разность $|\,f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для $\forall\, x_1, x_2$ из этого отрезка. Значит и колебание функции $f(x)$ на этом отрезке будет меньше ε ◄

Примеры.

1). Доказать, что функция $y = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$.

Пусть x_1 и x_2 – произвольные числа из $\mathbf{R}$. Оценим модуль разности

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\cos\frac{x_1 + x_2}{2} \right| \le |x_1 - x_2|.$$

Для $\forall\,\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon$, тогда для $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, $\Longrightarrow$ $|\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon$. Таким образом, функция $y = \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$.

2). Доказать, что функция $y = 1/x$: а) равномерно непрерывна на $[a, +\infty)$, $a > 0$; б) не является равномерно непрерывной на $(0, a]$.

а) Пусть $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, $a > 0$. Тогда

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 x_2} \le \frac{|x_1 - x_2|}{a^2},$$

так как $x_1 \ge a > 0$, $x_2 \ge a > 0$. Для $\forall\,\varepsilon > 0$ возьмем $\delta = a^2\varepsilon$, тогда для $\forall\, x_1, x_2 \in [a, +\infty)$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, $\Longrightarrow$ $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| < \frac{\delta}{a^2} = \varepsilon$. Это означает равномерную непрерывность функции $y = 1/x$ на $[a, +\infty)$.

б) Пусть $x_1, x_2 \in (0, a]$, $a > 0$. Отрицание равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке X выглядит так:

$$\exists\,\varepsilon > 0\;\forall\,\delta > 0\;\exists\, x_1, x_2 \in X,\ |x_1 - x_2| < \delta : |f(x_1) - f(x_2)| \ge \varepsilon.$$

Возьмем $x_2 = x_1/2$, тогда

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{1}{x_1} \ge \frac{1}{a},$$

так как $0 < x_1 \le a$.

Возьмем $\varepsilon = 1/a$ и для $\forall\,\delta > 0$ положим $x_1 = \dfrac{a\delta}{\delta + a}$, $x_2 = \dfrac{a\delta}{2(\delta + a)}$. Для этих x_1 и x_2 будет

$$x_1, x_2 \in (0, a),\ |x_1 - x_2| = \frac{a\delta}{2(\delta + a)} < \delta$$

и

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| \ge \frac{1}{a} = \varepsilon.$$

Следовательно функция $y = 1/x$ не является равномерно непрерывной на $(0, a]$.

3). Исследовать на равномерную непрерывность функцию $y = \ln x$, в промежутке $(0 < x < 1)$.

Возьмем $0 < x_1 < x_2 < 1$ и $|x_2 - x_1| < \delta$. Положим $x_2 = x_1 + \delta$, тогда

$$|y(x_2) - y(x_1)| = |\ln x_2 - \ln x_1| = \left| \ln\frac{x_2}{x_1} \right| = \left| \ln\left(1 + \frac{\delta}{x_1}\right) \right|.$$

$$\lim_{x\to +0} \ln\left(1+\frac{\delta}{x_1}\right) = +\infty.$$

$$\exists\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, \delta > 0, \quad |\, x_2 - x_1| < \delta \Longrightarrow |\, y(x_2) - y(x_1)| > \varepsilon.$$

4). Доказать, что функция $y = x^2$, непрерывная на $\mathbf{R}$, но не является равномерно непрерывной на $\mathbf{R}$.

В самом деле, возьмем $x_n' = \sqrt{n+1}$ и $x_n'' = \sqrt{n}$, $n \in \mathbf{N}$. Имеем

$$|\, x_n' - x_n''| = |\, \sqrt{n+1} - \sqrt{n}| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому при любом $\delta > 0$ найдутся значения n, что $|\, x_n' - x_n''| < \delta$. С другой стороны

$$y(x_n') = n+1, \quad y(x_n'') = n; \quad y(x_n') - y(x_n'') = 1.$$

Таким образом, $\exists\, \varepsilon > 0$, что для $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, x' \in \mathbf{R}$ и $\exists\, x'' \in \mathbf{R}$, что $|\, x' - x''| < \delta$, но $|\, y(x') - y(x'')| \geq \varepsilon$.

5). Функция $y = \sin x^2$ непрерывна и ограничена на $\mathbf{R}$, но не является равномерно непрерывной на $\mathbf{R}$.

Возьмем $x_n' = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}(n+1)}$ и $x_n'' = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}n}$, $n \in \mathbf{N}$. Вычислим

$$|\, x_n' - x_n''| = \left|\sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)} - \sqrt{\frac{\pi}{2}n}\right| = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}(n+1)} + \sqrt{\frac{\pi}{2}n}}\,\frac{\pi}{2} \to 0,\ n \to \infty.$$

При любом $\delta > 0$ найдутся значения n, что $|\, x_n' - x_n''| < \delta$. В то же время $y(x_n') - y(x_n'')| = 1$. Найдется значение $\varepsilon > 0$, что для всех $\delta > 0$ существуют $x' \in \mathbf{R}$ и $x'' \in \mathbf{R}$, для которых $|\, y(x') - y(x'')| \geq \varepsilon$.

Лекция 16. Дифференциальное исчисление функций

Основы дифференциального и интегрального исчисления зародились еще в 17 веке, то есть задолго до тех тонких теорий, которые мы изучали в предыдущих главах. Два великих математика Ньютон и Лейбниц завершили работу своих предшественников и создали действительно новое исчисление.

16.1 Производная функции

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbf{R}$ и $x \in U(x_0)$. Если существует конечный предел отношения

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1}$$

то этот предел называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

Положим

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Тогда соотношение (1) запишется в виде

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x},$$

то есть производная функции $f(x)$ в точке x_0 есть конечный предел отношения приращения функции Δf к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$.

Говорят, что функция $f\colon U(x_0) \to \mathbf{R}$ имеет бесконечную производную в точке x_0, если существуют пределы

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = +\infty, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\infty.$$

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать конечную производную, если не оговорено противное.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ определена в правосторонней окрестности $U(x_0 + 0)$ или левосторонней окрестности $U(x_0 - 0)$ точки $x_0 \in \mathbf{R}$ и $x \in U(x_0 \pm 0)$. Если существует конечный предел отношения

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ или } \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

то этот предел называется соответственно правой или левой производной функции $f(x)$ в точке x_0, и обозначается $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$.

Правая и левая производные функции называются односторонними производными. Из теоремы об односторонних пределах следует, что функция $f(x)$, определенная в $U(x_0)$, имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда существует односторонние производные $f'(x_0+0)$ и $f'(x_0-0)$ и они равны. В этом случае

$$f'(x_0) = f'(x_0+0) = f'(x_0-0).$$

16.2 Геометрический и механический смысл производной

1) Пусть уравнение $y = f(x)$ задает некоторую кривую L на плоскости (x, y). Фиксируем на кривой точку M с координатами (x_0, y_0) и возьмем другую точку N с координатами $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и проведем секущую MN.

Уравнение секущей MN можно записать в виде

$$y - y_0 = k\,(x - x_0),\ \text{где}\ k = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Определение 1. Предельное положение секущей MN, когда точка N приближается к точке M по кривой L, называется касательной к кривой L в точке M.

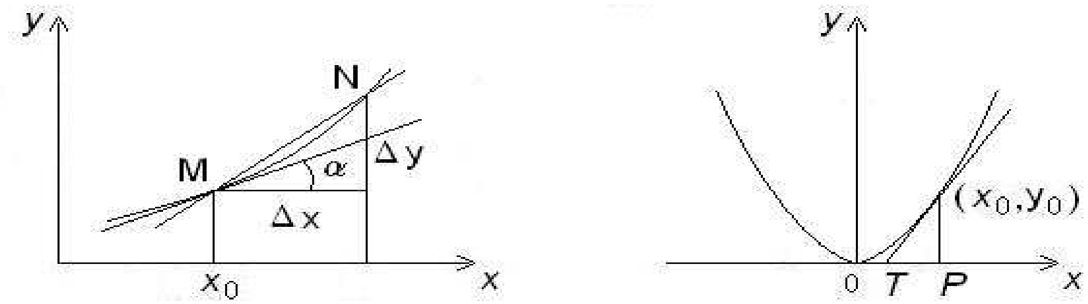


Рис. 5 Геометрический смысл производной

Пусть точка N стремится к точке M по кривой L, тогда $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Согласно определению производной

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Переходя к пределу в равенстве (1) при $\Delta x \to 0$, получим уравнение касательной к кривой

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной в точке (x_0, y_0) к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, то есть $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α – угол между осью x и касательной (рис. 5).

Прямая, проходящая через точку M и ортогональная касательной в этой точке, называется нормалью к кривой в точке M. Угловой коэффициент нормали $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\pi/2) = -\operatorname{ctg}\alpha$. Уравнение нормали будет таким

$$y - y_0 = -\,\frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0).$$

Пример. Написать уравнение касательной к параболе $y = ax^2$ в точке (x_0, y_0). Найдем угловой коэффициент касательной

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(x_0+\Delta x)^2 - ax_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a(2x_0+\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2ax_0.$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0): $y - y_0 = 2ax_0(x - x_0)$. В точке пересечения касательной с осью x: $x = x_0/2$. Это дает удобный способ построения касательной: нужно разделить отрезок OP пополам и через точки $(x_0/2, 0)$ и (x_0, y_0) провести прямую (рис. 5).

2) Рассмотрим материальную точку, движущуюся прямолинейно с переменной скоростью. Пусть в момент времени t расстояние от начала отсчета равно $s\,(t)$, а в момент времени $t+\Delta t$ расстояние равно $s\,(t+\Delta t)$. Путь, проделанный точкой за время Δt равен: $\Delta s = s\,(t+\Delta t) - s\,(t)$. Отсюда средняя скорость движения будет $\overline{v} = \Delta s/\Delta t$. На различных промежутках пути или времени средняя скорость различна. Предел

$$v\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

называется скоростью движения в данный момент времени t.

В общем случае функции $y = f(x)$ можно сказать, что производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta y/\Delta x)$ характеризует скорость изменения функции в зависимости от изменения аргумента.

16.3 Дифференциал функции

Определение 1. Функция $f\colon U(x_0) \to \mathbf{R}$, определенная в окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}$, называется дифференцируемой в точке x_0, если приращение функции представимо в виде

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = A(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{1}$$

где $A = A\,(x_0)$ – константа, не зависящая от Δx, $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента, $o(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

Определение 2. Линейная функция $A(x_0)\cdot\Delta x$ из равенства (1) называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$.

Дифференциал функции характеризуется двумя свойствами:

1) он представляет линейную функцию от приращения аргумента Δx;

2) дифференциал разнится от приращения функции на величину, которая при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

То есть приращение функции Δf и дифференциал df являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $\Delta x \to 0$. Выражение $df = A\cdot\Delta x$ при $A \neq 0$ является главной частью приращения Δf.

Если $A = 0$, то есть $df = 0$, то $\Delta f = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Применив формулу (1) к функции $f(x) = x$, получим $\Delta x = dx$, то есть приращение независимой переменной равно ее дифференциалу. Поэтому дифференциал любой функции $f(x)$ можно записать в виде $df = A\,dx$, где dx – дифференциал независимой переменной.

Связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием производной устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f\colon U(x_0) \to \mathbf{R}$ была дифференцируема в $(\cdot)\,x_0 \in E$, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную $f'(x_0)$. При этом

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{2}$$

► *Необходимость*. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в $(\cdot)\,x_0$, то есть

$$\Delta f = A(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0, \tag{3}$$

Отсюда получим

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A\,(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A\,(x_0).$$

Производная $f'(x_0)$ существует и равна $A\,(x_0)$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Согласно Лемме о пределе функции

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha\,(\Delta x), \quad \text{где} \ \lim_{\Delta x \to 0} \alpha\,(\Delta x) = 0.$$

Умножим обе части равенства на Δx

$$\Delta f = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Так как $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$, то дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 доказана, причем в равенстве (1) коэффициент $A\,(x_0) = f'(x_0)$ ◄

Из доказанной теоремы следует, что дифференциал функции $f(x)$ можно записать в виде $df = f'(x)\,dx$. Отсюда получается новое обозначение для производной $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

Связь между дифференцируемостью функции $f(x)$ и ее непрерывностью в точке x_0 устанавливается следующей теоремой.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

► Пусть функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке x_0, тогда

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta x = x - x_0 \to 0$, получим

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \text{ или } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Что и означает непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0. ◄

Следствие. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

► Утверждение вытекает из Теорем 1 и 2.◄

Замечание. Утверждения, обратные Теореме 2 и Следствию не имеют места. То есть из непрерывности функции в некоторой точки не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Например, рассмотрим функцию $y = |\,x|$ на $\mathbf{R}$. Функция непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке и, следовательно, не дифференцируема. В самом деле $f'(+0) = 1$ и $f'(-0) = -1$.

Если функция дифференцируема (имеет производную) в каждой точке некоторого промежутка, то будем говорить, что функция дифференцируема (имеет производную) на этом промежутке.

Если функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ дифференцируема в разных точках множества E, то в Определении 1 дифференцируемой функции величина A и функция $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)$ будут зависеть от рассматриваемой точки.

Лекция 17. Дифференцирование функций при арифметических операциях

17.1 Дифференцирование функций при арифметических операциях

Нахождение дифференциала функции или ее производной, что равносильно, называется операцией дифференцирования функции.

Теорема 1. Если функции $u\colon X \to \mathbf{R}$ и $v\colon X \to \mathbf{R}$ дифференцируемы в точке $x \in X$, то функции $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $u(x)/v(x)$, $v(x) \neq 0$, также дифференцируемы в этой точке, причем:

$$1) \quad [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$2) \quad [u(x) \cdot v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$3) \quad [u(x)/v(x)]' = [u'(x)v(x) - u(x)v'(x)]/v^2(x).$$

► 1) Пусть $y(x) = u(x) \pm v(x)$, тогда $\Delta y = \Delta u(x) \pm \Delta v(x)$. Вычислим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x).$$

2) Обозначим $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тогда

$$\Delta y = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v) - u \cdot v =$$

$$= \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Найдем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x}.$$

Так как функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны в точке x, то $\Delta u \to 0$ и $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

3) Пусть $y(x) = u(x)/v(x)$, $v(x) \neq 0$. Так как функция $v(x)$ дифференцируема в $(\cdot)\,x$, то она непрерывна в этой точке. Поэтому из условия $v(x) \neq 0$ следует, что $v(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x, то есть $v(x + \Delta x) \neq 0$ при достаточно малых Δx. Рассмотрим приращение

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} =$$

$$= \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{\Delta u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

Поделим равенство на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(v+\Delta v)} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Таким образом,

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

◀

17.2 Производная сложной и обратной функций

Теорема 1. Пусть функция $f\colon X \to Y$ дифференцируема в точке $x \in X$, а функция $g\colon Y \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке $y = f(x) \in Y$. Тогда сложная функция $(g \circ f)\colon X \to \mathbf{R}$ также дифференцируема в точке x, причем

$$[g(f(x))]' = g'(y) \cdot f'(x). \qquad (1)$$

▶ Так как функция $g(y)$ дифференцируема в точке $y \in Y$, то

$$\Delta g = g'(y)\, \Delta y + \varepsilon(\Delta y) \cdot \Delta y, \quad \Delta y \to 0, \tag{2}$$

где Δy – приращение аргумента $y \in Y$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$. Положим $\varepsilon(\Delta y) = 0$ при $\Delta y = 0$, тогда функция $\varepsilon(\Delta y)$ будет непрерывна при $\Delta y = 0$.

Разделим равенство (2) на приращение Δx переменной $x \in X$

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(y)\, \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3).$$

Перейдем к пределу в равенстве (3) при $\Delta x \to 0$, считая $y = f(x)$,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = g'(y) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (4).$$

Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x \in X$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Последнее слагаемое в (4) представляет предел произведения двух функций, имеющих конечные пределы. Ввиду $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \varepsilon(\Delta y) = 0$, это слагаемое равно нулю. В пределе из (4) получим формулу (1). Что означает дифференцируемость сложной функции в точке $x \in X$. ◀

Теорема 2. Пусть функция $f\colon X \to Y$ непрерывна и строго монотонна в промежутке X. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in X$ и $f'(x_0) \neq 0$, тогда обратная функция $x = g(y)$, где $g\colon Y \to X$, также дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0) \in Y$, причем $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

▶ Из условия непрерывности и строгой монотонности функции $y = f(x)$ на промежутке X следует существование на промежутке Y обратной функции

$x = g(y)$, также непрерывной и строго монотонной. Из строгой монотонности функций $f(x)$ и $g(y)$ вытекает $f(x) \neq f(x_0)$, если $x \neq x_0$, и $g(y) \neq g(y_0)$, если $y \neq y_0$. Из непрерывности функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$ можно заключить, что $y \to y_0 \Longleftrightarrow x \to x_0$.

Вычислим предел

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Предел справа существует, значит существует и предел левой части, который по определению является производной функции $g(y)$ в точке $y_0 \in Y$, то есть $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$. Существование производной обратной функции $g(y)$ в точке $y_0 \in Y$ означает ее дифференцируемость в этой точке. ◀

17.3 Производные элементарных функций

Вычислим производные основных элементарных функций.

1. **Постоянная функция**. Если $y = c$, где $c = const$, то $\Delta y = 0$ при $\forall\, x$, следовательно

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

2. **Степенная функция**. $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbf{R}$. Область определения зависит от α. При $x \neq 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha - 1} \cdot \frac{(1 + \Delta x/x)^\alpha - 1}{\Delta x/x}.$$

Используя известный предел, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} x^{\alpha - 1} \cdot \frac{(1 + \Delta x/x)^\alpha - 1}{\Delta x/x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}.$$

В частности,

$$y = 1/x = x^{-1}, \quad y' = -1 \cdot x^{-2} = -1/x^2,$$

$$y = \sqrt{x} = x^{1/2}, \quad y' = (1/2) \cdot x^{-1/2} = 1/(2\sqrt{x}).$$

3. **Показательная функция**. $y = a^x$. При $a > 0$, $x \in \mathbf{R}$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Воспользуемся полученным ранее пределом, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

В частности, если $y = e^x$, то $y' = e^x$. Скорость возрастания показательной функции пропорциональна самой функции.

4. **Логарифмическая функция**. $y = \log_a x$. При $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a(1 + \Delta x/x)}{\Delta x/x}.$$

Применяя известный предел, получим

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a(1 + \Delta x/x)}{\Delta x/x} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

В частности, для натурального логарифма $y = \ln x$ имеем $y' = 1/x$.

5. **Тригонометрические функции**

Вычислим производную функции $y = \sin x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos(x + \Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \cos(x + \Delta x/2) = \cos x.$$

Мы воспользовались здесь известным пределом $\lim\limits_{x \to 0}(\sin x/x) = 1$ и непрерывностью функции $\cos x$.

Для функции $y = \cos x$ получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2\sin(x + \Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x},$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \sin(x + \Delta x/2) = -\sin x.$$

Функцию $y = \operatorname{tg} x = (\sin x/\cos x)$ будем дифференцировать как частное двух функций

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогичным методом для функции $y = \operatorname{ctg} x = (\cos x/\sin x)$ получим

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. **Обратные тригонометрические функции**

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. Положим $|x| < 1$, $|y| < \pi/2$. Эта функция является обратной для функции $x = \sin y$, причем $x'_y = \cos y$. В указанных промежутках существует производная обратной функции, которая равна

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Мы исключили значения $x = \pm 1$, ибо для этих значений функция $y = \pm \pi/2$ и производная $x'_y = \cos y = 0$.

Рассмотрим функцию $y = \arccos x$, приняв $|x| < 1$, $0 < y < \pi$. Эта функция является обратной для функции $x = \cos y$, производная которой $x'_y = -\sin y$. Поэтому

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Функция $y = \operatorname{arctg} x$, $|x| < \infty$, $|y| < \pi/2$. Эта функция является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, которая имеет производную $x'_y = 1/\cos^2 y$, отсюда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$, $|x| < \infty$, $0 < y < \pi$. Эта функция является обратной для функции $x = \operatorname{ctg} y$, которая имеет производную $x'_y = -1/\sin^2 y$, отсюда

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = -\frac{1}{1/\sin^2 y} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

7. **Гиперболические функции**

Гиперболический синус и косинус:

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Очевидно $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. Вычислим производные

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x.$$

Гиперболический тангенс и котангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

По правилам дифференцирования частного имеем

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

8. **Производная степенно - показательного выражения**

Рассмотрим функцию $y = u(x)^{v(x)}$, где функции $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемы, причем $u(x) > 0$. Прологарифмируем заданную функцию

$$\ln y = v(x)\ln u(x). \tag{1}$$

Отсюда ясно, что функцию y можно записать в виде $y = e^{v(x)\,\ln u(x)}$. Получили сложную функцию, которая дифференцируема, так как все функции, которые в нее входят, дифференцируемы. Производную проще вычислить, если воспользоваться равенством (1)

$$\frac{1}{y}\,y'_x = v'(x)\cdot\ln u(x) + v(x)\cdot\frac{1}{u(x)}u'(x).$$

Отсюда найдем производную

$$y'_x = y\cdot(v'\ln u + \frac{v}{u}\,u') = u^v(v'\ln u + \frac{v}{u}\,u'). \tag{2}$$

Эта формула была установлена Лейбницем и И. Бернулли.

