ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Содержание лекций третьего семестра

Функции многих переменных. Экстремумы функций многих переменных, необходимое и достаточное условие экстремума. Геометрический смысл первого дифференциала и градиента. Однородные функции. Отображения, понятия предела и непрерывности. Теоремы Вейерштрасса и Кантора для отображений и теоремы о пределе и непрерывности композиции отображений. Дифференцируемые отображения. Дифференцирование композиции отображений.

Неявные функции многих переменных. Теоремы о неявных функциях, определяемых одним уравнением и системой уравнений. Теорема об обратном отображении. Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Теоремы о системах зависимых и независимых функций. Анализ экстремума функций многих переменных с помощью производных.

Кратные интегралы. Интеграл Римана по n - мерному промежутку. Необходимое условие интегрируемости. Множества меры Лебега нуль, примеры множеств меры нуль. Теорема Лебега о классе интегрируемых функций. Суммы Дарбу и их свойства. Интегралы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости Дарбу. Интеграл Римана по ограниченному множеству. Мера Жордана допустимого множества в $\mathbf{R}^n$, измеримые по Жордану множества. Свойства кратного интеграла Римана. Сведение кратного интеграла к повторному, теорема Фубини. Замена переменных в кратном интеграле. Несобственные кратные интегралы. Критерии существования кратных несобственных интегралов. Двойные и тройные интегралы: геометрическая интерпретация, сведение к повторным интегралам, замена переменных в двойном и тройном интегралах, полярные, цилиндрические и сферические координаты.

Криволинейные и поверхностные интегралы. Криволинейные интегралы первого и второго рода, условия существования и вычисление. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла от пути, связь с вопросом о точном дифференциале. Выражение площади в криволинейных координатах. Поверхности в $\mathbf{R}^n$, сторона и ориентация поверхности. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго типа, их вычисление, связь с двойными интегралами. Формула Гаусса - Остроградского. Формула Стокса. Элементы теории поля. Дивергенция и ротор вектора. Потенциальное и соленоидальное векторные поля.

Интегралы, зависящие от параметра. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Предельный переход под знаком интеграла, непрерывность интеграла по параметру. Дифференцирование и интегрирование интеграла по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости интеграла по параметру. Предельный переход и непрерывность интеграла по параметру. Интегрирование и дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Применение интегралов, зависящих от параметра, к вычислению некоторых интегралов. Интегралы Эйлера первого и второго рода.

Ряды Фурье и преобразование Фурье. Линейные евклидовы пространства. Обобщенные ряды Фурье. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные ортонормированные системы функций. Равенство Парсеваля. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции. Теорема о замкнутости тригонометрической системы функций и ее следствия. Интеграл Дирихле, принцип локализации. Теорема о равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье непрерывной и кусочно-дифференцируемой функции. Теорема Фейера об аппроксимации непрерывной функции. Почленное интегрирование и дифференцирование тригонометрического ряда Фурье. Разложение функции в ряд Фурье на произвольном отрезке. Преобразование Фурье, условия применимости.

Вопросы для подготовки к экзамену в третьем семестре

1. Экстремумы функции, теорема о необходимом условии экстремума и следствие.

2. Достаточное условие экстремума.

3. Однородные функции.

4. Отображения, определения предела и непрерывности. Теорема Вейерштрасса для непрерывного отображения компакта.

5. Теорема Кантора для непрерывного отображения компакта.

6. Теоремы о пределе и непрерывности композиции отображений.

7. Дифференцируемые отображения, теорема о дифференцировании композиции отображений.

8. Теорема о неявной функции двух переменных.

9. Теорема о неявной функции многих переменных.

10. Теорема о системе неявных функций.

11. Теорема об обратной функции.

12. Условный экстремум функции многих переменных.

13. Метод неопределенных множителей Лагранжа.

14. Теорема о независимости функций.

15. Интеграл Римана на n - мерном промежутке, необходимое условие интегрируемости.

16. Множества меры Лебега нуль, примеры таких множеств. Критерий интегрируемости Лебега (без доказательства).

17. Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости Дарбу.

18. Интеграл по множеству, Лемма.

19. Мера Жордана, ее геометрический смысл.

20. Теоремы о среднем для кратного интеграла (следствия, лемма и замечание).

21. Сведение кратного интеграла к повторному, теорема Фубини.

22. Некоторые следствия теоремы Фубини.

23. Замена переменных в кратном интеграле, постановка вопроса и формулировка теоремы.

24. Несобственные кратные интегралы: исчерпание множества, лемма.

25. Теоремы о признаках сходимости несобственного интеграла.

26. Двойные интегралы: объем цилиндрического бруса, сведение к повторному интегралу.

27. Сведение двойного интеграла к повторному.

28. Замена переменных в двойном интеграле, полярные координаты.