Пример. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

$$y' = x^{\sin x}(\cos x\ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

Таблица формул для производных

1. $y = c, \quad y' = 0.$
2. $y = x^{\alpha}, \quad y' = \alpha\, x^{\alpha-1}.$
3. $y = a^x, \quad y' = a^x\ln a,$
4. $y = \log_a x, \quad y' = \dfrac{1}{x}\,\log_a e.$
5. $y = \sin x, \quad y' = \cos x.$
6. $y = \cos x, \quad y' = -\sin x.$
7. $y = \operatorname{tg} x, \quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$
8. $y = \operatorname{ctg} x, \quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
9. $y = \arcsin x, \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
10. $y = \arccos x, \quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
11. $y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = \dfrac{1}{1+x^2}.$
12. $y = \operatorname{arctg} x, \quad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
13. $y = \operatorname{sh} x, \quad y' = \operatorname{ch} x.$
14. $y = \operatorname{ch} x, \quad y' = \operatorname{sh} x.$
15. $y = \operatorname{th} x, \quad y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
16. $y = \operatorname{cth} x, \quad y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

Лекция 18. Инвариантность дифференциала сложной функции. Производные высших порядков

18.1 Инвариантность дифференциала сложной функции

Правило дифференцирования сложной функции приводит к одному важному свойству дифференциала.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x \in X$, тогда ее дифференциал в этой точке имеет вид

$$dy = f'(x)\,dx. \tag{1}$$

Пусть теперь у функции $y = f(x)$ аргумент x в свою очередь является функцией другой переменной t: $x = \varphi(t)$, то есть $y = f(\varphi(t))$ является сложной функцией переменной t.

Предположим, что функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, где $x = \varphi(t)$. Тогда сложная функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t:

$$dy = y'(t)\,dt = f'(x)\varphi'(t)\,dt.$$

Поскольку $dx = \varphi'(t)\,dt$, то можно записать $dy = f'(x)\,dx$, то есть мы вернулись к прежней форме записи дифференциала (1). Таким образом, форма дифференциала сохраняется при замене независимой переменной. Мы всегда можем писать дифференциал в форме (1) будет x независимой переменной или нет. Разница лишь в том, что если x является функцией t, то dx означает не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции t. Это свойство и называют инвариантностью формы первого дифференциала.

Форма записи дифференциала $dy = f'(x)\,\Delta x$ не является инвариантной, так как Δx и dx отличаются на бесконечно малые более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

Так как из формулы (1) получается формула $f'(x) = dy/dx$, выражающая производную через дифференциалы, то и эта формула сохраняет свой вид при замене переменной $x = \varphi(t)$.

18.2 Производные высших порядков

Определение 1. Пусть функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ дифференцируема на промежутке E. Если функция $f'(x)$ имеет производную в точке $x_0 \in E$, то она называется второй производной функции $f(x)$. Вторая производная обозначается $f''(x)$ или d^2f/dx^2.

По индукции определяется производная n – ого порядка: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$. Обозначается $f^{(n)}(x)$ или d^nf/dx^n. Под производной нулевого порядка $f^{(0)}(x)$ понимается сама функция $f(x)$.

Множество всех функций $f\colon E \to \mathbf{R}$, имеющих на E непрерывные производные до порядка n включительно, обозначается символом $C^n(E)$, в частности $C^0(E) = C(E)$.

Вычисление производных высших порядков

1. **Степенная функция**. $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Последовательно вычислим

$$y' = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad y'' = \alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2}, \cdots,$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\, x^{\alpha-n},$$

можно доказать методом математической индукции.

Когда $\alpha = m$ – натуральное число, то все производные порядка выше m равны нулю.

2. **Показательная функция**. $y = a^x$, $a > 0$. Последовательно находим

$$y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x \ln^2 a, \ \cdots, \ y^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

Доказывается методом математической индукции.

3. **Логарифмическая функция**. $y = \log_a x$. Вычислим

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e, \quad y'' = -\frac{1}{x^2} \log_a e,$$

$$y^{(3)} = \frac{2}{x^3} \log_a e, \cdots, \quad y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \log_a e.$$

Здесь использованы результаты п. 1.

4. **Тригонометрические функции**

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x+\pi), \cdots, \quad y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = -\cos x = \cos(x+\pi), \cdots, \quad y^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Формула Лейбница

Правила дифференцирования суммы и разности функций $u(x)$ и $v(x)$ непосредственно переносятся и на случай производных любого порядка. Сложнее обстоит дело с дифференцированием произведения функций $u(x) \cdot v(x)$.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на множестве E производные до порядка n включительно. Тогда их произведение $u(x)\cdot v(x)$ также имеет производную n – ого порядка на E и справедлива формула Лейбница

$$y^{(n)} = (u\cdot v)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m\, u^{(n-m)}\cdot v^{(m)} \tag{1}$$

► При $n=1$ формула (1) совпадает с установленным правилом дифференцирования произведения : $y' = u'v + uv'$. Предположим, что формула (1) справедлива для производной n – ого порядка. Продифференцируем обе части равенства (1), предполагая, что функции u и v имеют производные до $(n+1)$ – ого порядка,

$$y^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m\,[u^{(n-m)}v^{(m)}]' =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m\, u^{(n-m+1)}v^{(m)} + \sum_{m=0}^{n} C_n^m\, u^{(n-m)}v^{(m+1)}.$$

Объединим слагаемые, которые содержат одинаковые произведения производных от функций u и v. Произведение $u^{(n+1)}v^{(0)}$ входит только в первую сумму с коэффициентом $C_n^0=1$, аналогично, произведение $u^{(0)}v^{(n+1)}$ входит только во вторую сумму с коэффициентом $C_n^n=1$. Все остальные произведения вида $u^{(n-m+1)}v^{(m)}$, $1\le m\le n$, входят в обе суммы. После их объединения коэффициент будет $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$. Окончательно получим

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)}v^{(0)} + \sum_{m=1}^{n} C_{n+1}^m\, u^{(n-m+1)}v^{(m)} +$$

$$+\, u^{(0)}v^{(n+1)} = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^{(m)}\, u^{(n-m+1)}v^{(m)}.$$

Это равенство получается из (1) заменой n на $(n+1)$. Таким образом, по индукции установлена справедливость формулы Лейбница. ◄

Пример. Найти n – ю производную от функции $y(x) = x^2\sin x$. Используя формулу Лейбница, вычислим

$$y^{(n)} = C_n^2\,(x^2)^{(2)}(\sin x)^{(n-2)} + C_n^1\,(x^2)^{(1)}(\sin x)^{(n-1)} + C_n^0\,x^2(\sin x)^{(n)} =$$

$$= n(n-1)\sin(x+(n-2)\frac{\pi}{2}) + 2nx\sin(x+(n-1)\frac{\pi}{2}) + x^2\sin(x+n\frac{\pi}{2}) =$$

$$= (x^2 - n(n-1))\,\sin(x+n\frac{\pi}{2}) - 2nx\,\cos(x+n\frac{\pi}{2}).$$

18.3 Дифференцирование функций, заданных параметрически

Определение 2. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены в окрестности $U(t_0)$, $(\cdot)\, t_0 \in \mathbf{R}$ и функция $x = x(t)$ непрерывна и строго монотонна в $U(t_0)$. Тогда существует обратная к $x(t)$ функция $t = t(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0 = x(t_0)$ и определена сложная функция $y = y(t(x))$ в $U(x_0)$. Эта функция называется параметрически заданной функцией формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Выведем формулы дифференцирования параметрически заданных функций.

Утверждение. Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы в точке t_0 и $x'(t_0) \neq 0$, то параметрически заданная функция $y = y(t(x))$ также имеет в точке $x_0 = x(t_0)$ производную, причем

$$y'_x(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}. \tag{1}$$

► По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y'_x(x_0) = \frac{dy(t(x))}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_0} \cdot \frac{dt(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}.$$

По правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x(x_0) = \frac{1}{x'_t(t_0)}.$$

Из этих двух равенств следует (1) ◄

Если, кроме того, существуют производные $x''_t(t_0)$ и $y''_t(t_0)$, то существует и производная $y''_x(x_0)$

$$y''_x(x_0) = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_y}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_t \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Аналогично вычисляются производные более высокого порядка от параметрически заданных функций.

18.4 Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке $E \subset \mathbf{R}$. Ее дифференциал $dy = f'(x)\, dx$ зависит от двух переменных x и dx. Пусть функция $f'(x)$ в свою очередь дифференцируема на E, тогда можно говорить о дифференциале этой функции.

Определение 3. Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом функции $f\colon E \to \mathbf{R}$ в точке $x \in E$ называется дифференциал от ее первого дифференциала и обозначается $d^2 f = d(df)$.

Вообще дифференциалом n – ого порядка функции $f\colon E \to \mathbf{R}$ называется дифференциал от ее $(n-1)$ – ого дифференциала $d^n f = d(d^{n-1} f)$.

При вычислении дифференциалов высших порядков приращение аргумента $\Delta x = dx$ рассматривается как постоянный множитель, не зависящий от x.

Второй дифференциал функции $y = f(x)$ имеет вид

$$d^2 y = d(dy) = (dy)'_x \delta x = (f'(x)\,dx)'_x \delta x = f''(x)\,dx\delta x.$$

При $\delta x = dx$ получим

$$d^2 y = f''(x)\,dxdx = f''(x)\,dx^2.$$

Заметим, что в силу определения дифференциала, $d^2 x = 0$, так как при вычислении дифференциалов мы считаем приращение $\Delta x = dx = const$.

Подобным же образом, когда существует производная n – ого порядка функции $y = f(x)$ в точке $x \in E$, дифференциал n – ого порядка имеет вид

$$d^n y = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{1}$$

Формулу (1) можно доказать по методу математической индукции. Из этой формулы следует

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}. \tag{2}$$

Формула Лейбница для дифференциалов высших порядков такова

$$d^n(u \cdot v) = \sum_{m=0}^{n} C_n^m\, d^{n-m}u \cdot d^m v. \tag{3}$$

Сам Лейбниц нашел свою формулу именно в таком виде. Формулу (3) можно получить из предыдущей формулы Лейбница и равенства (1).

Замечание. Формулы (1) и (2) справедливы, вообще говоря, для высших дифференциалов $n > 1$ только когда x является независимой переменной. Первый дифференциал обладает свойством инвариантности для сложной функции: $dy = f'(x)\,dx$, где $x = x(t)$. Дифференциалы высших порядков этим свойством не обладают.

Покажем это на примере второго дифференциала. Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ и имеет смысл композиция $y = f(\varphi(t))$. Ее первый дифференциал по t можно записать в форме $dy = f'(x)\,dx$, где $dx = \varphi'(t)\,dt$. Вычислим второй дифференциал по t

$$d^2 y = d(y'_x \cdot dx) = dy'_x \cdot dx + y'_x \cdot d(dx).$$

Дифференциал dy'_x можно, снова пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, взять в виде $dy'_x = y''_x dx$, так что окончательно получим

$$d^2y = y''_x dx^2 + y'_x d^2x. \tag{4}$$

Сравнивая (1) и (4), видим, что эти формулы отличаются вторым слагаемым в (4), так как в данном случае $d^2x \neq 0$. Выражение (4) является более общим, по сравнению с (1), если, в частности, x есть независимая переменная, то $d^2x = 0$ и (4) совпадает с (1).

Итак, если x перестает быть независимой переменной, то формула для второго дифференциала d^2y содержит два слагаемых. Для третьего и дальнейших дифференциалов число слагаемых еще возрастает.

Пример. Пусть $y = x^2$, где x – независимая переменная, тогда

$$dy = 2x\,dx, \quad d^2y = 2dx^2.$$

Положим теперь $y = x^2$, где $x = t^2$, тогда $y = t^4$

$$dy = 4t^3dt, \quad d^2y = 12t^2dt^2.$$

Новое выражение для первого дифференциала dy можно получить из старого $dy = 2x\,dx$, если туда подставить $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$: $dy = 2t^2 \cdot (2t\,dt) = 4t^3dt$. Иначе обстоит дело со вторым дифференциалом d^2y: сделав такую же подстановку в формуле $d^2y = f''(x)dx^2$, получим $d^2y = 8t^2dt^2$ вместо правильного значения $d^2y = 12t^2dt^2$. Формула (4) в данном случае имеет вид

$$d^2y = 2dx^2 + 2xd^2x.$$

Подставив сюда $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $d^2x = 2dt^2$, получим правильный результат.

Лекция 19. Особые случаи при вычислении производных

19.1 Особые случаи при вычислении производных

Рассмотрим ряд особых случаев, которые могут представиться в отношении производных. Начнем с установления понятия односторонней производной.

Односторонние производные

Пусть функция $f\colon X \to \mathbf{R}$ определена на промежутке X. Если точка $x \in X$ является одним из концов промежутка X, то в этом случае говорят об односторонней производной справа или слева. В соответствующих точках функция имеет одностороннюю касательную.

Может случиться, что и для внутренней точки $x \in X$ существуют лишь односторонние пределы отношения $(\Delta y/\Delta x)$ при $\Delta x \to +0$ и $\Delta x \to -0$, не равные между собой; их также называют односторонними производными. Для графика функции $y = f(x)$ в соответствующей точке x будут существовать лишь односторонние касательные, образующие угол (рис. 7). В качестве примера можно взять функцию $y = |\,x|$. Для точки $x = 0$ будем иметь

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\,\Delta x|.$$

Если $\Delta x > 0$, то $\Delta y = \Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta y/\Delta x) = 1$.
Если $\Delta x < 0$, то $\Delta y = -\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta y/\Delta x) = -1$.
Начало координат является угловой точкой для графика функции, состоящего из биссектрис первого и второго координатных углов.

Бесконечные производные

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(\Delta y/\Delta x) = \pm\infty$, то этот символ также называют производной и обозначают как обычно.

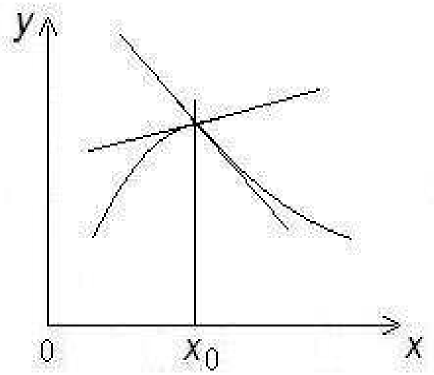
Геометрическое истолкование производной распространяется и на этот случай, здесь касательная к графику функции параллельна оси y.

Аналогично вводится понятие о бесконечной односторонней производной. Наличие различных по знаку односторонних бесконечных производных означает наличие острия у графика функции (рис. 7), хотя касательная к графику функции одна.

Примеры. Пусть $y = x^{1/3}$, при $x \neq 0$ имеем $y' = \frac{1}{3}x^{-2/3}$. Эта формула не применима в точке $x = 0$. Поэтому вычислим производную, исходя из ее Определения

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}}.$$

Предел отношения при $\Delta x \to 0$ равен $+\infty$.



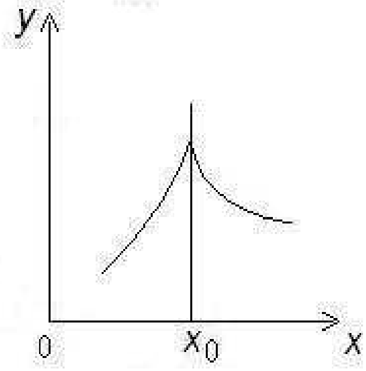


Рис. 7 Односторонние производные

Пусть $y = x^{2/3}$, при $x \neq 0$ имеем $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. Эта формула не применима в точке $x = 0$. Вычислим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}}.$$

Предел слева равен $-\infty$, предел справа $+\infty$.

Пользуясь расширенным понятием производной, можно дополнить теорему о производной обратной функции указанием, что в тех случаях, когда производная $f'(x_0)$ равна нулю или $\pm\infty$, то производная обратной функции $g'(y_0)$ существует и равна, соответственно, $\pm\infty$ или нулю. Например, для функции $y = \sin x$ производная $y' = \cos x$ в точках $x = \pm\pi/2$ равна 0. Тогда для обратной функции $x = \arcsin y$ при $y = \pm 1$ существует бесконечная производная, равная $+\infty$.

Другие примеры особых случаев

1. Пример несуществующей производной. Функция $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$ непрерывна на $\mathbf{R}$, в том числе при $x = 0$, но не имеет в этой точке даже односторонней производной. Действительно, выражение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$$

не стремится ни к какому пределу при $\Delta x \to 0$.

2. Пример разрыва производной. Рассмотрим функцию $y = x^2 \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$. Функция непрерывна на $\mathbf{R}$, в том числе при $x = 0$. Если $x \neq 0$, то производная вычисляется обычным методом

$$y'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

Но этот результат не применим в точке $x = 0$, так как

$$\lim_{x\to\pm 0} y'(x) = \lim_{x\to\pm 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) = -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x},$$

предел не существует. Воспользуемся определением производной

$$y'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Вместе с тем ясно, что производная $y'(x)$ не имеет предела при $x \to 0$, так что функция $y'(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$. В этом примере разрыв второго рода. Оказывается это не случайно, у производных разрыва 1 – го рода не бывает.

19.2 Производные неявно заданных функций

Неявно заданные функции многих переменных будут изучаться позже. Сейчас мы ограничимся рассмотрением одного частного случая. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $F(x, y)$ – функция двух переменных x и y из $\mathbf{R}$. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение для одной из переменных как функции другой. Например, будем считать, что $y = f(x)$. Тогда равенство (1) называют неявным заданием функции y. Если для каждого $x \in G \subset \mathbf{R}$, где G – некоторая область, существует одно или несколько значений y, которое вместе с x удовлетворяет уравнению (1), то этим определяется однозначная или многозначная функция $y = f(x)$, для которой равенство (1) выполняется тождественно относительно x: $F(x, f(x)) \equiv 0$. При определенных условиях на функцию $F(x, y)$ и ее производные по x и y, которые мы будем рассматривать позже, производная неявно заданной функции может быть найдена по формуле

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \tag{2}$$

где $F'_x(x, y)$ и $F'_y(x, y)$ – производные по x и y, соответственно, когда другая переменная фиксирована (такие производные называют частными).

Формулу (2) можно получить, продифференцировав равенство (1) по переменной x, считая $F(x, y)$ сложной функцией переменной x,

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\cdot y'(x) = 0.$$

Пример. Найти производную неявно заданной функции

$$x^2 + 2xy - y^2 = 2x.$$

Дифференцируем уравнение по x

$$2x+2y+2xy'(x)-2yy'(x)=2,$$

$$y'(x)=\frac{x+y-1}{y-x}.$$

Примеры вычисления производных.

1) $y=(2x^2-5x+1)\cdot e^x$. По правилу дифференцирования произведения функций находим

$$y'=(4x-5)\cdot e^x+(2x^2-5x+1)\cdot e^x=(2x^2-x-4)\cdot e^x.$$

2) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$. Используем правило дифференцирования частного

$$y'=\frac{x\cos x(x\cos x-\sin x)-(x\sin x+\cos x)(-x\sin x)}{(x\cos x-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{x^2}{(x\cos x-\sin x)^2}.$$

3) $y=\ln\sin x$. Дифференцируем как сложную функцию

$$y'=\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\operatorname{ctg}x.$$

4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. Здесь также имеем дело со сложной функцией

$$y'=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}.$$

5) $y=\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x}$. Дифференцируем как сложную функцию

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x}}\cdot\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{1}{2}x}.$$

Найти производные.

6) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+c})$.

$$y'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}.$$

7) $y=x\,|x|$.

$$y'(x)=2x,\quad x\ge 0;\quad y'(x)=-2x,\quad x\le 0.$$

Оба случая можно записать одной формулой $y'(x) = 2\,|\,x|$.

8)$y = \ln\,|\,x|$.

$$y'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0; \quad y'(x) = -\frac{1}{x}, \quad x < 0.$$

Таким образом $y'(x) = \dfrac{1}{|\,x|}$ при $x \neq 0$. В точке $x = 0$ производная терпит разрыв. Справа от этой точки производная $y'(x) = +\infty$, слева $y'(x) = -\infty$.

9) $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{\sin x}}$.

$$y'(x) = \sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)^{-1/2} \cdot \frac{-\sin^2 x - (1+\cos x)cosx}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{1+\cos x}\,\frac{1+\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin x}.$$

Чтобы заданная функция имела смысл, должны выполняться условия: $\sin x > 0$, то есть $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k = 0, 1, 2, ...$

10) $y = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

$$y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{sign}\,x, \quad 0 < |\,x| < 1.$$

11) $y = x^{-1/x}$, $x > 0$.

$$y'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}(1-\ln x)\,x^{-1/x}.$$

12) Найти производную параметрически заданной функции

$$x = e^{2t}\cos^2 t, \quad y = e^{2t}\sin^2 t.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{e^{2t}(2\sin^2 t + 2\sin t\cos t)}{e^{2t}(2\cos^2 t - 2\cos t\sin t)} = \mathrm{tg}\,t \cdot \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} =$$

$$= \mathrm{tg}\,t \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{4}+t)}{\cos(\frac{\pi}{4}+t)} = \mathrm{tg}\,t \cdot \mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{4}+t).$$

Чтобы существовала конечная производная нужно: $t \neq \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $t \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

Лекция 20. Основные теоремы дифференциального исчисления

Знание производной или ряда производных некоторой функции $f\colon E \to \mathbf{R}$ позволяет делать заключения о поведении этой функции на множестве E. В основе различных приложений понятия производной лежат некоторые простые, но важные теоремы и формулы, которым посвящена эта глава.

20.1 Теорема Ферма

Теорема Ферма. Если функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке $x_0 \in E$, внутренней для промежутка E, и функция $f(x)$ имеет в этой точке локальный max или min, то необходимо $f'(x_0) = 0$.

► Пусть для определенности функция $f\colon E \to \mathbf{R}$ имеет в точке $x_0 \in E$ локальный max, тогда существует окрестность $U(x_0) \subset E$, где $f(x) \leq f(x_0)$. По определению производной функции f в точке x_0, которая существует по условию,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{1}$$

причем предел не зависит от того будет $x \to x_0$ справа или слева.

Для $\forall\, x \in U(x_0)$ получим

$$\text{при } x < x_0: \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad \text{при } x > x_0: \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) следует $f'(x_0 - 0) \geq 0$ и $f'(x_0 + 0) \leq 0$. Так как эти производные равны, то $f'(x_0) = 0$. ◄

Геометрический смысл теоремы Ферма очевиден. В точке экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси $0x$, так как $f'(x_0)$ есть угол наклона касательной к этой оси.

Замечание. В доказательстве теоремы существенно использовалось предположение, что точка x_0 является внутренней для промежутка $E \subset \mathbf{R}$, нам пришлось рассматривать точки слева и справа от x_0. Без этого предположения теорема перестает быть верной. Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и достигает max или min на одном из концов отрезка, то производная $f'(x)$ на этом конце может не быть нулем (речь идет об односторонней производной). Рассмотрим функцию $y = x$ на отрезке $[-1, +1]$. В точке $x = -1$ функция имеет min, а в точке $x = +1$ – max, однако $f'(x) = 1$ на всем отрезке.

20.2 Теоремы Ролля и Лагранжа

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, удовлетворяет следующим условиям:

- функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
- дифференцируема на интервале (a, b);

- на концах отрезка принимает равные значения $f(a) = f(b)$.
Тогда найдется точка $x_0 \in (a, b)$, что $f'(x_0) = 0$.

► Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и по второй Теореме Вейерштрасса достигает на $[a, b]$ верхней $M = \sup f(x)$ и нижней $m = \inf f(x)$ граней. Если $M = m$, то функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и в этом случае $f'(x) = 0$ для $\forall\, x \in [a, b]$.

Если $M > m$, то из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хотя бы одно из значений M или m достигается внутри отрезка в точке $x_0 \in (a, b)$. По Теореме Ферма имеем $f'(x_0) = 0$ ◄

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в следующем: если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на кривой $y = f(x)$ найдется точка, где касательная параллельна оси $0x$, (рис. 8).

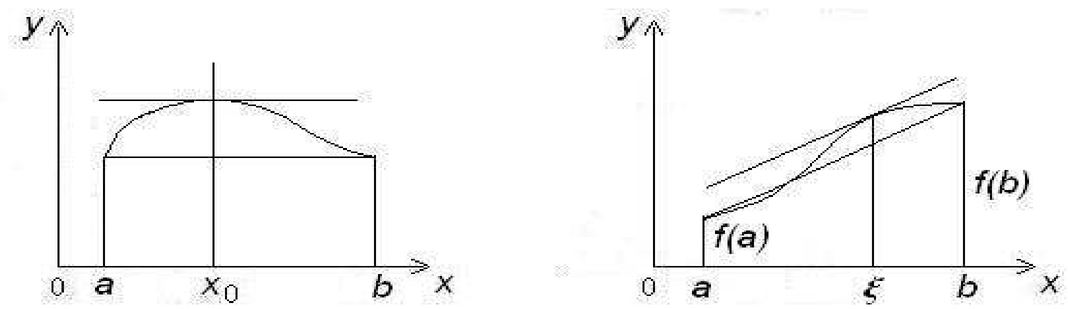


Рис. 8 Геометрический смысл теорем Ролля и Лагранжа

Обращаем внимание на то, что все три условия теоремы Ролля обязательны для справедливости ее утверждения. Так функция $f(x) = x - E(x)$ удовлетворяет на отрезке $[0, 1]$ всем условиям теоремы, кроме первого: функция имеет разрыв при $x = 1$, производная $f'(x) = 1$ в интервале $(0, 1)$. Функция $f(x) = x$ при $0 \leq x \leq 0,5$ и $f(x) = 1 - x$ при $0,5 < x \leq 1$ удовлетворяет всем условиям, кроме второго: в точке $x = 0,5$ не существует двухсторонней производной и потому нет точки $x_0 \in [0, 1]$, где $f'(x_0) = 0$. Функция $f(x) = x$ при $x \in [0, 1]$ удовлетворяет всем условиям, кроме третьего, $f'(x) = 1$ в $[0, 1]$.

Обобщением теоремы Ролля является следующая теорема.

Теорема Лагранжа, (о конечном приращении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a). \tag{1}$$

► Введем вспомогательную функцию на отрезке $[a, b]$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a). \tag{2}$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: непрерывна на $[a,b]$, дифференцируема на (a,b) и на концах отрезка $[a,b]$ принимает равные значения $F(a)=F(b)=0$. По теореме Ролля найдется точка $\xi \in (a,b)$, где $F'(\xi)=0$. Из равенства

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

следует (1) ◄

Формула (1) называется формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа или формулы Лагранжа состоит в следующем, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы, то на графике функции $y=f(x)$ найдется точка, где касательная к графику будет параллельна хорде, соединяющей концы графика (рис. 8). Действительно, угловой коэффициент секущей, проходящей через концы графика, будет $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $x=\xi$ равен $f'(\xi)$. Равенство угловых коэффициентов означает параллельность этих прямых.

Если на концах отрезка значения функции $f(x)$ совпадают, то есть $f(a)=f(b)$, то из теоремы Лагранжа получим теорему Ролля, из формулы (1) следует $f'(\xi)=0$.

Преобразуем формулу Лагранжа (1) к другому виду. Возьмем любую точку $x \in (a,b)$ и придадим x приращение Δx так, чтобы $x+\Delta x \in (a,b)$. Применим формулу Лагранжа к отрезку $[x, x+\Delta x]$:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(\xi)\cdot\Delta x = f'(x+\theta\Delta x)\cdot\Delta x, \tag{3}$$

где $0<\theta<1$, любое значение $\xi \in (x, x+\Delta x)$ можно записать в виде $\xi = x+\theta\Delta x$.

Равенство (3) дает точное значение приращения функции $f(x)$ при любом конечном приращении аргумента Δx. Раньше нами была получена приближенная формула для приращения функции

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\cdot\Delta x, \tag{4}$$

погрешность которой стремится к нулю лишь при условии $\Delta x \to 0$. Недостатком точной формулы Лагранжа (3) является то, что в нее входит неизвестное число θ или ξ. Однако это не мешает многообразному применению этой формулы в анализе.

Следствие 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и ее производная $f'(x)$ не меняет знак на (a,b), то функция $f(x)$ монотонна на (a,b).

► Пусть $f'(x) \geq 0$, докажем, что функция $f(x) \uparrow$ на (a,b). Возьмем точки $x_1 < x_2$ на этом интервале. По формуле Лагранжа для отрезка $[x_1,x_2]$ имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2-x_1) \geq 0.$$

Аналогично рассматривается случай $f'(x) \le 0$ на $[a, b]$. ◄

Следствие 2. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и ее производная $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ постоянна на (a, b).

► Результат следует из формулы Лагранжа: для $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$ имеем $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1) = 0$ ◄

20.3 Теорема Коши о конечных приращениях

Рассмотренная выше теорема Лагранжа была обобщена Коши следующим образом.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на отрезке $[a, b]$, удовлетворяют следующим условиям:
1) функции непрерывны на отрезке $[a, b]$;
2) функции дифференцируемы на интервале (a, b);
3) производная $g'(x) \neq 0$ на интервале (a, b).

Тогда найдется точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{1}$$

► Легко видеть, что $g(a) \neq g(b)$, так как в противном случае для функции $g(x)$ выполнены условия теоремы Ролля и, следовательно, найдется точка $c \in (a, b)$, где $g'(c) = 0$, а это противоречит условию 3) теоремы. Значит $g(b) - g(a) \neq 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,[g(x) - g(a)]. \tag{2}$$

Для функции $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля: функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как непрерывны функции $f(x)$ и $g(x)$; дифференцируема на (a, b), так как дифференцируемы функции $f(x)$ и $g(x)$; на концах отрезка $F(a) = F(b) = 0$. По теореме Ролля найдется точка $\xi \in (a, b)$, где $F'(\xi) = 0$. Из равенства

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\, g'(\xi) = 0$$

получим (1) ◄

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для получения формулы конечных приращений Лагранжа нужно в формуле Коши (1) взять $g(x) = x$. Формулу (1) называют формулой конечных приращений Коши.

В рассмотренных теоремах производные вычисляются при некотором среднем значении аргумента, которое нам не известно. Оно и производной доставляет некоторое среднее значение. В связи с этим все три теоремы называют теоремами о средних значениях.

Покажем как теорема Лагранжа может быть использована для получения некоторых полезных неравенств.
1) Доказать, что

$$|\sin x_1 - \sin x_2| \le |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R} \qquad (2).$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $f(x) = \sin x$, получим

$$\sin x_1 - \sin x_2 = f'(\xi)(x_1 - x_2).$$

Переходя к модулям и учитывая, что $f'(\xi) = \cos\xi$ и $|\cos\xi| \le 1$, получим требуемое неравенство (2).
2)Доказать, что

$$|\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2| \le |x_1 - x_2|, \quad x_1, x_2 \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$

Применим теорему Лагранжа к функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$\operatorname{arctg} x_1 - \operatorname{arctg} x_2 = f'(\xi)(x_1 - x_2).$$

Так как $f'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2} \le 1$ при всех ξ, то переходя к модулям, получим неравенство (3).

Лекция 21. Формула Тейлора

21.1 Формула Тейлора

Важной проблемой анализа является вопрос о приближении функций в окрестности некоторой точки многочленами. Рассмотрим полином степени n

$$P_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n. \tag{1}$$

Продифференцируем этот полином последовательно n раз

$$P_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n\, a_n\, x^{n-1},$$

$$P_n''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3 x + \cdots + n(n-1)\, a_n\, x^{n-2}, \ldots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1\, a_n.$$

Полагая в этих равенствах $x = 0$, получим

$$a_0 = P_n(0), \quad a_1 = P_n'(0), \quad a_2 = \frac{1}{2!}\, P_n''(0), \quad \ldots, \quad a_n = \frac{1}{n!}\, P_n^{(n)}(0).$$

Полином (1) можно записать в виде

$$P_n(x) = P_n^{(0)}(0) + \frac{1}{1!}\, P_n'(0)\, x + \frac{1}{2!}\, P_n''(0)\, x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\, P_n^{(n)}(0)\, x^n. \tag{2}$$

Вместо многочлена по степеням x можно рассмотреть другой многочлен, разложенный по степеням $(x - x_0)$,

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n. \tag{3}$$

Тем же методом, что и выше, этот многочлен можно привести к виду

$$P_n(x) = P_n^{(0)}(x_0) + \frac{1}{1!}\, P_n'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2!}\, P_n''(x_0)\,(x - x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\, P_n^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n. \tag{4}$$

Формулу (4) или ее частный случай – формулу (2) называют полиномом Тейлора для многочлена (формулу (2) называют еще полиномом Маклорена).

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 все производные до n - ого порядка включительно. Это значит, что функция $f(x)$ имеет производные до $(n-1)$ - ого порядка в некоторой окрестности $U(x_0)$ и n - ую производную в самой точке x_0. По образцу формулы (4) и для функции $f(x)$ можно написать многочлен Тейлора n - ого порядка в точке x_0, называемый формулой Тейлора,

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\, f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2!}\, f''(x_0)\,(x - x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n. \tag{5}$$

Этот многочлен и его производные до n - ой включительно в точке x_0 имеют те же значения, что и функция $f(x)$ и ее производные. Однако нельзя утверждать, что $f(x) = P_n(x)$, если только сама функция не есть многочлен степени n. В связи с этим приобретает интерес оценка разности

$$r_n(x) = f(x) - P_n(x). \tag{6}$$

Так как $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$, то $r_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\, f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2!}\, f''(x_0)\,(x - x_0)^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n + r_n(x). \tag{7}$$

Чтобы представить выражение для остаточного члена $r_n(x)$ в удобной для исследования и приложений форме приходится наложить на функцию $f(x)$ более тяжелые условия, чем те, которые нужны для написания многочлена (5).

Теорема 1. Если на отрезке $[x_0, x]$ функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема n раз, а в интервале имеет производную $(n + 1)$ - ого порядка, то при любой функции $\varphi(t)$, непрерывной на этом отрезке и имеющей в интервале (x_0, x) отличную от нуля производную $\varphi'(t)$, найдется точка $\xi \in (x_0, x)$ такая, что

$$r_n(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\varphi'(\xi)}\, \frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(\xi)\,(x - \xi)^n. \tag{8}$$

► На отрезке $[x_0, x]$ рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - [f(t) + \frac{1}{1!}\, f'(t)\,(x - t) + \cdots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(t)\,(x - t)^n]. \tag{9}$$

Очевидно на концах отрезка $[x_0, x]$: $F(x_0) = r_n(x)$, $F(x) = 0$. Функция $F(t)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$ и дифференцируема на интервале (x_0, x), причем

$$F'(t) = -\left[f'(t) - \frac{1}{1!}\, f'(t) + \frac{1}{1!}\, f''(t)\,(x - t) - \frac{1}{1!} f''(t)\,(x - t)\ + \right.$$

$$\left. + \cdots + \frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,(x - t)^n\right] = -\frac{1}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\,(x - t)^n.$$

Для функций $F(t)$ и $\varphi(t)$ выполнены условия теоремы Коши, поэтому найдется точка $\xi \in (x_0, x)$, в которой

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

Подставив сюда вместо $F(x)$, $F(x_0)$ и $F'(\xi)$ полученные выше выражения, придем к формуле (8) ◄

Если подставить в формулу (8) различные функции $\varphi(t)$, удовлетворяющие сформулированным условиям, то получим различные формы остаточного члена.

Следствие 1. Полагая в (8) $\varphi(t) = t - x$, $t \in [x_0, x]$, получим

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^n(x-x_0). \tag{10}$$

Это формула Коши остаточного члена формулы Тейлора. Если взять $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, где $0 < \theta < 1$, то (10) запишется в виде

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))(1-\theta)^n\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Следствие 2. Полагая в (8) $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, получим формулу Лагранжа остаточного члена

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}. \tag{11}$$

Формулу Тейлора (7) с остаточным членом в форме Лагранжа перепишем в следующем виде

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{1!} f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2!} f''(x_0)\,\Delta x^2 +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,\Delta x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,\Delta x^{n+1}, \tag{12}$$

где $\Delta x = x - x_0$.

В этом виде формула (12) является прямым обобщением формулы конечных приращений Лагранжа

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(\xi)\,\Delta x,$$

которая вытекает из (12) при $n = 0$.

Следствие 3. Рассмотрим более общую форму остаточного члена. Пусть $\varphi(t) = (x-t)^p$, $p > 0$. Из формулы (8) получим

$$r_n(x) = \frac{1}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-\xi)^{n+1-p}(x-x_0)^p. \tag{13}$$

Это выражение называется дополнительным членом в форме Шлёмильха - Роша.

21.2 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Формы остаточного члена Лагранжа и Коши применяются, когда мы хотим заменить приближенно функцию $f(x)$ многочленом $P(x)$ и численно оценить погрешность этой замены при фиксированном значении $x \neq x_0$.

Однако часто важно знать лишь поведение остаточного члена при стремлении $x \to x_0$, точнее говоря нам важен порядок его малости при $x \to x_0$. Этот порядок может быть установлен даже при более легких условиях на функцию $f(x)$, чем выше. Именно, достаточно предположить существование n производных в окрестности $U(x_0)$ (двухсторонних или односторонних) и непрерывность производной $f^{(n)}(x_0)$ в точке x_0. На деле, достаточно предположить лишь существование n –ой производной в точке x_0, мы наложим более жесткое условие, чтобы упростить доказательство. Другой метод доказательства будет дан позже.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и n раз дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, производная $f^{(n)}(x_0)$ непрерывна в точке x_0, тогда в некоторой окрестности $U(x_0)$ этой точки справедливо представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0 \tag{1}$$

► Возьмем формулу Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x - x_0)^n, \tag{2}$$

где $\xi \in (x_0, x)$. Мы заменили n на $(n-1)$ в формуле Тейлора. Так как при $x \to x_0$ очевидно и $\xi \to x_0$, то по непрерывности производной будет $f^{(n)}(\xi) \to f^{(n)}(x_0)$. В последнем слагаемом формулы (2) положим

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) + \alpha(x - x_0), \quad x \to x_0. \tag{3}$$

Так как $\alpha(x - x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, то

$$\alpha(x - x_0)(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0.$$

Таким образом, мы доказали

$$r_n(x) = o((x - x_0)^n) \quad \text{при } x \to x_0. \tag{4}$$

◄

Форма дополнительного члена (1) была указана Пеано.

Теорема справедлива и для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$. Если точка x_0 совпадает с концом отрезка, то берется односторонняя производная. Формула (1) с дополнительным членом (4) имеет локальный характер, характеризующей лишь поведение функции $f(x)$ при $x \to x_0$. Ее можно записать в следующем виде

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \frac{1}{2!}\,f''(x_0)\,\Delta x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,\Delta x^n + o(\Delta x^n), \qquad (5)$$

где $\Delta x = x - x_0 \to 0$. Это равенство является обобщением определения дифференцируемости функции $f(x)$ в точке x_0, в которое оно переходит при $n = 1$.

Дифференциал k - ого порядка функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид $d^k f(x_0) = f^{(k)}(x_0)\Delta x^k$. Тогда формулу (5) можно записать так

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{1}{2!}\,d^2 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\,d^n f(x_0) + o(\Delta x^n). \qquad (6)$$

Можно доказать, что представление функции $f(x)$ в виде многочлена (1) является единственным.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ и имеет представление

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0, \qquad (7)$$

то такое представление единственно.

► Утверждение доказывается методом от противного. Пусть имеется другое представление функции $f(x)$ вида (7)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0. \qquad (8)$$

Вычтем из равенства (7) равенство (8)

$$0 = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0, \qquad (9)$$

где $c_k = a_k - b_k$, $k = \overline{0, n}$. Перейдем к пределу при $x \to x_0$ в равенстве (9), получим $c_0 = 0$. Сократим равенство (9) на $(x - x_0)$, $x \neq x_0$, и снова перейдем к пределу при $x \to x_0$, получим $c_1 = 0$. Продолжая этот процесс, получим $c_k = 0$, $k = \overline{0, n}$, то есть $a_k = b_k$ ◄

Таким образом, задачу локального приближения дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x_0 с помощью полиномов решает формула Тейлора соответствующего порядка

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n),\ x \to x_0,$$

где $P_n(x)$ – полином Тейлора n - ого порядка функции $f(x)$.

21.3 Применение формулы Тейлора для приближения функций

Рассмотрим применение формулы Тейлора для приближения элементарных функций. Наиболее простой вид формула имеет в точке $x_0 = 0$ (в этом случае ее часто называют формулой Маклорена)

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}\, f'(0)\, x + \frac{1}{2!}\, f''(0)\, x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(0)\, x^n + r_n(x). \qquad (1)$$

К этому частному случаю всегда можно свести дело, взяв $(x - x_0)$ за новую переменную. Остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\theta x)\, x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (2)$$

Рассмотрим разложения по этим формулам некоторых элементарных функций.

1. Для функции $f(x) = e^x$, будет $f^{(k)}(x) = e^x$. В точке $x = 0$ получим $f^{(k)}(0) = 1$. Формула Тейлора имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

Таким образом, $|\, r_n(x)| < \dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}$.

В частности при $x = 1$ получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + r_n(x), \quad r_n(1) < \frac{e}{(n+1)!}.$$

Аналогично получим разложение для функции $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}\, x + \frac{\ln^2 a}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{\ln^n a}{n!}\, x^n + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{\ln^{n+1} a}{(n+1)!}\, a^{\theta x}\, x^{n+1}.$$

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Известно, что $f^{(k)}(x) = \sin(x + k\dfrac{\pi}{2})$, отсюда $f(0) = 0$, $f^{(2k)} = 0$, $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$. Положив в (1) $n = 2m$, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x),$$

$$r_{2m}(x) = \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdot \sin(\xi + (2m+1)\frac{\pi}{2}) = (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdot \cos\theta x.$$

Очевидно $|\, r_{2m}(x)| < \dfrac{|\, x|^{\,2m+1}}{(2m+1)!}$. В частности, взяв $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!}$, получим с погрешностью 0,001: $x < 0,6544$ или $x < 37,5^0$.

Аналогично для функции $f(x) = \cos x$ имеем $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\dfrac{\pi}{2})$, отсюда $f(0) = 1$, $f^{(2k)} = (-1)^k$, $f^{(2k-1)}(0) = 0$, $k = 1, 2, ...$ Положив в (1) $n = 2m+1$, получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m+1}(x),$$

$$r_{2m+1}(x) = \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cdot \cos(\xi + (2m+2)\frac{\pi}{2}) = (-1)^{m+1} \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} \cdot \cos\theta x.$$

Очевидно

$$|\, r_{2m+1}(x)| < \frac{|\, x|^{\,2m+2}}{(2m+2)!}.$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(a-k+1)\,(1+x)^{\alpha-k},$$

$$f(0) = 1,\; f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1).$$

Разложение имеет вид

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n + r_n(x),$$

$$r_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\,(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

4. Возьмем функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Вычислим

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}, \quad f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

Разложение имеет вид

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x),$$

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\,(1+\theta x)^{-n-1} = (-1)^n \frac{1}{n+1}\,\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}.$$

Оценим остаточный член:

$$|\, r_n(x)| < \frac{1}{n+1}\,\frac{1}{\theta^{n+1}},$$

поскольку $\dfrac{x}{1+\theta x} < \dfrac{1}{\theta}$.