29. Тройные интегралы: вычисление массы тела, сведение к повторным интегралам.

30. Замена переменных в тройном интеграле, цилиндрические и сферические координаты.

31. Криволинейный интеграл 1 рода, его существование и вычисление.

32. Криволинейный интеграл 2 рода, теорема 1.

33. Формула Грина, теорема 1.

34. Условие независимости криволинейного интеграла от пути.

35. Необходимое и достаточное условие точного дифференциала.

36. Площадь поверхности, заданной явным уравнением.

37. Площадь поверхности, заданной параметрически.

38. Поверхностные интегралы первого типа, теорема 1.

39. Поверхностные интегралы второго типа, сведение к двойному.

40. Формула Гаусса - Остроградского, теорема 1.

41. Формула Стокса, теорема 1.

42. Дивергенция вектора и формула Гаусса - Остроградского.

43. Ротор вектора и формула Стокса.

44. Потенциальное и соленоидальное векторное поле.

45. Предельный переход и непрерывность интеграла. Теоремы 1, 2.

46. Дифференцирование и интегрирование интеграла по параметру.

47. Равномерная сходимость, критерий Коши и признак Вейерштрасса.

48. Признак равномерной сходимости Дирихле - Абеля.

49. Теорема 1 о предельном переходе по параметру в интеграле.

50. Непрерывность несобственного интеграла по параметру.

51. Интегрирование несобственного интеграла по параметру.

52. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру.

53. Интеграл Эйлера первого рода (бета - функция).

54. Интеграл Эйлера второго рода (гамма - функция).

55. Обобщенные ряды Фурье. Теорема 1 об экстремальных свойствах коэффициентов Фурье. Следствия 1 - 3.

56. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Теоремы 1 - 3.

57. Теорема Вейерштрасса о приближении функции тригонометрическими многочленами.

58. Теорема 3 о замкнутости тригонометрической системы функций и ее следствия.

59. Лемма Римана.

60. Принцип локализации (теорема Римана).

61. Условия сходимости ряда Фурье - теорема 1.

62. Условия сходимости ряда Фурье - теорема 2.

63. Теорема Фейера (о сходимости средних арифметических сумм).

64. Почленное интегрирование тригонометрического ряда Фурье.

65. Почленное дифференцирование тригонометрического ряда Фурье, лемма и теорема.

66. Интеграл Фурье, общее определение понятия.

67. Интеграл Фурье, теорема 1.

68. Преобразование Фурье.

ГЛАВА 17. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

17.9. Экстремумы функций многих переменных

Одним из важнейших применений дифференциального исчисления является его использование для отыскания и исследования экстремумов функций.

Определение 1. Пусть функция $f : E \to \mathbf{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$. Говорят, что функция f имеет локальный максимум (локальный минимум) во внутренней точке $x^{(0)} \in E$, если существует окрестность $U(x^{(0)} \subset E$ этой точки такая, что $f(x) \leq f(x^{(0)})$, $(f(x) \geq f(x^{(0)}))$, при $x \in U(x^{(0)})$. Если при $x \in U(x^{(0)}) \backslash x^{(0)}$ имеет место строгое неравенство $f(x) < f(x^{(0)})$, $(f(x) > f(x^{(0)}))$, то говорят, что функция f имеет в точке $x^{(0)}$ строгий локальный максимум (минимум).

Определение 2. Локальные максимумы (max) и минимумы (min) функции называются ее локальными экстремумами.

Теорема 1. (необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, ...x_n)$ определена в окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$ и имеет экстремум в этой точке. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ частные производные $\partial f / \partial x_i$, $(i = \overline{1, n})$, то они равны нулю.

► Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x_1) = f(x_1, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, определенную, в силу условий теоремы, в некоторой окрестности точки $x_1^{(0)}$ вещественной оси. В точке $x_1^{(0)}$ функция $\varphi(x_1)$ имеет локальный экстремум, и, поскольку $\varphi'(x_1^{(0)}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)})$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}) = 0$, если производная существует. Аналогично доказываются и остальные равенства $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}) = 0$.◄

Следствие 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, которая является точкой экстремума, то ее дифференциал в этой точке равен нулю: $df(x^{(0)}) = 0$.

► Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)}$, то в этой точке существуют все частные производные $\partial f / \partial x_i$, $(i = \overline{1, n})$, и, согласно доказанному, все они равны нулю, поэтому

$$df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} dx_i = 0. \quad ◄$$

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$. Если дифференциал функции $df(x^{(0)}) = 0$, то точка $x^{(0)}$ называется стационарной. Очевидно, что точка экстремума функции, в которой она дифференцируема, является стационарной. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Определение 4. Функция двух точек (векторов) n - мерного пространства $\mathbf{R}^n$ $x = (x_1, ...x_n)$, $y = (y_1, ...y_n)$ вида

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, x_i y_j$$

где b_{ij} - заданные числа, называется билинейной формой от x и y. Функция

$$A(x) = B(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

называется квадратичной формой. Если $a_{ij} = a_{ji}$, то квадратичная форма называется симметричной.