Пример. Найти формулу Тейлора для функции $f(x) = \mathrm{arctgx}$ в окрестности нуля. Производная функции имеет разложение

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + r_n'(x).$$

Пусть $f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots + a_{2n+1} x^{2n+1} + r_n(x)$. Отсюда найдем

$$f'(x) = a_1 + 3a_3 x^2 + 5a_5 x^4 + \dots + (2n+1) a_{2n+1} x^{2n} + r_n'(x).$$

Сравнивая два выражения для производной $f'(x)$ и учитывая единственность этих разложений, получим

$$a_1 = 1,\ a_3 = -\frac{1}{3},\ a_5 = \frac{1}{5}, \dots, a_{2n+1} = (-1)^n \frac{1}{2n+1}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + r_n(x).$$

Лекция 22. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

22.1 Применение производных для раскрытия неопределенностей

При изучении пределов функций мы пришли к неопределенностям разного вида. Ниже используем понятие производной для раскрытия неопределенностей всех типов. Приводимые далее теоремы в основном принадлежат И. Бернулли. Содержащееся в них правило однако называют "правилом Лопиталя" , так как впервые оно было опубликовано в его книге.

1. Неопределенность вида $0/0$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:
1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a,b), причем $g'(x)\neq 0$;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$;
3) существует конечный или нет предел $\lim\limits_{x\to a}[f'(x)/g'(x)]=K$.
Тогда существует и предел $\lim\limits_{x\to a}[f(x)/g(x)]=K$.

► Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a, положив $f(a)=g(a)=0$. Тогда эти функции окажутся непрерывными в точке a и на отрезке $[a,x]$, где $x\in(a,b)$, для них выполнены условия теоремы Коши. По этой теореме, примененной к отрезку $[a,x]$, получим

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\quad \xi\in(a,x).$$

То обстоятельство, что $g(x)\neq 0$, то есть $g(x)\neq g(a)$, есть следствие условия $g'(x)\neq 0$ на (a,b) (в противном случае найдется точка $x_0\in(a,x)$, что $g'(x_0)=0$ – теорема Ролля). Когда $x\to a$, очевидно и $\xi\to a$, поэтому

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=K.$$

Что и требовалось доказать ◄

Таким образом, доказанная теорема, называемая правилом Лопиталя, сводит предел отношения функций к пределу отношения производных, если последний существует. Часто предел отношения производных не содержит особенности и вычисляется проще.

Замечание. Мы рассмотрели случай, когда точка a является левым концом промежутка и $x\to a+0$. Аналогично рассматривается случай правого конца, когда $x\to b-0$. Допустим также двухсторонний предельный переход $x\to x_0$, где $x_0\in(a,b)$.

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1/\cos^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=2.$$

Здесь отношение производных снова представляло неопределенность вида $0/0$, но эта неопределенность легко устранима.

Теорема 1 легко распространяется на случай, когда имеет место неопределенность вида $0/0$ при стремлении аргумента к бесконечному пределу: $x \to \pm\infty$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:
1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(c, +\infty)$, $c > 0$, причем $g'(x) \neq 0$;
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$;
3) существует конечный или нет предел $\lim\limits_{x \to +\infty} [f'(x)/g'(x)] = K$.
Тогда существует и предел $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)/g(x)] = K$.

► Сделаем замену переменной $x = 1/t$, тогда при $x \to +\infty$ получим $t \to 0$. Для функций $f(x(t))$ и $g(x(t))$ переменной t на промежутке $(0, 1/c)$ выполнены все условия теоремы 1, в частности $g'_t(x(t)) = g'_x(x) \cdot x'_t(t) \neq 0$. Применение теоремы 1 дает $\lim\limits_{t \to +0} [f(x(t))/g(x(t))] = K$. Возвращаясь к переменной x, получим требуемый результат. ◄

2. **Неопределенность вида** ∞/∞.

Исследуем вопрос о пределе отношения двух функций $f(x)$ и $g(x)$, стремящихся к бесконечности при $x \to a$. Покажем, что в этом случае применимо правило Лопиталя и имеет место теорема типа теоремы 1.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:
1) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$;
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$;
3) существует конечный или нет предел $\lim\limits_{x \to a} [f'(x)/g'(x)] = K$.
Тогда существует и предел $\lim\limits_{x \to a} [f(x)/g(x)] = K$.

► Рассмотрим случай конечного K. Ввиду условия 3) для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, что для $\forall x \in (a, a + \delta) \subset (a, b)$

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Фиксируем точку x: $a < x < a + \delta = x_0$ и к отрезку $[x, x_0]$ применим формулу Коши для функций $f(x)$ и $g(x)$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (x, x_0).$$

Из условия $g'(x) \neq 0$ на (a, b) следует, что $g(x) \neq g(x_0)$. Когда $x \to a$, очевидно и $\xi \to a$, поэтому

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{\xi \to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K.$$

Следовательно для $\forall\, \varepsilon > 0$ и $\forall\, x \in (a, x_0)$

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Рассмотрим тождество (проверяется непосредственно)

$$\frac{f(x)}{g(x)} - K = \frac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)} + \left[1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - K\right].$$

Так как $g(x) \to +\infty$ при $x \to a$, то $\exists\, \delta_0 > 0$ (можно считать $\delta_0 < \delta$), что для $a < x < a + \delta_0$ будет $g(x) \neq 0$, $g(x) \neq g(x_0)$ и $\left|\dfrac{f(x_0) - Kg(x_0)}{g(x)}\right| < \dfrac{1}{2}\varepsilon$.

При указанных значениях x будем иметь

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

Что и доказывает требуемое утверждение для конечного K.

Пусть теперь $K = +\infty$, случай $K = -\infty$ невозможен ввиду условия 2); тогда $f'(x) \neq 0$, по крайней мере для значений x близких к a. Поменяв ролями функции $f(x)$ и $g(x)$ будем иметь

$$\lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

по доказанному. Откуда следует $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ ◄

Замечание. Теорема 3 справедлива с естественными видоизменениями и для случаев $x \to b - 0$, $x \to \pm\infty$ и для двухсторонних пределов, когда $x \to x_0$, где $x_0 \in (a, b)$.

Примеры.

1) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$.

2) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x \ln a} = 0$, $\alpha > 0$, $a > 1$.

В последнем примере Теорема 3 применяется повторно столько раз, чтобы показатель степени у x стал нулем или отрицательным.

3. **Другие виды неопределенностей**

Если имеется неопределенность вида $0 \cdot \infty$, то ее можно привести к виду $0/0$ или ∞/∞ и тогда применить правило Лопиталя. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty,$$

причем $f(x)$ не меняет знака. Тогда имеем

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

Первое из этих выражений имеет неопределенность $0/0$, второе ∞/∞.

Пример.

$$\lim_{x\to+0}(x^{\alpha}\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{x^{\alpha}}{-\alpha}=0.$$

Неопределенность вида $\infty-\infty$ также можно привести к виду $0/0$ или ∞/∞. Пусть

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to a}g(x)=+\infty.$$

Тогда можно провести, например, следующие преобразования, сводящее неопределенность к виду $0/0$

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/g(x)}=\frac{1/g(x)-1/f(x)}{(1/f(x))\cdot(1/g(x))}.$$

Часто того же результата удается достичь проще.

Пример.

$$\lim_{x\to 0}(\mathrm{ctg}^2x-\frac{1}{x^2})=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sin x/x)+2\cos x}=-\frac{2}{3}.$$

В случае неопределенности вида 1^{∞}, 0^0, ∞^0 рекомендуется эти выражения предварительно прологарифмировать.

Пусть $y=f(x)^{g(x)}$, тогда $\ln y=g(x)\,\ln f(x)$. Предел функции $\ln y$ представляет неопределенность изученного типа. Допустим, что одним из указанных выше приемов удается найти $\lim\limits_{x\to a}\ln y$, который оказывается конечным числом k или $+\infty$, $-\infty$, тогда $\lim\limits_{x\to a}y$ будет соответственно e^k, $+\infty$, 0.

Примеры.

1) Пусть $y=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}$. Нужно найти предел функции при $x\to 0$. Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Если считать $x>0$ (ввиду четности функции y этим можно ограничиться), то

$$\ln y=\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x},\quad \lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{ctg}\,x-1/x}{\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\sin x+2x\cos x}=-\frac{1}{3}.$$

$$\lim_{x\to 0}y=e^{-1/3}=1/\sqrt[3]{e}.$$

2) Найдем предел

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{x\ln x}=\lim_{x\to+0}e^{\ln x/(1/x)}=$$

$$= \lim_{x\to+0} e^{(1/x)/(-1/x^2)} = \lim_{x\to+0} e^{-x} = 1.$$

Упражнение. Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 n производных. Рассмотрим выражение $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$, где

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Ясно, что $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Применяя правило Лопиталя, вычислим предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \cdots =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Таким образом, имеем $r_n(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$. В результате другим методом получена формула Пеано остаточного члена формулы Тейлора.

Лекция 23. Исследование функций с помощью производных

Эта лекция посвящена исследованию функций и их графиков с помощью понятия производной. В частности будут рассмотрены признаки монотонности и условия экстремума функций, наличия выпуклостей и точек перегиба функции, асимптот функции.

23.1 Признаки монотонности функций

При исследовании функций прежде всего возникает вопрос об условиях, когда функция постоянна или изменяется монотонно. Частично мы уже рассматривали эти свойства в Следствиях 1 и 2 из теоремы Лагранжа. Теперь мы приступаем к более систематическому изучению вопроса.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b). Для того, чтобы функция $f(x) = const$ на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) = 0$ на интервале (a,b).

► *Необходимость* условия очевидна, поскольку из условия $f(x) = const$ на $[a,b]$ следует $f'(x) = 0$ на (a,b).

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0$ на (a,b). Фиксируем некоторую точку $x_0 \in (a,b)$ и возьмем $\forall\, x \in (a,b)$. Для функции $f(x)$ на отрезке $[x_0,x]$ или $[x,x_0]$ выполнены условия теоремы Лагранжа, тогда

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где точка ξ лежит между x_0 и x. По условию $f'(\xi) = 0$, так что для $\forall\, x \in [a,b]$ $f(x) = f(x_0) = const$ ◄

Отметим, что теорема верна для любого промежутка (конечного или нет).

Следствие. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале (a,b). Если $f'(x) = g'(x)$ на (a,b), то $f(x) - g(x) = const$ на (a,b).

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Для того, чтобы функция $f(x) \uparrow$ или $f(x) \downarrow$ на (a,b), необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ или $f'(x) \leq 0$ на интервале (a,b).

► *Необходимость*. Пусть $f(x) \uparrow$ на (a,b). Возьмем точки x и $x + \Delta x$ на этом интервале. Если $\Delta x > 0$, то $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \geq 0$ и $\Delta f/\Delta x \geq 0$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x) \geq 0$. Аналогично при $\Delta x < 0$ также получим $f'(x) \geq 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ на (a,b). Возьмем точки $x_1 < x_2$ на (a,b). Для функции $f(x)$ на отрезке $[x_1,x_2]$ выполнены условия теоремы Лагранжа. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

где $\xi \in (x_1,x_2)$. Так как $f'(x) \geq 0$, то $f(x_2) \geq f(x_1)$, то есть $f(x) \uparrow$ на (a,b).

Аналогично рассматривается случай функции $f(x) \downarrow$ на (a, b) ◄

Установленная зависимость между знаком производной $f'(x)$ и возрастанием или убыванием функции $f(x)$ на интервале (a, b) геометрически совершенно очевидна, если учесть, что производная равна угловому коэффициенту касательной к графику функции (рис. 9).

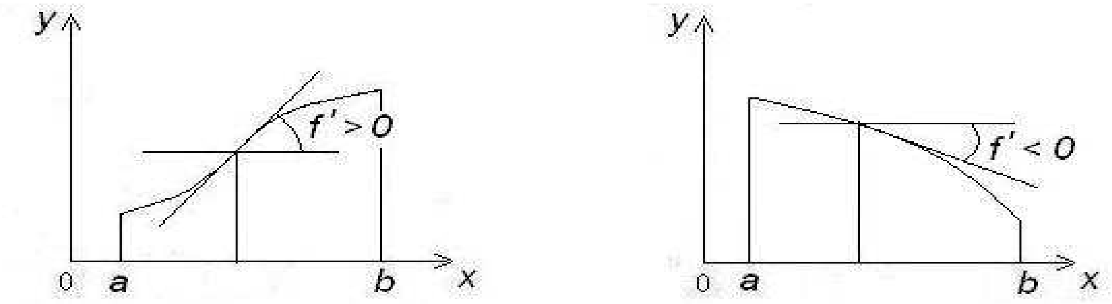


Рис. 9 Монотонные функции и знак производной

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Для того, чтобы функция $f(x)$ была строго монотонна на интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы:

1) $f'(x) \geq 0$ или $f'(x) \leq 0$ на (a, b);

2) $f'(x) \neq 0$ ни на каком промежутке из (a, b).

► *Необходимость*. Если функция $f(x) \Uparrow$ на (a, b), то по Теореме 2 $f'(x) \geq 0$ и условие 1) выполнено. Условие 2) также выполнено, в противном случае $f'(x) = 0$ на некотором промежутке из (a, b) и на этом промежутке $f(x) = const$ по Теореме 1.

Достаточность. Пусть выполнены оба условия 1) и 2). Тогда по Теореме 2 функция $f(x) \uparrow$ на (a, b). Возьмем точки $x_1 < x_2$ на (a, b). Тогда для $\forall\, x \in [x_1, x_2]$ будет

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Если $f(x_1) = f(x_2)$, то на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $f(x) = const$ и мы имеем $f'(x) = 0$ в (x_1, x_2), вопреки условию 2). Итак $f(x_1) < f(x_2)$ при $\forall\, x_1 < x_2$ из (a, b) и функция $f(x) \Uparrow$ на (a, b). Случай $f(x) \Downarrow$ доказывается аналогично. ◄

Заметим, что для строго монотонной функции ее производная может обращаться в нуль в отдельных точках промежутка.

Примеры. Функции $f(x) = x^3$ и $f(x) = x - \sin x$ строго возрастают, хотя в точке $x = 0$ их производные $f'(0) = 0$.

23.2 Экстремумы функции

Теорема 1. (Необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и в точке $x_0 \in (a, b)$ имеет локальный экстремум. Тогда производная $f'(x_0) = 0$, либо она не существует.

► Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) = 0$. Это утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы Ферма, примененной к интервалу $U(x_0) \subset (a, b)$ (окрестности точки $x_0 \in (a, b)$), который указан в определении экстремума функции ◄

Отметим, что условие $f'(x) = 0$ является необходимым условием экстремума функции. Однако оно не является достаточным. Это показывает следующий пример: $f(x) = x^3$ на $\mathbf{R}$. В точке $x = 0$ имеем $f'(0) = 0$, однако в этой точке нет экстремума.

Точки $x \in (a, b)$, где $f'(x) = 0$, называются стационарными. Кроме стационарных точек функция $f(x)$ может иметь экстремум в точках, где она непрерывна, но не имеет обычной производной. Такими точками экстремума могут быть угловые точки графика функции.

Теорема 2. (Достаточное условие строгого экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в $U(x_0)$, кроме, быть может, точки x_0, где она непрерывна. Если производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий экстремум. При этом возможны два случая:
1) если $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, где $\delta > 0$ и $U(x_0, \delta) \subset U(x_0)$, то в точке x_0 функция имеет строгий max;
2) если $f'(x) < 0$ для $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ для $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то в точке x_0 строгий min,

► Рассмотрим первый случай. Для функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ выполнены условия Теоремы 3 п. 8.1, поэтому функция $f(x) \Uparrow$ на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) \Downarrow$ на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. Отсюда следует, что точка x_0 является точкой строго max функции $f(x)$. Аналогично рассматривается второй случай ◄

Заметим, что если производная $f'(x)$ не меняет знак при переходе точки x_0, то никакого экстремума в этой точке нет. В зависимости от знака производной функция $f(x) \uparrow$ либо $f(x) \downarrow$ на $U(x_0)$.

Условия Теоремы 2 являются достаточными для существования строгого экстремума функции $f(x)$, но не являются необходимыми.

Дадим теперь достаточные условия экстремума функции $f(x)$ в точке $x_0 \in U(x_0)$ в терминах значений высших производных.

Теорема 3. Пусть функция $f \colon U(x_0) \to \mathbf{R}$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0, имеет в точке x_0 производные до n - го порядка включительно. Если $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при n нечетном в точке x_0 экстремума нет, а при n четном экстремум есть, причем это строгий локальный max, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и min, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

► Из условий теоремы следует, что локальная формула Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 с остаточным членом в форме Пеано имеет вид

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{n!}[f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)](\Delta x)^n, \tag{1}$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Вследствие того, что $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, поэтому при достаточно малых значениях $|\Delta x|$ знак правой части (1), а значит и знак приращения Δf, совпадает со знаком первого слагаемого. Если n - четное, то знак Δf не зависит от знака Δx, тогда точка x_0 является точкой строгого экстремума: строгого max, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, $(\Delta f < 0)$, и строгого min, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, $(\Delta f > 0)$.

Если n - нечетное, то знак Δf изменяется вместе с изменением знака Δx на обратный и значит в точке x_0 нет экстремума функции $f(x)$ ◄

Следствие. Если функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ и $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то при $f''(x_0) < 0$ функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный max, а при $f''(x_0) > 0$ – строгий локальный min.

23.3 Отыскание наибольших и наименьших значений функции

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, достигает на нем верхней и нижней граней (теорема Вейерштрасса), то есть наибольшего и наименьшего значений. Рассмотрим вопрос о нахождении наибольшего и наименьшего значений. Если эти значения достигаются на интервале (a, b), то они будет среди локальных экстремумов (max и min). Таким образом, для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ нужно сравнить между собой все max и min функции $f(x)$ и ее граничные значения $f(a)$ и $f(b)$ (наибольшее и наименьшее значения могут достигаться на концах отрезка). Наибольшее и наименьшее из чисел и будут наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Практически поступают так: находят все стационарные точки и точки, где производная не существует, затем из этих точек отбирают те точки, где возможен max и min. Вычисляют значения функции в этих точках и на границах отрезка. Путем сравнения находят наибольшее и наименьшее значения.

Замечание. Мы сохраняем за терминами max и min их локальный смысл (в окрестности точки), а за терминами наибольшее и наименьшее значениями – глобальный смысл, то есть на всем рассматриваемом промежутке.

Точки, где не существует конечной производной (производная равна $\pm\infty$) или где нет двухсторонней производной, также нужно отнести к числу подозрительных на экстремум и подвергнуть испытанию.

Графическая иллюстрация различных возможностей "подозрительных" на экстремум точек дана на рис. 10.

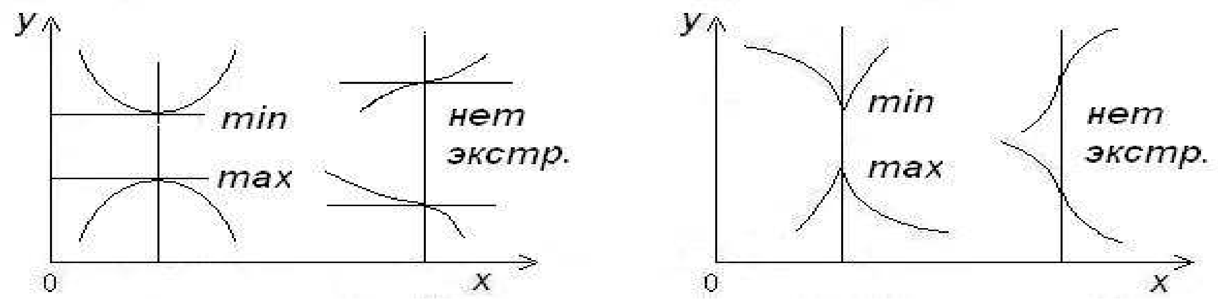


Рис. 10 Подозрительные на экстремум точки графика

23.4 Условия выпуклости и точки перегиба функции

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется выпуклой вверх на нем, если для $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$ и любых чисел $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеет место неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{1}$$

Функция $f(x)$ называется выпуклой вниз на интервале (a, b), если при тех же условиях имеет место противоположное неравенство

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \tag{2}$$

Функция $f(x)$ называется строго выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b), если при $x_1 \neq x_2$ и $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ неравенства (1) и (2) являются строгими.

Геометрически условия выпуклости функции $f(x)$ на интервале (a, b) означают, что точки любой дуги графика функции лежат над или под хордой, стягивающей эту дугу (рис. 11).

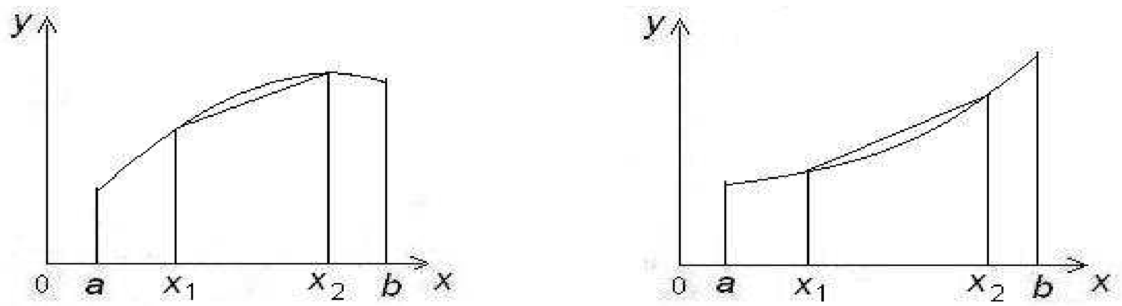


Рис. 11 Выпуклости графика функции

Уравнение прямой (хорды), проходящей через две точки графика функции $f(x)$: $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ имеет вид

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2). \tag{3}$$

Очевидно $y(x_1) = f(x_1)$ и $y(x_2) = f(x_2)$, то есть прямая (3) действительно проходит через указанные точки.

Обозначим правую часть равенства (3) $y = h(x)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b), если для $\forall\, x_1 < x_2 \in (a, b)$ для $\forall\, x \in (x_1, x_2)$ выполняется неравенство: $f(x) \geq h(x)$ (соответственно $f(x) \leq h(x)$). Если выполняются строгие неравенства, то функция $f(x)$ называется строго выпуклой вверх (вниз).

Определения 1 и 2 совпадают, так как сделав в неравенствах (1), (2) подстановку $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in (a, b)$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, мы получим условия Определения 2.

Теорема 1 (достаточное условие выпуклости). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b). Тогда при $f''(x) < 0$ функция $f(x)$ строго выпукла вверх на (a, b), а при $f''(x) > 0$ функция $f(x)$ строго выпукла вниз на (a, b).

► Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. Рассмотрим разность функций

$$h(x) - f(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,[f(x_2) - f(x)] - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\,[f(x) - f(x_1)].$$

Применяя теорему Лагранжа к функциям в квадратных скобках, получим

$$h(x) - f(x) = [f'(\xi_2) - f'(\xi_1)]\frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1},$$

где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Снова применим теорему Лагранжа

$$h(x) - f(x) = f''(\xi)\,\frac{(x_2 - x)(x - x_1)}{x_2 - x_1}\,(\xi_2 - \xi_1), \tag{4}$$

где $\xi_1 < \xi < \xi_2$. Отсюда следует: если $f''(x) < 0$ на (a, b), то $f(x) > h(x)$ и функция $f(x)$ строго выпукла вверх на (a, b); если $f''(x) > 0$ на (a, b), то $f(x) < h(x)$ и функция $f(x)$ строго выпукла вниз на (a, b) ◄

Замечание. Можно доказать, что неравенство $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) является необходимым условием выпуклости вверх (вниз) функции $f(x)$ на интервале (a, b). Это видно из формулы (4).

Примеры.

1) $f(x) = \sin x$, $f''(x) = -\sin x$. На интервалах $2\pi k < x < \pi(2k + 1)$ будет $f''(x) < 0$ и функция строго выпукла вверх; на интервалах $\pi(2k - 1) < x < 2\pi k$ будет $f''(x) > 0$ и функция строго выпукла вниз.

2) $f(x) = \log_a x$, $a > 0$. Имеем $f''(x) = -x^{-2} \log_a e$. Если $0 < a < 1$, то $f''(x) > 0$ и функция строго выпукла вниз, если $a > 1$, то $f''(x) < 0$ и функция строго выпукла вверх.

Лекция 24. Продолжение исследования функций

24.1 Точки перегиба функции

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в окрестности $U(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbf{R}$. Если на множестве $\{x \in U(x_0) \mid x < x_0\}$ функция строго выпукла вверх (вниз), а на множестве $\{x \in U(x_0) \mid x > x_0\}$ строго выпукла вниз (вверх), то точка x_0 называется точкой перегиба функции.

В этом случае точка с координатами $(x_0, f(x_0))$ называется точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Теорема 1 (необходимое условие точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале (a, b). Если точка $x_0 \in (a, b)$ является точкой перегиба функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

► Действительно, если имеет место неравенство $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), то в силу непрерывности функции $f''(x)$ найдется окрестность $U(x_0) \subset (a, b)$, где $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), и согласно теореме 1 функция $f(x)$ будет строго выпуклой вверх (вниз) в этой окрестности. Это противоречит условию, что точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$ ◄

Замечание. Подобно тому, как все точки локального экстремума функции $f(x)$ находятся среди точек, где производная $f'(x) = 0$ или не существует, так и все точки перегиба функции $f(x)$ находятся в множестве точек, где вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.

Теорема 2 (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности $U(x_0)$, кроме, быть может, самой точки x_0, в которой она непрерывна. Если вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.

► В силу теоремы 1 в этом случае функция $f(x)$ при переходе точки x_0 меняет строгую выпуклость вверх (вниз) на строгую выпуклость вниз (вверх) и значит, по Определению 1, x_0 будет точкой перегиба функции $f(x)$ ◄

24.2 Асимптоты функции

Определение 1. Прямая $y = kx + b$, где k и b - const, называется асимптотой функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$, соответственно, если $f(x) - (kx + b) = \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$. Асимптоту указанного вида называют наклонной.

Существование асимптоты у функции $f(x)$ означает, что при стремлении $x \to \pm\infty$ функция близка к линейной, то есть отличается от линейной функции на бесконечно малую функцию.

Укажем общий метод нахождения асимптоты $y = kx + b$ функции $f(x)$, то есть способ нахождения коэффициентов k и b. Для определенности рассмотрим случай $x \to +\infty$, случай $x \to -\infty$ рассматривается аналогично. Согласно определению асимптоты имеем

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \text{ где } \lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0. \tag{1}$$

Разделим обе части равенства (1) на x и перейдем к пределу

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{2}$$

Найдя число k по формуле (2), переходим к определению числа b с помощью формулы (1)

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \tag{3}$$

Таким образом, задача отыскания асимптоты функции сводится к нахождению двух пределов (2) и (3). Если хоть один из пределов не существует, то асимптоты нет.

В форме $y = kx + b$ могут быть найдены все асимптоты, кроме асимптот, параллельных оси $0y$. Распространим определение асимптоты на этот случай.

Определение 2. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой функции $f(x)$, если выполняется хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to a+0} f(x) = \infty.$$

Пример. Найти асимптоты функции $y = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x + 1}$.
Очевидно существует вертикальная асимптота $x = -1$, поскольку $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \infty$. Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x - 2}{x(x+1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 3x - 2}{x + 1} - x \right) = -4.$$

Наклонная асимптота $y = x - 4$.

24.3 Построение графика функции

Теперь с помощью развитого нами аналитического аппарата можно изучать поведение функций и строить их графики. Исследование функций целесообразно проводить в следующем порядке.
1. Найти область определения функции, промежутки непрерывности и точки разрыва, отметить специфические особенности функции: четность и нечетность, периодичность и другие.
2. Найти асимптоты функции.
3. Вычислить первую и вторую производные функции, найти точки, где эти производные обращаются в нуль или не существуют.

4. Определить промежутки возрастания и убывания функции, выпуклости вверх и вниз.
5. Найти точки локальных экстремумов и точки перегиба.
6. Начертить график функции, отметить характерные точки графика: локальных экстремумов, точки пересечения с осями координат и другие.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$ и построить ее график.
1) Функция определена при всех $x \neq 2$. Функция не имеет свойств четности, нечетности и периодичности. График функции пересекает координатные оси в точке $(0, 0)$. Функция $y \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$.
2) Асимптоты функции: прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{4}, \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(y - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)}{(x-2)^2} = 1.$$

Прямая $y = \dfrac{1}{4}x + 1$ является наклонной асимптотой. 3) Найдем первую и вторую производные функции

$$y' = \frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}; \quad y' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = 6.$$

При $x < 2$ имеем $y' \geq 0$ и функция $y \uparrow$;
при $2 < x < 6$ имеем $y' < 0$ и функция $y \downarrow$;
при $x > 6$ будет $y' > 0$, функция $y \uparrow$.

$$y'' = \frac{6x}{(x-2)^4}, \quad y''(0) = 0, \quad y''(6) > 0.$$

В точке $x = 0$ экстремума нет, в точке $x = 6$ функция имеет min, $y(6) = 27/8$.
4) При $x < 0$ будет $y'' < 0$ – функция имеет выпуклость вверх, при $0 < x < 2$ и $x > 2$ имеем $y'' > 0$ – функция выпукла вниз.
5) В точке $x = 0$ функция меняет выпуклость вверх на выпуклость вниз, следовательно точка $x = 0$ является точкой перегиба; $y(0) = 0$.
6) График функции показан на рис. 12.

24.4 Асимптоты параметрически заданных функций

Для таких функций также вводится понятие асимптоты. Пусть функция задана формулами $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой, если существует такое число t_0, что

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0, \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = \infty.$$

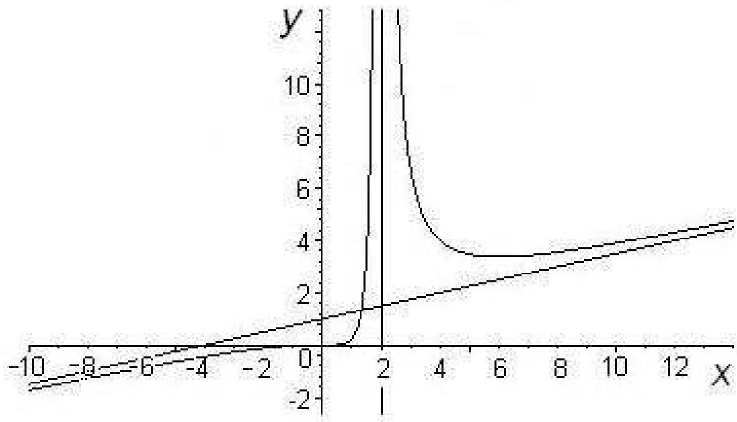


Рис. 12 График функции

Прямая $y = y_0$ называется горизонтальной асимптотой, если существует такое число t_0, что

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0.$$

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой функции, если существует такое число t_0, что

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = \infty, \qquad \lim_{t\to t_0} y(t) = \infty.$$

$$k = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \qquad b = \lim_{t\to t_0} (y - kx).$$

Аналогично вводятся понятия асимптоты для случаев $t \to t_0 \pm 0$.

Пример. Найти асимптоты функции: $x = \dfrac{3t}{t^3+1}$, $y = \dfrac{3t^2}{t^3+1}$.

Вертикальных и горизонтальных асимптот нет. Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$. Имеем

$$\lim_{t\to -1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to -1} y(t) = \infty.$$

$$k = \lim_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to -1} t = -1,$$

$$b = \lim_{t\to -1} (y - kx)(t) = \lim_{t\to -1} \left(\frac{3t^2}{t^3+1} + \frac{3t}{t^3+1}\right) = \lim_{t\to -1} \frac{3t(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = -1.$$

Асимптота $y = -x - 1$.

24.5 Асимптоты функций в полярных координатах

В полярных координатах (r, φ) асимптотой функции $r = r(\varphi)$ является прямая

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)},$$

если выполнены следующие условия

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi) = +\infty, \qquad \lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0) = d.$$

Пример. Найти асимптоты функции $r = \dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}$. Функция является периодической периода 2π, поэтому достаточно рассмотреть промежуток $[-\pi, +\pi]$.

$$\lim_{\varphi\to-\pi/4-0} r(\varphi) = +\infty \text{ и } \lim_{\varphi\to3\pi/4+0} r(\varphi) = +\infty,$$

$$d = \lim_{\varphi\to-\pi/4-0} r(\varphi)\sin(\varphi+\pi/4) = -1/\sqrt{2},$$

$$d = \lim_{\varphi\to3\pi/4+0} r(\varphi)\sin(\varphi-3\pi/4) = +1/\sqrt{2}.$$

Пределы легко находятся по правилу Лопиталя.

Уравнения асимптот

$$r = -\frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi+\pi/4)}, \quad r = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(\varphi-3\pi/4)}.$$

Поскольку $\sin(\varphi+\pi/4) = -\sin(\varphi-3\pi/4)$, то это одна прямая.

Лекция 25. Приближение непрерывной функции многочленом

Вопрос о локальном приближении функции $f(x)$ многочленом в окрестности $U(x_0)$ некоторой точки $x_0 \in \mathbf{R}$ решает полином Тейлора данной функции. Ниже рассматривается задача глобального приближения функции $f(x)$ полиномом с заданной точностью на всем отрезке $[a, b]$, где функция определена и непрерывна.

Сначала рассмотрим две вспомогательные Леммы, где будут установлены тождества, используемые в дальнейшем.

Лемма 1. При всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m} = 1. \tag{1}$$

► Полагая в формуле Бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m\, a^m b^{n-m}.$$

$a = x$, $b = 1 - x$, получим формулу (1) ◄

Лемма 2. При всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо тождество

$$\sum_{m=0}^{n} (m-nx)^2 C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m} = nx(1-x). \tag{2}$$

► Продифференцируем тождество

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m\, z^m = (1+z)^n \tag{3}$$

по z и умножим результат на z:

$$\sum_{m=0}^{n} mC_n^m\, z^m = nz(1+z)^{n-1}. \tag{4}$$

Теперь равенство (4) продифференцируем по z и результат умножим на z:

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m\, z^m = nz(1+nz)(1+z)^{n-2}. \tag{5}$$

Положим в (3), (4), (5) $z = x/(1-x)$ и полученные тождества умножим на $(1-x)^n$ это дает

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m} = 1. \tag{6}$$

$$\sum_{m=0}^{n} mC_n^m\, x^m (1-x)^{n-m} = nx. \tag{7}$$

$$\sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m} = nx(1-x+nx). \qquad (8)$$

Умножим (6) на n^2x^2, (7) - на $(-2nx)$, (8) без изменений и все равенства сложим. В результате получим формулу (2) ◄

Следствие. При всех $x \in [0,1]$ имеем

$$\sum_{m=0}^{n} (m-nx)^2 C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m} \le \frac{n}{4}.$$

25.1. Теорема Бернштейна

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,1]$. Многочлен

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m}$$

называется многочленом Бернштейна С.Н. функции $f(x)$.

Теорема Бернштейна. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что для $\forall\, n > n_\varepsilon$ будет

$$|\, B_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ для } \forall\, x \in [0,1].$$

► Пусть $M = \max\limits_{x \in [0,1]} |\, f(x)|$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$, то M – конечное число (вторая теорема Вейерштрасса). По теореме Кантора функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на $[0,1]$, тогда

для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall\, x_1, x_2 \in [0,1]$, $|\, x_1 - x_2| < \delta$

будет выполняться неравенство $|\, f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Возьмем любое $x \in [0,1]$. Из Леммы 1 следует

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} f(x) C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m},$$

тогда

$$|\, B_n(x) - f(x)| = \sum_{m=0}^{n} |\, f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)|\, C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m}. \qquad (9)$$

Разобъем все значения m на две категории A и B:

$$m \in A, \text{ если } |\, \frac{m}{n} - x| < \delta \text{ и } m \in B, \quad \text{если } |\, \frac{m}{n} - x| \ge \delta.$$

Если $m \in A$, то $|\, f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)| < \varepsilon$ и из формулы (9), используя Лемму 1, получим

$$|\, B_n(x) - f(x)| = \sum_{m \in A} |\, f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x)|\, C_n^m\, x^m (1-x)^{n-m} \le \varepsilon \qquad (10).$$

Если $m \in B$, то $(m - nx)^2 \geq n^2\delta^2$. В силу Следствия из Леммы 2

$$\sum_{m \in B} \left| f\left(\frac{m}{n}\right) - f(x) \right| C_n^m \, x^m (1-x)^{n-m} \leq 2M \ \leq$$

$$\leq \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{m \in B} (m - nx)^2 \, C_n^m \, x^m (1-x)^{n-m} < \frac{M}{2n\delta^2}. \qquad (11)$$

Сопоставляя равенства (9), (10) и (11), находим, что

при $\forall\, x \in [0,1]$ будет $|\, B_n(x) - f(x)| < \varepsilon + M/2n\delta^2$.

Значит при $n > M/2\varepsilon\delta^2$ получим $|\, B_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. ◄

Теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то для $\forall\,\varepsilon > 0$ найдется многочлен $P(x)$, что

$$|\, f(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ для } \forall\, x \in [a,b].$$

► Сделаем замену переменной у функции $f(x)$, положив $x = a + (b-a)t$, где $t \in [0,1]$. Функция $f(a + (b-a)t)$ переменной t определена и непрерывна на отрезке $[0,1]$. По теореме Бернштейна найдется многочлен $Q(t)$ такой, что

$$\text{для } \forall\, t \in [0,1] \text{ будет } |\, f(a + (b-a)t) - Q(t)| < \varepsilon.$$

Если $x \in [a,b]$, то $\dfrac{x-a}{b-a} = t \in [0,1]$ и, стало быть, $|\, f(x) - Q\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)| < \varepsilon$. Поэтому многочлен $P(x) = Q\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right)$ – искомый ◄

25.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Рассматривается следующая задача: даны две группы из n вещественных чисел каждая $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, где все числа x_i различны, про числа y_i мы этого не предполагаем. Требуется построить полином $L(x)$ наименьшей степени так, чтобы оказалось $L(x_i) = y_i$, $i = \overline{1,n}$.

Заметим, что многочлен

$$l_k(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \ i \neq k \qquad (1)$$

удовлетворяет условию $l_k(x_i) = \delta_{ki}$. Поэтому многочлен

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \, l_k(x) \qquad (2)$$

решает нашу задачу. Степень этого многочлена не выше $(n-1)$. С другой стороны, никакого другого многочлена $M(x)$ степени не выше $(n-1)$ существовать не может, ибо иначе разность $L(x) - M(x)$ была бы не тождественным нулю многочленом степени не выше $(n-1)$, имеющим n корней x_i: $L(x_i) - M(x_i) = 0$, что невозможно. Многочлен (1) называется фундаментальным, многочлен (2) называется интерполяционной формулой Лагранжа.

Если $P(x)$ есть полином порядка не выше $(n-1)$, а $x_1, x_2, \dots, x_n$ – различные значения аргумента, то справедливо тождество

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, l_k(x),$$

ибо обе части равенства есть многочлены степени ниже n, совпадающие в n точках x_i, в частности сумма $\sum_{k=1}^{n} l_k(x) = 1$.

Если $f(x)$ – произвольная функция, заданная на отрезке $[a, b]$, и x_i, $i = \overline{1, n}$, – точки из этого отрезка, то многочлен

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x) \tag{3}$$

есть единственный полином степени не выше $(n-1)$, значения которого совпадают со значениями функции $f(x)$ в узлах x_i. Разумеется при $x \neq x_i$ совпадения $f(x)$ и $L(x)$ может не быть.

Многочлен (3) называют интерполяционным полиномом Лагранжа для функции $f(x)$. Часто его обозначают $L(f, x)$. Очевидно $L(P, x) = P(x)$, если $P(x)$ – полином степени ниже n.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и имеет там производные до порядка n включительно. Найдем удобную оценку разности $f(x) - L(x)$ при $\forall\, x \in [a, b]$, не совпадающем с узлами x_i, $i = \overline{1, n}$. Фиксируем $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$, и обозначим

$$K(x) = \frac{f(x) - L(x)}{\omega(x)}, \tag{4}$$

где $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$, и пусть $\varphi(z) = f(z) - L(z) - K(x) \cdot \omega(z)$. Эта функция задана на отрезке $[a, b]$ и имеет там производные до n - го порядка включительно, причем

$$\varphi^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - K(x) \cdot n!, \tag{5}$$

так как $L(z)$ – полином степени ниже n, а $\omega^{(n)}(z) = n!$.

Очевидно $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$. Кроме того, в силу (4) $\varphi(x) = 0$. Значит в n интервалах между $(n+1)$ точками $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ оказывается n корней производной $\varphi'(z)$, причем все они различны (теорема Ролля). Вторичное применение теоремы Ролля показывает, что в $(n-1)$ интервалах между n корнями $\varphi'(z)$ имеется $(n-1)$ различных корней производной $\varphi''(z)$. Продолжая этот процесс, мы убедимся, что между наименьшим и наибольшим из чисел $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ обязательно существует корень n - ой производной $\varphi^{(n)}(z)$.

Обозначим его через ξ, тогда из (5) получим

$$K = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\xi)$$

и формула (4) приводит к интерполяционной формуле Лагранжа с остаточным членом

$$f(x) = L(x) + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(\xi)\, \omega(x), \quad a < \xi < b.$$

Лекция 26. Неопределенный интеграл

Мы изучали дифференциальное исчисление функций, в частности правили дифференцирования, свойства дифференцируемых функций и т. д. Однако и в теории и на практике чаще приходится решать другую задачу, а именно нахождение функций из уравнений для производных этих функций. Этот раздел анализа называется интегральным исчислением.

26.1 Определение и свойства неопределенного интеграла

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией или просто первообразной для функции $f(x)$, заданной на промежутке X, если функция $F(x)$ дифференцируема на этом промежутке и $F'(x) = f(x)$ для $\forall x \in X$.

Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная функция для функции $f(x)$ на промежутке X, то функция $F(x)+C$, где $C-\mathrm{const}$, также будет первообразной для $f(x)$, поскольку $(F(x)+C)'_x = f(x)$.

Справедливо также утверждение: если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для функции $f(x)$ на промежутке X, то они отличаются на некоторую постоянную, то есть $F_1(x)-F_2(x) = C$. Действительно, $[F_1(x)-F_2(x)]'_x = f(x)-f(x) = 0$.

Таким образом, под первообразной понимается множество функций, которые отличаются на постоянное слагаемое. Все первообразные функции $f(x)$ представимы в виде $F(x)+C$, где $F(x)$ – любая первообразная.

Определение 2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$, определенной на промежутке X, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на X и обозначается символом

$$\int f(x)\,dx. \tag{1}$$

Знак $\int$ называется интегралом, $f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)\,dx$ – подынтегральным выражением. Если $F(x)$ какая - то конкретная первообразная функция, то пишут

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C. \tag{2}$$

Так как $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$, то под знаком интеграла может стоять дифференциал любой первообразной.

Операции дифференцирования и интегрирования являются взаимно обратными, действительно

$$d\int f(x)\,dx = d(F(x)+C) = f(x)\,dx, \tag{3}$$

$$\int dF(x) = F(x)+C. \tag{4}$$

(во втором случае нужно добавить const к первообразной).

Основные свойства неопределенного интеграла

Операция интегрирования является линейной относительно сложения функций и умножения на число.