Определение 5. Симметричная квадратичная форма $A(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$ называется положительно (отрицательно) определенной на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, если для $\forall x \in X$, $x \neq 0$, $A(x) > 0$ (соответственно $(A(x) < 0)$). В противном случае квадратичная форма называется неопределенной.

Теорема 2 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)} \in \mathbf{R}^n$, которая является стационарной для функции $f(x)$. Если квадратичная форма

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) dx_i dx_j, \tag{1}$$

то есть второй дифференциал функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$, является положительно определенной (отрицательно определенной), то точка $x^{(0)}$ является точкой строго минимума (максимума) функции $f(x)$ в области $U(x^{(0)})$. Если квадратичная форма (1) является неопределенной, то в точке $x^{(0)}$ экстремума нет.

► Пусть $h \neq 0$ и $x^{(0)} + h \in U(x^{(0)})$. Напишем формулу Тейлора для функции $f(x)$ в точке $x^{(0)}$ с остаточным членом Пеано

$$\Delta f(x^{(0)}) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) h_i h_j + o(\|h\|^2) \tag{2}$$

при $h \to 0$. Представим (2) в виде

$$\Delta f(x^{(0)}) = \frac{1}{2!}\|h\|^2 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)}) \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} + o(1)\right], \qquad (3)$$

где $o(1)$ есть величина бесконечно малая при $h \to 0$. Из формулы (3) видно, что знак разности $\Delta f(x^{(0)})$ полностью определяется знаком величины в квадратных скобках. Этой величиной теперь и займемся. Вектор $\dfrac{h}{\|h\|} = \left(\dfrac{h_1}{\|h\|}, ..., \dfrac{h_n}{\|h\|}\right)$, очевидно, имеет единичную норму. Квадратичная форма (1) непрерывна как функция h в $\mathbf{R}^n$, поэтому ее ограничение на единичную сферу $S(0,1)$ также непрерывно на $S(0,1)$. Но сфера есть замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, то есть компакт. Следовательно, форма (1) имеет на S точки глобального минимума и максимума, в которых оно принимает значения m и M.

Если форма (1) положительно определена, то $0 < m < M$ и поэтому найдется число $\delta > 0$ такое, что при $\|h\| < \delta$ будет $|o(1)| < m$. Тогда при $\|h\| < \delta$ квадратная скобка в (3) окажется положительной и, следовательно, $\Delta f(x^{(0)} > 0$ при $0 < \|h\| < \delta$. Таким образом, в этом случае точка $x^{(0)}$ оказывается точкой строгого локального минимума функции $f(x)$. Аналогично доказывается, что в случае отрицательно определенной формы (1) функция $f(x)$ имеет в точке $x^{(0)}$ строгий локальный максимум. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть квадратичная форма (1) принимает значения разных знаков в окрестности $U(x^{(0)})$. Докажем, что функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке $x^{(0)}$. Обозначим a и b те точки единичной сферы, в которых $A(a) = m$, $A(b) = M$ и пусть $m < 0 < M$. Положим $h = ta$, где t - достаточное малое положительное число, что $x^{(0)} + ta \in U(x^{(0)})$, из (3) находим

$$\Delta f(x^{(0)}) = \frac{1}{2!} t^2 (m + o(1)),$$

где $o(1) \to 0$ при $t \to 0$. Отсюда видно, что начиная с некоторого момента сумма $m + o(1)$ будет иметь знак m, то есть величина $\Delta f(x^{(0)})$ будет отрицательной. Аналогично, полагая $h = tb$, получим

$$\Delta f(x^{(0)}) = \frac{1}{2!} t^2 (M + o(1)).$$

Следовательно, при достаточно малых t приращение $\Delta f(x^{(0)})$ будет положительным. Таким образом, если квадратичная форма (1) на единичной сфере или, что равносильно, в $\mathbf{R}^n$ принимает значения разных знаков, то в любой окрестности точки $x^{(0)}$ найдутся точки, в которых значения функции $f(x)$ будут больше $f(x^{(0)})$, так и точки, в которых значения $f(x)$ будут меньше $f(x^{(0)})$. Следовательно, точка $x^{(0)}$ не является точкой локального экстремума функции $f(x)$. ◀

Сделаем несколько замечаний в связи с доказанной теоремой.

Замечание 1. Теорема 2 ничего не говорит о случае, когда квадратичная форма (1) полуопределена, то есть неотрицательная или неположительная. В этом случае точка $x^{(0)}$ может быть точкой локального экстремума, но может и не быть.

Замечание 2. После получения квадратичной формы (1), ее исследование на определенность можно провести с помощью критерия Сильвестра, известного из алгебры.