Теорема 1. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные на промежутке X, то и функция $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$, где $k_1, k_2 - \mathrm{const}$, имеет первообразную на X, причем

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))\, dx = k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx. \tag{5}$$

► Пусть $\int f_1(x)\, dx = F_1(x)$, $\int f_2(x)\, dx = F_2(x)$. Функция $F(x) = k_1 F_1(x) + k_2 F_2(x)$ очевидно дифференцируема на X, причем

$$F'(x) = [k_1 F_1(x) + k_2 F_2(x)]'_x = k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x).$$

Следовательно функция $F(x)$ является первообразной для функции $k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)$, то есть

$$\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))\, dx = F(x) =$$

$$= k_1 \int f_1(x)\, dx + k_2 \int f_2(x)\, dx. \blacktriangleleft$$

Мы уже говорили, что операция интегрирования функции обратна по отношению к операции дифференцирования, поэтому всякая формула вида $F'(x) = f(x)$ может быть обращена, то есть получена формула

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Используя это соотношение, получим таблицу неопределенных интегралов от основных элементарных функций

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$	6. $\int e^x dx = e^x + C,$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C,$	7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$
3. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctgx + C},$	8. $\int \cos x\, dx = \sin x + C'$
4. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C,$	9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctgx + C},$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,$	10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tgx + C}.$

Справедливость этих формул проверяется дифференцированием. Далее рассмотрим основные методы интегрирования функций.

26.2 Основные методы интегрирования

Интегрирование заменой переменной

Изложим один из важнейших методов интегрирования функций – метод замены переменной или подстановки.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $x = \varphi(t)$ определены на некоторых промежутках и имеет смысл сложная функция $f(g(t))$. Если функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема, а функция $f(x)$ имеет первообразную

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ имеет первообразную на соответствующем промежутке, причем

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{1}$$

► Первообразная функция $F(x)$ определена и дифференцируема на том же промежутке, что и функция $f(x)$, причем $F'(x) = f(x)$.

Сложная функция $F(\varphi(t))$ дифференцируема как композиция двух дифференцируемых функций. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'_x \cdot x'_t = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

То есть функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$. Отсюда следует формула (1). ◄

Формулу (1) можно переписать в виде

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx + C, \tag{2}$$

при $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$.

В зависимости от конкретной задачи, формулу (2) можно использовать двумя способами. Первый способ, называемый методом замены переменной, состоит в том, что интеграл справа в (2) заменой переменной $x = \varphi(t)$ сводится к вычислению интеграла слева. Второй способ, называемый методом подстановки, сводит вычисление интеграла слева в (2) подстановкой $t = \varphi^{-1}(x)$ к вычислению интеграла справа.

Примеры.

1. $\int(6x^2 - 3x + 5)\,dx = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C.$

2. $\int \dfrac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \dfrac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$
$= \int(x^{7/6} - x^{1/6})\,dx = \frac{6}{13}x^{13/6} - \frac{6}{7}x^{7/6} + C.$

3. $\int \dfrac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C.$

4. $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n} = \dfrac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C.$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \dfrac{d(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C.$

6. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C.$

7. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\left[\int \dfrac{dx}{x-a} - \int \dfrac{dx}{x+a}\right] = \dfrac{1}{2a}\,\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C.$

8. $\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int \sin^3 x\, d(\sin x) = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + C.$

9. $\int \sin^3 x\, dx = -\int \sin^2 x\, d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)\, d(\cos x) =$
$= -\int (1-t^2)\, dt = -t + \frac{1}{3}t^3 + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C.$

10. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$; $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\, dt$;
$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int a^2\cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}a^2 \int (1+\cos 2t)\, dt =$
$= \frac{1}{2}a^2(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C = \dfrac{1}{2}a^2(t + \sin t\cos t) + C =$
$= \dfrac{1}{2}a^2\left(\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{a}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\right) + C = \dfrac{1}{2}a^2\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.$

Чтобы вернуться к старой переменной x, использовали обратную функцию $t = \arcsin(x/a)$, полагая $|x| \le a$, $|t| \le \pi/2$.

Метод интегрирования по частям

Теорема 2. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на некотором промежутке X и существует интеграл $\int v(x)\, du$, тогда существует и интеграл $\int u(x)\, dv$, равный

$$\int u(x)\, dv = u(x)v(x) - \int v(x)\, du. \tag{1}$$

► По правилу дифференцирования произведения

$$d(uv) = v\, du + u\, dv.$$

Отсюда получим

$$u\, dv = d(uv) - v\, du. \tag{2}$$

Интеграл от правой части равенства (2) существует, поэтому существует и интеграл от левой части. Проинтегрировав (2), получим формулу (1). ◄

С помощью формулы (1) вычисляются многие интегралы. В левой части формулы (1) заданы функция $u(x)$ и дифференциал dv, поэтому функция $v(x)$ определяется неоднозначно. Обычно берут наиболее простое выражение. Хотя метод интегрирования по частям имеет более узкую область применения, чем метод замены переменной, но есть целые классы интегралов, которые вычисляются с помощью этого метода. В частности этим методом вычисляются интегралы вида

$$\int P(x)\, \ln^m x\, dx, \quad \int P(x)\, e^{ax}\, dx, \quad \int P(x)\, (\sin bx, \cos bx)\, dx,$$

где $P(x)$ – полином.

Примеры.

1. $J = \int x^3 \ln x\, dx. \quad u = \ln x,\ dv = x^3 dx,\ du = \dfrac{dx}{x},\ v = \dfrac{1}{4}x^4.$

$J = \dfrac{1}{4}x^4 \ln x - \int \dfrac{1}{4}x^4 \dfrac{dx}{x} = \dfrac{1}{4}x^4 \ln x - \dfrac{1}{16}x^4 + C.$

2. $J = \int \mathrm{arctg} x\, dx; \quad u = \mathrm{arctgx},\ dv = dx,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = x.$

$J = x\,\mathrm{arctg} x - \int \dfrac{x\,dx}{1+x^2} = x\,\mathrm{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

3. $J = \int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\, dx = -x^2 \cos x +$
$+ 2x \sin x - \int 2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$

4. $J_1 = \int e^{ax} \cos bx\, dx, \qquad J_2 = \int e^{ax} \sin bx\, dx.$

Применим метод интегрирования по частям
$u = (\cos bx, \sin bx),\ dv = e^{ax}\, dx,\ v = \dfrac{1}{a}\, e^{ax}.$

$J_1 = \dfrac{1}{a}\, e^{ax} \cos bx + \dfrac{b}{a}\, J_2, \quad J_2 = \dfrac{1}{a}\, e^{ax} \sin bx - \dfrac{b}{a}\, J_1$; отсюда найдем
$J_1 = \dfrac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C_1, \quad J_2 = \dfrac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2}\, e^{ax} + C_2.$

Лекция 27. Интегрирование рациональных функций

27.1. Интегрирование рациональных функций

Мы познакомились с элементарными приемами вычисления неопределенных интегралов. Эти приемы не дают точных указаний как вычислять интеграл, здесь многое зависит от искусства вычислителя. В этом и других параграфах мы остановимся на некоторых важных классах функций и по отношению к ним установим вполне определенные правила вычисления.

Мы рассмотрели класс элементарных функций и установили, что все они дифференцируемы и производные принадлежат к тому же классу. Иначе обстоит дело с интегралами, часто оказывается, что интегралы от элементарных функций к этому классу не принадлежат. Примеры таких функций

$$\int e^{-x^2}\,dx,\ \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int \frac{\cos x}{x}\,dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},\ \int \sin x^2\,dx,\ \int \cos x^2\,dx$$

и другие. Важно подчеркнуть, что интегралы от этих функций реально существуют, но они представляют собой функции, которые не принадлежат к классу элементарных.

Известны сравнительно немногие классы функций, для которых интегрирование может быть выполнено в конечном виде. На первое место среди них нужно поставить класс рациональных функций

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \tag{1}$$

где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно. Если $n \geq m$, то дробь называют правильной, путем деления рациональную дробь всегда можно представить как сумму многочлена и правильной дроби. Поэтому дальше займемся интегрированием правильных рациональных дробей.

В алгебре доказывается, что любая правильная дробь раскладывается на конечную сумму простых дробей вида

$$I.\,\frac{A}{x-a},\quad II.\,\frac{A}{(x-a)^k},\quad III.\,\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad IV.\,\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}.$$

где A, M, N, p, q – вещественные числа. Для дробей вида III и IV предполагается, что многочлен x^2+px+q не имеет вещественных корней, так что $p^2-4q<0$ всегда.

Дроби вида I и II мы уже умеем интегрировать

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,\quad \int \frac{dx}{(x-a)^k} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Для вычисления интегралов от дробей вида III и IV преобразуем выражение

$$x^2+px+q = (x+\frac{1}{2}\,p)^2 + (q-\frac{1}{4}\,p^2),$$

последнее слагаемое есть число положительное.

Обозначим $q - \frac{1}{4}p^2 = a^2$ и сделаем подстановку:

$x + \frac{1}{2}p = t$, $dx = dt$, $x^2 + px + q = t^2 + a^2$, $Mx + N = Mt + (N - \frac{1}{2}Mp)$.

В случае III будем иметь

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{Mt + (N - 1/2Mp)}{t^2+a^2}\,dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2}M \ \ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}(N - \frac{1}{2}Mp)\,\mathrm{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Вернемся к исходным обозначениям

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{1}{2}M \ \ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\,\mathrm{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Для четвертого случая та же подстановка дает

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \int \frac{Mt + (N - 1/2Mp)}{(t^2+a^2)^k}\,dt \ =$$

$$= \ \frac{1}{2}M \int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^k} + (N - \frac{1}{2}Mp) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Первый интеграл легко вычисляется подстановкой: $t^2 + a^2 = u$, $2tdt = du$,

$$\int \frac{2t\,dt}{(t^2+a^2)^k} = \int \frac{du}{u^k} = \frac{u^{1-k}}{1-k} + C = \frac{(t^2+a^2)^{1-k}}{1-k} + C.$$

Второй интеграл можно вычислить по рекуррентной формуле. Обозначим

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}, \quad n = 1, 2, ...$$

Применим метод интегрирования по частям

$$u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}, \quad dv = dx; \quad du = -\frac{2nx\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}, \quad v = x.$$

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\,I_n - 2na^2\,I_{n+1}.$$

Отсюда

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\,I_n.$$

В частности

$$I_1 = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a}, \quad I_2 = \frac{1}{2a^2}\,\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{a}.$$

Таким образом, можно вычислить интеграл I_n при любом n.

Итак, мы умеем интегрировать простые дроби. Чтобы интегрировать любую правильную дробь, нужно разложить ее на простые. Это связано с разложением знаменателя дроби (1) – многочлена $Q(x)$ на простые множители. Известно, что каждый многочлен разлагается и притом единственным образом на множители типа $(x-a)$ и (x^2+px+q), квадратичные множители не имеют вещественных корней и потому не разлагаются на линейные множители.

Схематически разложение многочлена $Q(x)$ на простые множители записывается в виде

$$Q(x) = (x-a)^k \cdot ... \cdot (x^2+px+q)^m \cdot ...,$$

де $k, m, ...$ – натуральные числа. В алгебре установлено, что каждому множителю вида $(x-a)^k$ в разложении знаменателя правильной дроби отвечает группа из k простых дробей

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}, \tag{2}$$

а каждому множителю $(x^2+px+q)^m$ – группа из m простых дробей

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_mx+N_m}{(x^2+px+q)^m}, \tag{3}$$

Зная разложение многочлена $Q(x)$ на простые множители, мы знаем знаменатели простых дробей, на которые разлагается данная дробь (1).

Для определения коэффициентов простых дробей используют метод неопределенных коэффициентов, то есть пишут простые дроби с неизвестными буквенными коэффициентами в виде (2), (3), затем приводят их к общему знаменателю – им будет многочлен $Q_n(x)$. После этого приравнивают коэффициенты в числителях дробей слева и справа – многочлена $P_m(x)$. Из полученной системы n алгебраических уравнений и определяют неизвестные коэффициенты.

Отметим, что интеграл от любой рациональной функции выражается в конечном виде с помощью рациональной же функции, логарифма и арктангенса.

Пример. Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{x^3+1}$,

$$R(x) = \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1},$$

$A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) = 1$,

$A+B=0$, $-A+B+C=0$, $A+C=1$.

Отсюда находим: $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$.

$$J = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\int\frac{(2x-1)-3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

27.2 Интегрирование тригонометрических выражений

Мы установили, что интеграл от любой рациональной дроби представляет собой элементарную функцию. Дальше рассмотрим другие классы функций, интегрируемые в элементарных функциях. Как правило, мы будем посредством подстановок сводить рассматриваемые функции к интегралу от рациональной дроби.

Символом $R(x, y)$ обозначим рациональную функцию от двух аргументов x и y. В этом параграфе мы докажем интегрируемость в элементарных функциях любой функции вида

$$R\,(\sin x, \cos x). \tag{1}$$

Интеграл от такой функции приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой вида $t = \mathrm{tg}(x/2)$, $-\pi < x < \pi$. Действительно,

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2(x/2)}{1+\mathrm{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\mathrm{arctg}\, t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \text{ так что}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В правой части стоит интеграл от рациональной дроби. Хотя рассмотренная подстановка и является универсальной, вычисление полученного интеграла от рациональной функции часто приводит к громоздким выкладкам. В связи с этим мы рассмотрим несколько частных случаев, когда исходный интеграл можно свести к интегралу от рациональной функции более простой подстановкой.

Отметим два простых свойства рациональных функций от двух аргументов.
1. Если $R\,(-u, v) = R\,(u, v)$, то функцию можно привести к виду $R\,(u, v) = R_1(u^2, v)$, где R_1 – рациональная функция.
2. Если $R\,(-u, v) = -R\,(u, v)$, то функция приводится к виду $R(u, v) = R_2(u^2, v)\cdot u$, где R_2 – рациональная функция. Свойство 2 следует из свойства 1, если применить его к функции $R\,(u, v)/u$.

Используя эти свойства, преобразуем функцию $R\,(\sin x, \cos x)$.
1) Пусть функция $R\,(\sin x, \cos x)$ меняет знак при изменении знака синуса, тогда по свойству 2

$$R\,(\sin x, \cos x)\, dx = R_2(\sin^2 x, \cos x)\, \sin x\, dx =$$

$$= -R_2(1-\cos^2 x, \cos x)\, d(\cos x).$$

Подстановка $t = \cos x$.

2) Пусть функция $R(\sin x, \cos x)$ меняет знак при изменении знака косинуса, тогда по свойству 2

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = R_2(\sin x, \cos^2 x)\, \cos x\, dx =$$
$$= R_2(\sin x, 1 - \sin^2 x)\, d(\sin x).$$

Подстановка $t = \sin x$.

3) Пусть функция $R(\sin x, \cos x)$ не меняет знак при одновременном изменении знака синуса и косинуса, тогда

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = R\left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x, \cos x\right)\, dx =$$
$$= R_1(\operatorname{tg} x, \cos x)\, dx = R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)\, dx,$$

(по свойству 1).

$$R(\sin x, \cos x)\, dx = R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right)\, dx.$$

$$\text{Подстановка } t = \operatorname{tg} x : dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx,\ dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Замечание. Выражение $R(u, v)$ всегда может быть представлено в виде суммы трех слагаемых рассмотренного типа

$$2R(u, v) = [R(u, v) - R(-u, v)] +$$
$$+ [R(-u, v) - R(-u, -v)] + [R(-u, -v) + R(u, v)].$$

Первое слагаемое меняет знак при изменении знака u, второе слагаемое меняет знак при изменении знака v, третье слагаемое не меняет знак при одновременном изменении знака u и v. Таким образом, для вычисления интеграла от функции типа $R(\sin x, \cos x)$ достаточны эти три случая.

Примеры.

1) $I = \int \dfrac{\sin x\, dx}{1 + \sin^2 x}$. Функция меняет знак при изменении знака $\sin x$, Подстановка $t = \cos x$, $dt = -\sin x\, dx$.

$$I = \int \frac{dt}{t^2 - 2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, \ln\left|\frac{t + \sqrt{2}}{t - \sqrt{2}}\right| = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\, \ln\left|\frac{\cos x + \sqrt{2}}{\cos x - \sqrt{2}}\right| + C.$$

2)$I = \int \dfrac{\sin x \cos x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$. Функция не меняет знак при одновременном изменении знака у $\sin x$ и $\cos x$. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$, $dt = dx/\cos^2 x$.

$$I = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^4 x + 1} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{t\, dt}{1 + t^4} = \frac{1}{2} \int \frac{dt^2}{1 + t^4} =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t^2 + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

Лекция 28. Подстановки Эйлера

28.1 Интегрирование выражений, содержащих радикалы

В основе метода лежит выбор таких подстановок $t = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ выражается через элементарные функции, которые привели бы подынтегральную функцию к рациональному виду. В этом параграфе мы докажем интегрируемость в элементарных функциях любой функции вида

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \quad ad-bc \neq 0. \tag{1}$$

Положим $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, тогда $x = -\dfrac{dt^n-b}{ct^n-a}$, $dx = \dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt$, так что

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right) \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\,dt.$$

Интеграл справа является интегралом от рациональной дроби, вычислив его, вернемся к переменной x.

Пример. $I = \int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \dfrac{dx}{1-x}$.

Положим $t^2 = \dfrac{1+x}{1-x}$, тогда $x = \dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \dfrac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}$. Получим

$I = 2\int \dfrac{t^2dt}{t^2+1} = 2t - 2\int \dfrac{dt}{t^2+1} = 2t - 2\mathrm{arctg}\, t + C =$

$= 2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - 2\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + C.$

К интегралам рассмотренного вида сводятся и более общие выражения

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q, \ldots\right) dx,$$

где p, q, $\ldots$ – рациональные числа. Нужно привести все показатели к общему знаменателю и тогда получим функцию рассмотренного вида.

28.2 Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальным дифференциалом называют выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p dx, \tag{2}$$

где a, b – вещественные числа; m, n, p – рациональные числа.

Рассмотрим три случая, когда интеграл от биномиального дифференциала сводится к рациональной функции.

1^0. Если p – целое число, то биномиальный дифференциал представляет собой иррациональность вида $R\,(x, \sqrt[r]{x})\,dx$, где r – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n. Подстановка $t=\sqrt[r]{x}$ рационализирует интеграл от биномиального дифференциала.

2^0. Второй случай соответствует целому $(m+1)/n$. Сделав подстановку $z=x^n$ и обозначив $q=\dfrac{m+1}{n}-1$ – целое число, будем иметь

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int(a+bz)^p z^q\,dz. \qquad (3)$$

Подынтегральное выражение имеет вид $R\,(z,\sqrt[s]{a+bz})\,dz$, где s – знаменатель рационального числа p, и сводится к рациональной функции подстановкой $t=\sqrt[s]{a+bz}=\sqrt[s]{a+bx^n}$.

3^0. Третий случай соответствует целому числу $(p+q)$. Перепишем интеграл (3) так

$$\frac{1}{n}\int\left(\frac{a+bz}{z}\right)^p z^{p+q}\,dz.$$

При $(p+q)$ целом, мы имеем выражение уже изученного вида $R\left(z,\sqrt[s]{\dfrac{a+bz}{z}}\right)$, где s – знаменатель p. Оно приводится к рациональной функции подстановкой $t=\sqrt[s]{(a+bz)/z}=\sqrt[s]{ax^{-n}+b}$.

Три рассмотренных случая интегрируемости, по существу, были известны еще Ньютону. Однако лишь в XIX веке П.Л. Чебышев доказал, что других случаев интегрирования биномиальных дифференциалов в элементарных функциях нет.

Примеры.

1). $I=\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx=\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}\,dx.$

Здесь $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{4}$, $p=\dfrac{1}{3}$. Так как $\dfrac{m+1}{n}=2$, то имеем второй случай интегрируемости. Заметив, что $s=3$, положим

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}},\quad x=(t^3-1)^4,\quad dx=12t^2(t^3-1)^3\,dt,$$

$I=12\int\dfrac{t}{(t^3-1)^2}\cdot t^2(t^3-1)^3\,dt=12\int t^3(t^3-1)\,dt=\dfrac{12}{7}t^7-3t^4+C.$

2). $I=\int\dfrac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}}=\int x^{-2}(a+bx^2)^{-1/2}dx.$

Здесь $m=-2$, $n=2$, $p=-1/2$, так что $q=\dfrac{m+1}{n}-1=-\dfrac{3}{2}$, $p+q=-2$, имеем третий случай интегрируемости. Положим $t=\sqrt{ax^{-2}+b}$, тогда

$$t^2=ax^{-2}+b,\quad x=\sqrt{\frac{a}{t^2-b}},\quad dx=-\sqrt{\frac{a}{(t^2-b)^3}}\,tdt.$$

$I=-\int\left(\dfrac{t^2-b}{a}\right)^{3/2}\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{a}{(t^2-b)^3}\right)^{1/2}tdt\ =$

$=\ -\int\dfrac{1}{a}\,dt=-\dfrac{t}{a}+C=-\dfrac{\sqrt{a+bx^2}}{ax}+C.$

28.3 Интегрирование посредством подстановок Эйлера

Мы рассмотрим важный класс интегралов
$$I = \int R\,(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \quad a, b, c - \mathrm{const} \tag{1}$$
Предполагается, что многочлен ax^2+bx+c не имеет равных корней, иначе R будет рациональной функцией. Мы изучим три подстановки, называемые подстановками Эйлера, с помощью которых всегда можно свести функцию R к рациональной.

1 подстановка. Пусть квадратный трехчлен $y^2 = ax^2+bx+c$ не имеет вещественных корней, тогда его знак совпадает при всех x со знаком a и поскольку выражение должно быть положительным, то $a > 0$. Первая подстановка Эйлера как раз и применима в случае $a > 0$. Положим
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \mp \sqrt{a}x. \quad (2)$$
Можно также взять любой знак. Возведя равенство (2) в квадрат, найдем
$$bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}\,xt, \quad x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$
Если подставить полученные выражения в интеграл (1), то задача сводится к интегрированию рациональной функции от t. Смысл Эйлеровой подстановки в том, что для x получается линейное уравнение, так что x, а вместе с ним и радикал выражаются рационально через t.

2 подстановка. Используется в случае, если $c > 0$. В этом случае можно положить
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}. \quad (3)$$
Здесь также можно брать любой знак, далее возьмем верхний. Возведем равенство (3) в квадрат, в результате получим снова линейное уравнение для x
$$ax+b = xt^2 + 2\sqrt{c}\,t, \quad x = \frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2},$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{a-t^2}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}t^2-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\,dt.$$
Подставив эти выражения в (1), получим интеграл от рациональной функции переменной t. Отметим, что второй случай сводится к первому, если сделать замену переменной $x = 1/z$.

3 подстановка. Применяется, когда многочлен ax^2+bx+c имеет два различных вещественных корня x_1 и x_2. Тогда
$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$
Интеграл (1) рационализируется подстановкой
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1).$$
Возводя в квадрат и сокращая на множитель $(x-x_1)$, получим
$$a(x-x_2) = t^2(x-x_1), \quad x = \frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_1-x_2)\,t}{t^2-a}, \quad dx = \frac{2a(x_2-x_1)t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$
Задача сведена к интегрированию рациональной функции от t.

Замечание. Выражение радикала запишем в виде
$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}.$$
Так что в рассматриваемом случае $R\,(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R_1\left(x, \sqrt{a\dfrac{x-x_2}{x-x_1}}\right)$.
И мы имеем дело с интегралом уже изученного типа. Третья подстановка Эйлера, которую можно записать в виде $t = \sqrt{a(x-x_2)/(x-x_1)}$, тождественна с уже указанной раньше подстановкой.

Примеры.
1) $\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$. Трехчлен x^2+x+1 имеет комплексные корни, сделаем первую подстановку $\sqrt{x^2+x+1} = t-x$. Возведя в квадрат обе части равенства, получим
$$x = \frac{t^2-1}{2t+1}, \quad dx = 2\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2}\,dt, \quad t = x+\sqrt{x^2+x+1};$$
$I = 2\int \dfrac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}\,dt = \int \left[\dfrac{2}{t} - \dfrac{3}{2t+1} - \dfrac{3}{(2t+1)^2}\right]\,dt\ =$
$=\ 2\ln|t| - \dfrac{3}{2}\ln|2t+1| + \frac{1}{2}\dfrac{3}{2t+1} + C = \ldots$
2) $I = \int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.
Применим к интегралу подстановки Эйлера.
а) Сначала третью подстановку: $\sqrt{a^2-x^2} = t(a-x)$. Тогда
$$x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4at\,dt}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{a^2-x^2} = \frac{2at}{t^2+1};$$
$$I = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\mathrm{arctg}\,t + C = 2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C.$$
Так как имеет место тождество $2\mathrm{arctg}\,\dfrac{a+x}{a-x} = \dfrac{\pi}{2} + \arcsin\dfrac{x}{a}$, то результаты совпадают.
б) Если применить вторую подстановку $\sqrt{a^2-x^2} = xt-a$, то
$$I = -2\int \frac{dt}{t^2+1} = -2\mathrm{arctg}\,t + C = -2\mathrm{arctg}\,\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C.$$
В точке $x=0$ функция справа не определена, пределы справа и слева различны при $x \to \pm 0$, они равны $\mp\pi$, соответственно. За счет выбора постоянной C для промежутков $(-a,0)$ и $(0,a)$ можно сделать функцию справа непрерывной в точке $x=0$.

Один частный случай функции $R\,(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$

Обозначим $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$; $P_n(x)$, $Q_{n-1}(x)$ – многочлены, λ – число. Имеет место равенство

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\,dx = Q_{n-1}(x)\,y + \lambda \int \frac{dx}{y}, \qquad (1)$$

многочлен $P_n(x)$ задан, коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ подлежат определению. Чтобы их найти, продифференцируем равенство (1) по x

$$\frac{P_n(x)}{y} = Q'_{n-1}(x)\,y + Q_{n-1}(x)\,y' + \lambda\frac{1}{y},$$

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\,y^2 + Q_{n-1}(x)\,yy' + \lambda. \quad (2)$$

Подставим в (2) выражения $y^2 = ax^2+bx+c, \quad 2yy' = 2ax+b:$

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\,(ax^2+bx+c) + Q_{n-1}(x)\,(ax+0,5b) + \lambda. \quad (3)$$

Положим

$$P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0,$$

$$Q_{n-1}(x) = q_{n-1}x^{n-1} + p_{n-2}x^{n-2} + \cdots + q_1 x + q_0,$$

и подставим эти выражения в (3). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов λ и q_k, $k=\overline{0, n-1}$.

Пример. $I = \int \dfrac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$. Подстановкой $x = 1/t$ преобразуем интеграл и применим формулу (1)

$$I = -\int \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^2+1}} = -(q_1 t + q_0)\sqrt{t^2+1} - \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Продифференцируем это равенство по t и результат умножим на $\sqrt{t^2+1}$

$$t^2 = q_1(t^2+1) + (q_1 t + q_0)\,t + \lambda.$$

Отсюда найдем: $q_0 = 0$, $q_1 = 1/2$, $\lambda = -1/2$. Тогда

$$I = -\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+1} + \frac{1}{2}\ln|\,t+\sqrt{t^2+1}| = -\frac{2}{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{|\,x|} + C.$$

Лекция 29. Определенный интеграл

29.1 Вычисление площади криволинейной трапеции

Определение 1. Разбиением Q отрезка $[a,b]$ называется конечная система точек x_i, $i = \overline{0,n}$, этого отрезка такая, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$ называются отрезками разбиения. Максимальная из длин этих отрезков называется параметром разбиения Q, обозначается $\lambda(Q) = \max\limits_i(x_i - x_{i-1})$.

Определение 2. Говорят, что имеется разбиение (Q,ξ) с отмеченными точками отрезка $[a,b]$, если в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения Q выбрана точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$.

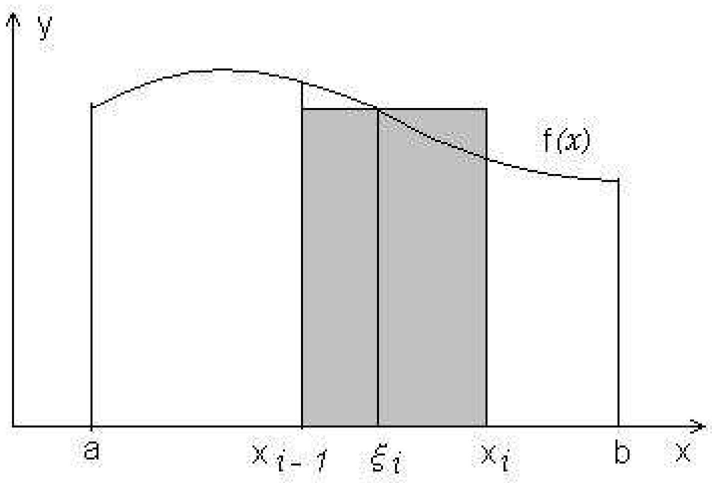


Рис. 1 Криволинейная трапеция

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$. Фигура на плоскости (x,y), ограниченная прямыми $x = a$ и $x = b$, осью x и кривой $y = f(x)$, называется криволинейной трапецией. Возьмем разбиение (Q,ξ) с отмеченными точками отрезка $[a,b]$ и через точки x_i проведем прямые параллельно оси y. Тогда криволинейная трапеция разделится на ряд полос (рис 1). В каждой полосе построим прямоугольник с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Площадь ступенчатой фигуры, состоящей из всех прямоугольников, будет равна $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Этому же выражению приближенно равна площадь криволинейной трапеции

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \qquad (1)$$

Погрешность этого равенства стремится к нулю при $\Delta x_i \to 0$. За площадь криволинейной трапеции естественно принять предел суммы (1) при стремлении длин отрезков к нулю, то есть

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \lambda = \max_i \{\Delta x_i\}. \tag{2}$$

Мы воспользовались интуитивным представлением о площади, чтобы подойти к рассмотрению пределов сумм вида (2), которые исторически и были введены для вычисления площади. Однако само понятие площади нуждается в обосновании, если говорить о площади криволинейной трапеции, то оно вводится с помощью упомянутых пределов сумм.

Пределы (2) играют исключительно важную роль в математическом анализе и в разнообразных его приложениях.

29.2 Определение интеграла

Определение 1. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Возьмем произвольное разбиение отрезка с отмеченными точками (Q, ξ) и составим сумму:

$$\sigma(f, (Q, \xi)) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}. \tag{1}$$

Эта сумма называется интегральной суммой Римана для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Она зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_i.

Определение 2. Число J называется пределом интегральных сумм Римана σ при $\lambda = \max_i\{\Delta x_i\} \to 0$, если для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что все интегральные суммы с $\lambda < \delta$, независимо от способа разбиения (Q, ξ), удовлетворяют неравенству

$$|J - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i| < \varepsilon. \tag{2}$$

Определение 3. Если указанный предел интегральных сумм существует, он называется определенным интегралом Римана от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на $[a, b]$. Обозначение:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i, \tag{3}$$

a, b — нижний и верхний пределы интегрирования, $f(x)$ — подынтегральная функция, $f(x)dx$ — подынтегральное выражение, x — переменная интегрирования.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

► Если функция $f(x)$ неограничена на отрезке $[a, b]$, то для любого разбиения отрезка $[a, b]$ на части найдется хотя бы один отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, на котором функция $f(x)$ неограничена. Это значит, что за счет выбора точки $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ можно сделать величину $|f(\xi_k)\,\Delta x_k|$ сколь угодно большой. Тогда и интегральная сумма (1) будет сколь угодно большой по абсолютной величине для любого разбиения отрезка $[a, b]$. Значит конечного предела интегральных сумм при $\lambda \to 0$ не существует и функция $f(x)$ не интегрируема на $[a, b]$, что противоречит условию. Теорема доказана. ◄

Возникает вопрос, всякая ли ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ будет интегрируема? Ответ на него отрицательный. К примеру, рассмотрим функцию Дерихле $D(x)$ на отрезке $[a, b]$, значения которой в рациональных точках равны 1, а в иррациональных равны 0. Эта функция ограничена, но не интегрируема на $[a, b]$. Действительно, для любого разбиения (Q, ξ) со сколь угодно малым λ при рациональных точках ξ_i получим $\sigma = b - a$, а при иррациональных ξ_i будет $\sigma = 0$. Предела интегральных сумм σ не существует, и функция $D(x)$ не интегрируема.

29.3 Суммы Дарбу и интегралы Дарбу

Наряду с интегральными суммами Римана введем другие суммы, которые будут полезны при исследовании интегрируемых функций.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и Q — разбиение этого отрезка. Обозначим

$$M_k = \sup f(x), \quad m_k = \inf f(x), \quad \text{где}\, x \in [x_{k-1}, x_k].$$

Суммы

$$s\,(f, Q) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad S\,(f, Q) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \tag{1}$$

называются нижней и верхней интегральными суммами Дарбу функции $f(x)$ для данного разбиения Q отрезка $[a, b]$.

Очевидно, что для произвольного разбиения отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками (Q, ξ_i) выполняется неравенство

$$s\,(f, Q) \leqslant \sigma\,(f, (Q, \xi)) \leqslant S\,(f, Q). \tag{2}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то M_k и m_k есть наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на $[x_{k-1}, x_k]$.

При фиксированном разбиении Q отрезка $[a, b]$ суммы s и S определены однозначно, а сумма σ не определена однозначно, так как она зависит от выбора точек ξ_k. За счет выбора этих точек сумму σ можно сделать сколь угодно близкой к суммам s и S.

Лемма 1. Справедливы равенства:

$$s\,(f, Q) = \inf_{\xi} \sigma\,(f, (Q, \xi)), \quad S\,(f, Q) = \sup_{\xi} \sigma\,(f, (Q, \xi)). \tag{3}$$

► Докажем равенство для верхней суммы. Ввиду (2) достаточно доказать, что для любого $\varepsilon{>}0$ существует набор отмеченных точек ξ, для которого $S\,(f, Q) < \sigma\,(f, (Q, \xi)) + \varepsilon$. По определению чисел M_k найдется точка $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, в которой $M_k < f\,(\xi_k) + \varepsilon/(b-a)$ для каждого k. Для этого набора отмеченных точек $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k < \sum (f\,(\xi_k) + \frac{\varepsilon}{b-a})\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\,(\xi_k)\,\Delta x_k + \varepsilon.$$

Для нижней суммы равенство доказывается аналогично. ◄

Свойства сумм Дарбу

Свойство 1. Если разбиение Q' отрезка $[a, b]$ получено путем добавления точек деления к разбиению Q этого отрезка, то

$$s\,(f, Q) \leqslant s\,(f, Q') \leqslant S\,(f, Q') \leqslant S\,(f, Q). \tag{4}$$

► Разбиение Q' можно получить из разбиения Q путем последовательного добавления по одной точке деления. Поэтому свойство достаточно доказать для случая добавления одной точки. Пусть разбиение Q' получено из разбиения Q добавлением точки $x' \in [x_{k-1}, x_k]$. Обозначим через M'_k и M''_k верхние грани $f(x)$ на отрезках $[x_{k-1}, x']$ и $[x', x_k]$, а через $\Delta x'_k$ и $\Delta x''_k$ — длины отрезков, очевидно $\Delta x_k = \Delta x'_k + \Delta x'_k$. Если M_k — верхняя грань функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, то $M_k \geqslant M'_k$ и $M_k \geqslant M''_k$. Учитывая, что суммы $S\,(f, Q)$ и $S\,(f, Q')$ различаются лишь слагаемыми $M_k \Delta x_k$ и $M'_k \Delta x'_k + M''_k \Delta x''_k$, получим:

$$S\,(f, Q) - S\,(f, Q') = M_k \Delta x_k - M'_k \Delta x'_k - M''_k \Delta x''_k =$$

$$= \,(M_k - M'_k)\,\Delta x'_k + (M_k - M''_k)\,\Delta x''_k \geqslant 0,$$

то есть $S(f, Q') \leqslant S(f, Q)$. Аналогично доказывается неравенство $s\,(f, Q) \leqslant s(f, Q')$. Из этих двух неравенств следует (4).◄

Свойство 2. Для любых разбиений Q_1 и Q_2 отрезка $[a, b]$ нижняя сумма Дарбу не превосходит верхней:

$$s\,(f, Q_1) \leqslant S\,(f, Q_2).$$

► Возьмем третье разбиение Q отрезка $[a,b]$, полученное объединением точек деления разбиений Q_1 и Q_2. Так как разбиение Q можно получить из разбиения Q_1 добавлением точек деления Q_2 и наоборот, то по свойству 1 имеем:

$$s\,(f,Q_1)\leqslant s\,(f,Q)\leqslant S\,(f,Q)\leqslant S\,(f,Q_2),$$

Из этих неравенств получаем $s\,(f,Q_1)\leqslant S\,(f,Q_2)$.◄

Из свойства 2 следует, что множество $\{s(f,Q)\}$ нижних сумм Дарбу функции $f(x)$ для всевозможных разбиений Q отрезка $[a,b]$ ограничено сверху любой из сумм $S\,(f,Q)$, значит оно имеет конечную верхнюю грань $J_*=\sup\{s\,(f,Q)\}$. Аналогично множество $\{S(f,Q)\}$ верхних сумм Дарбу ограничено снизу любой из сумм $s(f,Q)$ и потому имеет конечную нижнюю грань $J^*=\inf\{S\,(f,Q)\}$.

Определение 2. Нижним и верхним интегралами Дарбу функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называют соответственно величины

$$J_*=\sup_Q\{s\,(f,Q)\},\quad J^*=\inf_Q\{S\,(f,Q)\}, \tag{5}$$

где нижняя и верхняя грани берутся по всевозможным разбиениям Q отрезка $[a,b]$.

Из этого определения и свойств сумм Дарбу следует, что

$$s\,(f,Q)\leqslant J_*\leqslant J^*\leqslant S\,(f,Q). \quad (6)$$

Действительно, если бы $J_*>J^*$, то существовало бы Q_1 такое, что $s\,(f,Q_1)>J^*$, следовательно существовало бы Q_2 такое, что $S\,(f,Q_2)<s\,(f,Q_1)$, что невозможно по свойству 2.

Лекция 30 Условия существования интеграла

30.1 Условия существования интеграла

С помощью сумм Дарбу сформулируем условие интегрируемости функции.

Теорема 1. Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0} (S\,(f, Q) - s\,(f, Q)) = 0. \tag{1}$$

► *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то есть существует интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma\,(f, (Q, \xi)). \tag{2}$$

По определению предела $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения (Q, ξ), удовлетворяющего условию $\lambda(Q) < \delta$, выполняется неравенство:

$$|\,\sigma - J| < \varepsilon\ \Leftrightarrow\ J - \varepsilon < \sigma < J + \varepsilon \tag{3}$$

при любом выборе отмеченных точек ξ_k в соответствующих промежутках. Суммы Дарбу $s\,(f, Q)$ и $S\,(f, Q)$ при заданном разбиении Q являются, согласно лемме 1, нижней и верхней гранями сумм Римана $\sigma\,(f, (Q, \xi))$ по ξ. Поэтому из (3) следует, что

$$J - \varepsilon \leqslant s\,(f, Q) \leqslant S\,(f, Q) \leqslant J + \varepsilon.$$

Таким образом, при $\lambda(Q) < \delta$ будет справедливо $S(f, Q) - s(f, Q) < 2\varepsilon$, что означает выполнение условия (1).

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и выполняется условие (1). Тогда из неравенства

$$s\,(f, Q) \leqslant J_* \leqslant J^* \leqslant S\,(f, Q)$$

и условия (1) ясно, что $J_* = J^*$. Обозначим $J = J_* = J^*$. Таким образом, для одного и того же разбиения Q отрезка $[a, b]$ имеем:

$$s\,(f, Q) \leqslant J \leqslant S\,(f, Q), \quad s\,(f, Q) \leqslant \sigma\,(f, (Q, \xi)) \leqslant S\,(f, Q). \tag{4}$$

Из неравенств (4) вытекает

$$|\,\sigma\,(f, (Q, \xi)) - J| \leqslant S\,(f, Q) - s\,(f, Q). \tag{5)}$$

Согласно условию (1) $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения (Q, ξ) отрезка $[a, b]$, у которого $\lambda < \delta$, будет верно неравенство $|\,S\,(f, Q) - s\,(f, Q)| < \varepsilon$, тогда из (5) получаем: $|\,\sigma\,(f, (Q, \xi)) - J| < \varepsilon$. Что и означает существование интеграла.◄

В дальнейшем будет полезна другая форма записи необходимого и достаточного условия интегрируемости функции $f(x)$:

Пусть M_k и m_k — верхняя и нижняя грани функции $f(x)$ на отрезке разбиения $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$. Колебание функции $f(x)$ на этом отрезке $\omega_k = M_k - m_k$ – неотрицательное число. Разность сумм Дарбу можно записать в форме:

$$S\left(f, Q\right) - s\left(f, Q\right) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \, \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k. \tag{6}$$

Следствие 1. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции (теорема 1) можно сформулировать иначе: для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = 0. \tag{7}$$

То есть $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого разбиения Q с $\lambda < \delta$ будет справедливо неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon. \tag{8}$$

В такой форме условие интегрирования применяется чаще всего.

30.2 Некоторые классы интегрируемых функций

Применим полученный нами признак к установлению некоторых классов интегрируемых функций.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на нем.

► Непрерывная на отрезке функция будет и равномерна непрерывна на нем. Это означает, что $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого разбиения Q с $\lambda < \delta$ колебание функции $f(x)$ на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$: $\omega_k < \varepsilon$, (следствие из теоремы Кантора). Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon (b - a).$$

То есть, условие интегрирования выполнено. ◄

Теорема 2. Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

► Пусть $f(x)$ возрастает на $[a, b]$, тогда ее колебание на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\omega_k = f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon/[f(b) - f(a)]$. Случай $f(a) = f(b)$ можно исключить, так как тогда $f(x) = \text{const}$ на $[a, b]$ и $f(x)$ интегрируема как непрерывная функция. Для любого разбиения отрезка $[a, b]$, у которого $\Delta x_k < \delta$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \delta \sum_{k=1}^{n} \omega_k = \delta[f(b) - f(a)] = \varepsilon.$$

Условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ выполнено. ◀

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется кусочно-непрерывной, если она имеет на этом отрезке только конечное число точек разрыва первого рода.

Теорема 3 Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

▶ Докажем, что для функции $f(x)$ на $[a, b]$ выполнено достаточное условие интегрирования. А именно, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого разбиения Q с $\lambda < \delta$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon. \tag{9}$$

Так как функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, то ее колебание также ограничено: $\omega(f, [a, b]) \leqslant C < \infty$, ограничены и колебания на отрезках разбиения: $\omega_k \leqslant C$. Сумму (9) представим в виде двух слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k = \sum{}' \omega_k \Delta x_k + \sum{}'' \omega_k \Delta x_k, \tag{10}$$

где отрезки первой суммы не содержат точек разрыва функции f, а отрезки второй суммы их содержат. Отметим, что число слагаемых суммы $\sum''$ не более 2p, где p — число точек разрыва. На отрезках $[x_{k-1}, x_k]$ первой суммы функция $f(x)$ непрерывна, а значит и равномерно непрерывна. Так как отрезков конечное число, то найдется такое число $\delta_1 > 0$ и разбиение Q с $\lambda(Q) < \delta_1$, что на каждом из отрезков с длиной $\Delta x_k < \delta_1$ будет $\omega_k < \varepsilon/[2(b - a)]$. Возьмем произвольное разбиение Q с $\lambda(Q) < \delta$, где $\delta = \min(\delta_1, \varepsilon/4pC)$, и оценим слагаемые суммы (10) для этого разбиения:

$$\sum{}' \omega_k \Delta x_k \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b - a) = \frac{\varepsilon}{2},\ \sum{}'' \omega_k \Delta x_k \leqslant 2pC \frac{\varepsilon}{4pC} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сложив эти неравенства, получим (9).◀

30.3 Свойства интегрируемых функций

1. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и функция $kf(x)$, где k — константа, также интегрируема на [a,b], причем

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

► Рассмотрим интегральную сумму Римана для функции $kf(x)$:

$$\sigma\,(kf, (Q, \xi)) = \sum_{i=1}^{n}(kf)(\xi_i)\Delta x_i = k\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = k\sigma\,(f, (Q, \xi)).$$

Переходя к пределу при $\lambda(Q) \to 0$, получим требуемый результат.◄

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то и функция $f(x)+g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

► Возьмем произвольное разбиение (Q, ξ) отрезка $[a, b]$ и составим интегральную сумму Римана:

$$\sum_{i=1}^{n}(f + g)(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i.$$

Перейдем к пределу при $\lambda(Q) \to 0$. Так как обе суммы справа имеют предел, то и сумма слева имеет предел. Отсюда и следует равенство (2).◄

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то и функция $|f(x)|$ интегрируема на $[a, b]$.

► Возьмем разбиение (Q, ξ) отрезка $[a, b]$. Так как для любых точек x' и x'' частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ будет справедливо неравенство:

$$|\,|\,f(x'')| - |\,f(x')||\leqslant |\,f(x'') - f(x')|,$$

то колебание $\overline{\omega}_k$ функции $|f(x)|$ не превосходит колебания ω_k функции $f(x)$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}\overline{\omega}_k\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k.$$

Так как функция $f(x)$ интегрируема, то правая, а значит и левая, суммы стремятся к нулю при $\lambda(Q) \to 0$. Что и требовалось доказать. ◄

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то и их произведение $f(x)g(x)$ интегрируемо на этом отрезке.

► Так как функции f, g интегрируемы на $[a, b]$, то они ограничены: $|f(x)| \leqslant F$, $|g(x)| \leqslant G$ для $\forall\ x \in [a, b]$, где F и G — константы. Для разбиения Q отрезка $[a, b]$ на частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольные точки x', x'' и рассмотрим разность:

$$f(x'')g(x'') - f(x')g(x') = [f(x'') - f(x')]g(x'') + [g(x'') - g(x')]f(x').$$

Очевидно, что

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leqslant G|f(x'') - f(x')| + F|g(x'') - g(x')|,$$

и потому

$$\omega_k(fg) \leqslant G\omega_k(f) + F\omega_k(g),$$

где $\omega_k()$ — колебания функций на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Отсюда получаем :

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f \cdot g)\Delta x_k \leqslant G\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)\Delta x_k + F\sum_{k=1}^{n} \omega_k(g)\Delta x_k.$$

Перейдем к пределу при $\lambda(Q) \to 0$. Так как обе суммы справа стремятся к нулю, то и сумма слева стремится к нулю.◄

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.

► Произведем разбиение отрезка $[c, d]$ на части с параметром λ и продолжим это разбиение на весь отрезок $[a, b]$ с тем же параметром λ. Тогда верно следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f, [c, d])\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f, [a, b])\Delta x_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получаем, что эти суммы стремятся к нулю. Отсюда следует, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c, d] \subset [a, b]$.◄

6. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Если изменить ее значение в конечном числе точек, то новая функция $f^*(x)$ также будет интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b f^*(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

► Произведем разбиение отрезка $[a, b]$ на части и составим суммы:

$$\sum_k \omega_k(f)\Delta x_k, \quad \sum_k \omega_k^*(f^*)\Delta x_k.$$

Вторая сумма отличается от первой конечным числом слагаемых (не более $2p$, где p — число точек, где изменены значения функции $f(x)$), и потому обе суммы стремятся к нулю при $\lambda \to 0$. Значит функция $f^*(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Равенство интегралов следует из того, что интегральные суммы Римана для этих функций могут различаться лишь конечным числом слагаемых, которые стремятся к нулю при $\lambda \to 0$, и потому пределы этих сумм при $\lambda \to 0$ совпадают.◄

Замечание. Из свойства 6 следует, что можно говорить об интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$ даже тогда, когда она не определена в конечном числе точек отрезка. В этих точках функцию $f(x)$ можно доопределить произвольным образом, новая функция $f^*(x)$ будет определена и интегрируема на всем отрезке. В силу свойства 6 величина интеграла не зависит от значений функции $f(x)$ в точках, где она не была определена.

Лекция 31 Свойства определенного интеграла

31.1 Свойства определенного интеграла

1. Линейность интеграла как функционала. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то и функция $k_1 f(x) + k_2 g(x)$, где k_1, k_2 — константы, интегрируема на $[a, b]$. При этом

$$\int_a^b (k_1 f(x) + k_2 g(x))dx = k_1 \int_a^b f(x)dx + k_2 \int_a^b g(x)dx. \tag{1}$$

► Результат следует из свойств 1 и 2 интегрируемых функций.◄

2. Аддитивность интеграла по промежутку. Пусть отрезок $[a, b]$ разделен точкой c на две части. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема и на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Обратно, если функция $f(x)$ интегрируема на этих отрезках, то она интегрируема и на отрезке $[a, b]$. Причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{2}$$

► Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то ее интегрируемость на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ вытекает из свойства 5 п. 10.6. Возьмем разбиение (Q, ξ) отрезка $[a, b]$ с параметром $\lambda(Q)$ так, чтобы точка c была точкой деления. Тогда каждое такое разбиение порождает разбиение отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$. Интегральную сумму Римана функции $f(x)$ на $[a, b]$ запишем в виде:

$$\sigma\left(f, [a, b]\right) = \sigma\left(f, [a, c]\right) + \sigma\left(f, [c, b]\right). \tag{3}$$

Справа стоят интегральные суммы Римана функции f на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\lambda(Q) \to 0$, в результате получим формулу (2). Так как в первом случае существуют все три предела в (3), а в обратном утверждении существуют оба предела справа, а значит и слева.◄

В заключение отметим следующее. Мы ввели понятие определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, предполагая, что $a < b$, то есть нижний предел интегрирования меньше верхнего. Если $a \geqslant b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Второе равенство естественно вытекает из первого, а первое равенство можно доказать. Отличие от рассматриваемого ранее случая $a < b$ будет состоять в том, что в интегральных суммах Римана величины $\Delta x_k < 0$ при $a > b$.

31.2 Свойства интегралов, выраженные неравенствами

1. Если неотрицательная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) \geqslant 0.$$

► Утверждение очевидно, так как все интегральные суммы Римана, а значит и их предел, не отрицательны.◄

2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ при любом $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

► Так как $g(x) - f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то утверждение вытекает из свойства 1. ◄

3. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, неотрицательна и тождественно не равна нулю, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

► По условию существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой $f(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, содержащий точку x_0, на котором $f(x) > 0$. Используя известные свойства интеграла, выполним следующие преобразования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_\alpha^\beta f(x)dx \geqslant m(\beta - \alpha) > 0,$$

где $m > 0$ — наименьшее значение функции $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$. ◄

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то и функция $|f(x)|$ интегрируема и имеет место неравенство:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.$$

► Интегрируемость функции $|f(x)|$ была доказана ранее. Неравенство вытекает из свойства интегральных сумм Римана:

$$|\sum_k f(\xi_k)\Delta x_k| \leqslant \sum_k |f(\xi_k)|\Delta x_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим требуемый результат.,◄

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и имеет место неравенство $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при любом $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

► Неравенство следует из свойства 2, примененного к функциям m, $f(x)$ и M. Можно также воспользоваться очевидным неравенством для интегральных сумм Римана:

$$m\sum_k \Delta x_k \leqslant \sum_k f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant M\sum_k \Delta x_k,$$

затем следует перейти к пределу при $\lambda \to 0$.◄

31.3 Теоремы о среднем значении интеграла

Теорема 1 (о среднем значении). Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и при любом $x \in [a,b]$ $m \leqslant f(x) \leqslant M$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a). \qquad (1)$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$. Можно взять

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

► По доказанному ранее свойству имеем:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(dx) \leqslant M.$$

Положив $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(dx)$, получаем (1). Обе части равенства (1) меняют знак при перестановке местами a и b, поэтому (1) справедливо и при $a > b$. ◄

Замечание. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своей нижней и верхней граней $m = \inf f(x), \quad M = \sup f(x)$. По теореме Больцано – Коши о промежуточном значении функции значение μ должно приниматься функцией $f(x)$ в некоторой точке $\xi \in [a,b]$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \qquad (2)$$

Ясен геометрический смысл этой формулы. Интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равен площади криволинейной трапеции, образованной графиком функции $y = f(x)$. Формула (2) означает, что эта площадь равна площади прямоугольника с основанием $(b-a)$ и высотой, равной некоторому среднему значению функции $f(\xi)$.

Теорема 2 (о среднем значении). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$ на $[a,b]$. Если функция $g(x)$ не меняет знак на $[a,b]$,тогда

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx, \tag{3}$$

где $m \leqslant \mu \leqslant M$.

▶ Пусть $g(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, тогда имеем:

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x).$$

Из этого неравенства и свойств интеграла получаем:

$$m \int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M \int_a^b g(x)dx. \tag{4}$$

Ввиду предположения о функции $g(x)$

$$\int_a^b g(x)dx \geqslant 0. \tag{5}$$

Если этот интеграл равен нулю, то одновременно и интеграл от произведения функций $f(x)$ и $g(x)$ равен нулю, тогда утверждение (3) очевидно. Пусть интеграл (5) отличен от нуля. Разделим на него все части неравенства (4), обозначив

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \Big/ \int_a^b g(x)\,dx = \mu.$$

Отсюда и получаем равенство (3). ◀

На самом деле ограничения $a < b$ и $g(x) \geqslant 0$ не влияют на результат: перестановка пределов и изменение знака функции $g(x)$ не нарушают равенство (3).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то формула (3) может быть переписана следующим образом:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx, \quad \text{где } \xi \in [a,b].$$

31.4 Интеграл с переменным верхним пределом

Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема и на отрезке $[a,x]$, где x — любое значение из $[a,b]$. Функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

называется определенным интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)$ является непрерывной функцией от x на этом отрезке.

► Возьмем точки x и $x+\Delta x$ на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Поэтому

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt. \qquad (2)$$

Поскольку функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, она ограничена на нем, то есть $m\leqslant f(x)\leqslant M$ для $\forall\ x\in[a,b]$ (в качестве чисел m и M можно взять нижнюю и верхнюю грани множества значений функции $f(x)$).
Применим к интегралу (2) теорему о среднем значении:

$$\Delta F(x)=F(x+\Delta x)-F(x)=\mu\Delta x, \qquad (3)$$

где $m\leqslant\mu\leqslant M$. Очевидно, что $\lim\Delta F=0$ при $\Delta x\to 0$. Это и означает непрерывность $F(x)$ в любой точке $x\in[a,b]$. ◄

Теорема 2. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и непрерывна в точке $x_0\in[a,b]$, то функция $F(x)$ дифференцируема в этой точке и $F'(x_0)=f(x_0)$.

► Используя теорему о среднем, приращение функции $F(x)$ в точке x_0 запишем в виде:

$$\Delta F(x_0)=F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\mu\Delta x,$$

где $m_0\leqslant\mu\leqslant M_0$ (m_0 и M_0 — нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на отрезке $[x_0,x_0+\Delta x]$).
Разделим равенство на Δx и перейдем к пределу

$$F'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\mu.$$

Следовательно функция $F(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Ввиду непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 имеем: для $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что при $|x-x_0|<\delta$ будет $f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$ для всех значений $x\in[x_0,x_0+\Delta x]$, $|\Delta x|<\delta$.
Отсюда получаем:

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m_0\leqslant\mu\leqslant M_0\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

Поэтому $|\mu-f(x_0)|<\varepsilon$. Тогда $F'(x_0)=\mu=f(x_0)$.

Если x_0 совпадает с a или b, вычисляется одностороняя производная. ◄

Мы получили важный результат. Если функция $f(x)$ непрерывна на всем промежутке $[a,b]$, то она интегрируема и результат теоремы приложим к любой точке $x \in [a,b]$: производная от интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции ($F'(x) = f(x)$) на отрезке $[a,b]$. Можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ всегда имеет первообразную на этом отрезке.

► Первообразной является, например, функция

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx. \quad ◄$$

Лекция 32 Формула Ньютона-Лейбница

32.1 Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 1. Если функция f(x) непрерывна на отрезке $[a, b]$ и функция $\Phi(x)$ является ее первообразной, то

$$\int_a^b f(x), dx = \Phi(b) - \Phi(a). \tag{1}$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

► Согласно теореме 2 §10 функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

является первообразной для функции $f(x)$ на $[a, b]$. Две первообразные одной функции $f(x)$ на $[a, b]$ могут отличаться только на константу, то есть $\Phi(x)+C = F(x)$ на $[a, b]$. При $x = a$: $\Phi(a) + C = 0$ и $C = -\Phi(a)$. Тогда

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Полагая здесь $x = b$, получим формулу (1).◄

Для краткости записи принято обозначение:

$$\Phi(x)|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Формула Ньютона-Лейбница дает эффективное средство для вычисления определенного интеграла от непрерывной функции. Для ряда простых классов функций мы умеем выражать первообразные в конечном виде через элементарные функции.

32.2 Интегрирование с помощью замены переменной

Формула Ньютона-Лейбница позволяет установить правило замены переменной под знаком определенного интеграла.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = g(t)$ есть непрерывно дифференцируемое отображение отрезка $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$ такое, что $g(\alpha) = a$ и $g(\beta) = b$. Тогда функция $f(g(t))g'(t)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt. \tag{2}$$

► Пусть $\Phi(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$. Так как функции $\Phi(x)$ и $x = g(t)$ дифференцируемы на соответствующих отрезках, то сложная функция $\Phi(g(t))$ дифференцируема на $[\alpha, \beta]$. По правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$\Phi'_t(g(t)) = \Phi'_x(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t).$$

То есть функция $\Phi(g(t))$ является первообразной для функции $f(g(t))g'(t)$, которая непрерывна как композиция и произведение непрерывных функций. По формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a), \quad \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt = \Phi(g(\beta)) - \Phi(g(\alpha)). \qquad (3)$$

По условию $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$. Тогда из двух равенств (3) получим формулу (2).◄

Замечание. Отметим важную особенность формулы (2) для определенного интеграла. При вычислении интеграла с помощью этой формулы мы не должны возвращаться к старой переменной x, как это делалось для неопределенного интеграла. Здесь в этом нет надобности, так как определенный интеграл есть число.

32.3 Метод интегрирования по частям

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то справедливо равенство:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (4)$$

$$\text{или } \int_a^b u\,dv = (uv)|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (5)$$

► Функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$, поэтому

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,dx = [u(x)v(x)]|_a^b$$

или

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]|_a^b.$$

Отсюда и следуют формулы (4) и (5).◄

Примеры.

1). $J = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Применим подстановку $x = a\sin t$. При $x = 0$ имеем $t = 0$, при $x = a$: $t = \pi/2$.

$J = \int_0^{\pi/2} a\cos t(a\cos t)\,dt = \dfrac{1}{2}a^2 \int_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)\,dt =$

$= \dfrac{1}{2}a^2(t + \dfrac{1}{2}\sin 2t)|_0^{\pi/2} = \dfrac{1}{4}\pi a^2.$

2). $J_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\, dx$. Будем интегрировать по частям:
$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -(\sin^{m-1} x \cos x)|_0^{\pi/2} +$
$+ \int_0^{\pi/2} \cos x (m-1) \sin^{m-2} x \cos x dx = (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cos^2 x dx.$
Заменим $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ и в результате получим:

$$J_m = (m-1)(J_{m-2} - J_m) \Rightarrow J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2}$$

— рекуррентная формула, сводящая интеграл J_m к интегралу J_0 или J_1:

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2}, \quad J_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Вопросы к экзамену первого семестра

1. Операции над множествами. Теорема двойственности.

2. Сравнение множеств. Две Леммы о счетных множествах.

3. Верхняя и нижняя грани числового множества. Теорема 1 о существовании верхней и нижней грани.

4. Лемма Коши - Кантора о вложенных отрезках.

5. Лемма Бореля - Лебега о конечном покрытии отрезка. Лемма Больцано - Вейерштрасса о предельной точке.

6. Теоремы Кантора о счетности рациональных чисел $\mathbf{Q}$ и несчетности вещественных чисел $\mathbf{R}$.

7. Числовая последовательность и предел. Единственность предела и ограниченность сходящейся последовательности.

8. Свойства сходящихся последовательностей: теоремы о трех последовательностях, о стабилизации знака, о предельном переходе в неравенстве.

9. Монотонные последовательности, Теорема 1 о пределе.
Лемма о вложенных отрезках для последовательностей.

10. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
Лемма 1 и свойства бесконечно малых последовательностей.

11. Свойства пределов при арифметических операциях.

12. Число "e" как предел последовательности.

13. Подпоследовательности, теорема Больцано-Вейерштрасса.

14. Критерий Коши сходимости последовательности.

15. Верхний и нижний пределы последовательности. Теорема 2 о существовании верхнего и нижнего пределов.

16. Определение предела функции по Гейне. Необходимое и достаточное условие существования предела.

17. Определение предела функции по Коши. Теорема о равносильности двух определений предела функции.

18. Свойства пределов функций.

19. Монотонные функции. Теорема 1 о монотонной функции на интервале и ее следствие.

20. Критерий Коши существования предела функции.

21. Сравнение функций, теорема об эквивалентных функциях.
Метод выделения главной части функции.

22. Некоторые важные пределы: $\lim(\sin x)/x = 1,\ x \to 0$ и другие.

23. Некоторые важные пределы: $\lim(1+x)^{1/x} = e,\ x \to 0$.

24. Непрерывность функций и точки разрыва. Локальные свойства функций, непрерывных в точке, теорема 1.

25. Теоремы о непрерывности функций при арифметических операциях и непре-

рывность сложной функции.
26. Теоремы Больцано-Коши для непрерывной на отрезке функции.
27. Теоремы Вейерштрасса для непрерывной на отрезке функции.
28. Признак непрерывности монотонной функции и следствие.
29. Обратные функции, теорема о существовании обратной функции.
30. Непрерывность основных элементарных функций.
31. Равномерная непрерывность функций, теорема Кантора о равномерной непрерывности.
32. Производная и дифференциал, условие дифференцируемости.
33. Правила дифференцирования при арифметических операциях.
34. Производная сложной функции.
35. Производная обратной функции.
36. Производные элементарных функций (не тригонометрических).
37. Производные тригонометрических функций.
38 Производные высших порядков.
39. Правило Лейбница для производной произведения функций.
40. Производная параметрически заданной функции.
41. Дифференциалы высших порядков, их неинвариантность.
42. Теоремы Ферма и Ролля.
43. Теоремы о конечных приращениях Лагранжа и Коши.
44. Формула Тейлора для многочлена и функции.
45. Формы остаточного члена Лагранжа и Коши, теорема 1.
46. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
47. Применение формулы Тейлора: разложение экспоненты, синуса, косинуса, бинома и логарифма.
48. Правило Лопиталя. Теоремы 1 и 2 (неопределенность 0 / 0).
49. Правило Лопиталя. Теорема 3 (неопределенность ∞/∞).
50. Признаки монотонности функции: теоремы 1 - 3.
51. Экстремумы функции, теоремы 1 - 3 и следствие.
52. Выпуклые функции, достаточное условие строгой выпуклости.
53. Точки перегиба функции, необходимое и достаточное условия перегиба.
54. Приближение непрерывной функции многочленом (теоремы Бернштейна и Вейерштрасса).
55. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
56. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства.
57. Интегрирование заменой переменной и интегрирование по частям.
58. Интегрирование рациональных функций.
59. Интегрирование биномиальных дифференциалов.
60. Интегрирование посредством подстановок Эйлера.

61. Определенный интеграл, геометрический смысл, необходимое условие интегрируемости функции.
62. Суммы Дарбу, их свойства 1 и 2.
63. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла (теорема 1).
64. Некоторые классы интегрируемых функций.
65. Свойства интегрируемых функций.
66. Свойства определенного интеграла.
67. Свойства интегралов, выраженные неравенствами.
68. Теоремы о среднем значении интеграла.
69. Интеграл с переменным верхним пределом.
70. Формула Ньютона - Лейбница. Интегрирование заменой переменной и по частям.

Список литературы

Основная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1,2. СПб: Лань, 2008.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Т.1,2. М.:МЦНМО, 2007.
3. Ильин В.А., Познях Э.Г. Основы математического анализа. Т.1,2. М.: Физматлит, 2009.
4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1,2,3. М: Юрайт, 2012.
5. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., 1973.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2009.
7. Макаров Б.М., Подкорытов А.Н. Лекции по вещественному анализу. СПб. 2011.
8. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д.,Чехлов В.И.,Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Т 1,2,3. М.: Физматлит, 2003.
9. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Т. 1,2,3. М.: Едиториал УРСС, 2001.
10. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 2009.

Дополнительная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2,3. СПб.: Лань. 2009.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1,2,5. Изд-во БХВ-Петербург. 2008.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит. 2001.
4. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Т.1,2. М.: Изд-во МГУ. 2001.
5. Рудин У. Основы математического анализа. СПб. Лань. 2002.
6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Т.1,2. Изд-во Проспект. 2006.
7. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука. 1967.
8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. СПб: Лань. 2008.
9. Очан С.Ю. Сборник задач по математическому анализу. М.: Просвещение. 1981.