Для того, чтобы квадратичная форма

$$A(x) = A(x_1, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; ... \, , \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Замечая, что квадратичная форма $A(x)$ отрицательно определена, когда квадратичная форма $A(x) = A(x_1, ..., x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (-a_{ij}) x_i x_j$ положительно определена, получаем, пользуясь известными свойствами определителя, следующий критерий отрицательной определенности: для того, чтобы квадратичная форма $A(x)$ была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \; ... \, , (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Замечание 3. Мы указали необходимое (теорема 1) и достаточное (теорема 2) условия экстремума лишь во внутренней точке области определения функции.

При отыскании абсолютного максимума или минимума функции необходимо наряду с внутренними стационарными точками исследовать также точки границы области определения функции, поскольку наибольшее или наименьшее значения функция может принимать в граничных точках.

Сформулируем теорему для случая функции двух переменных, где условия на квадратичную форму будут выражены в явном виде через вторые частные производные.

Теорема 3. Пусть функция $f(x,y)$ определена и имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$, которая является стационарной для функции $f(x,y)$, то есть в этой точке $f'_x = f'_y = 0$. Обозначим $a_{11} = f''_x$, $a_{12} = f''_{xy}$, $a_{22} = f''_y$. Тогда, если в точке (x_0, y_0):
a) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$, то она является точкой строгого экстремума, а именно максимума, если $a_{11} < 0$, и минимума, если $a_{11} > 0$;
b) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, то экстремума нет;
c) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, то экстремум может быть, может и не быть.

17.10. Геометрическая интерпретация дифференциала Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,y)$, определенную в области $G \subset \mathbf{R}^2$. График функции $f : G \to R$, $G \subset \mathbf{R}^2$, в нашем случае есть множество

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 |\, (x,y) \in G,\ z = f(x,y)\}.$$

Пусть функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0) \in G$, это означает

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right) \qquad (1)$$

при $(x,y) \to (x_0,y_0)$, где $A = f'_x(x_0,y_0)$ и $B = f'_y(x_0,y_0)$ - некоторые постоянные. Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ плоскость

$$z = z_0 + A(x-x_0) + B(y-y_0) \qquad (2)$$

где $z_0 = f(x_0,y_0)$. Сравнивая равенства (1) и (2) видим, что график функции $z = f(x,y)$ отличается от плоскости на бесконечно малую величину, по сравнению с $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$. В силу единственности дифференциала (1), плоскость (2) с указанными свойствами также единственная, она называется касательной плоскостью к графику функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Запишем уравнение (2) в каноническом виде

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0. \tag{3}$$

Из геометрии известно, что вектор, компонентами которого являются коэффициенты уравнения (3), ортогонален плоскости. Таким образом, вектор

$$(f'_x(x_0, y_0),\ f'_y(x_0, y_0),\ -1)$$

является нормалью к касательной плоскости к поверхности S (графику функции) в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

В частности, если (x_0, y_0) – стационарная точка функции $f(x, y)$, то в точке (x_0, y_0, z_0) поверхности S нормальный вектор имеет вид $(0,\ 0,\ -1)$ и, следовательно, касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости (x, y).

Все сказанное выше переносится на случай функции многих переменных $u = f(x)$, где $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$. Уравнение касательной плоскости к графику функции в точке $(x^{(0)}, u_0)$, где $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, $u_0 = f(x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, записывается в виде

$$u = u_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})(x_i - x_i^{(0)}). \tag{4}$$

Вектор нормали к касательной плоскости (4) в точке $(x^{(0)}, u_0)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}),\ ...,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)}), -1 \right). \tag{5}$$

Уравнение (4) задает гиперплоскость в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$, а уравнение $u = f(x)$ – гиперповерхность в пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$. Сама плоскость (4) и график функции имеют размерность n. Уравнение касательной плоскости (4) можно представить следующим образом

$$u = u_0 + (\mathbf{grad}\, f(x^{(0)}),\ (x - x^{(0)})), \tag{6}$$

где x и $x^{(0)}$ рассматриваются как векторы пространства $\mathbf{R}^n$.

Если поверхность задана уравнением $f(x) = f(x_1, ...x_n) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $x = x^{(0)}$ имеет вид: $(\mathbf{grad}\, f(x^{(0)}),\ (x - x^{(0)})) = 0$, вектор нормали к поверхности (к касательной плоскости) есть $\mathbf{grad}\, f(x^{(0)})$.

17.11. Однородные функции

Определение 1. Функция $f(x_1, ...x_n)$, определенная в области $G \subset \mathbf{R}^n$, называется однородной функцией k - ой степени, если при умножении всех ее аргументов на множитель t, сама функция приобретает этот множитель в k - ой степени, то есть тождественно выполняется равенство

$$f(tx_1, ..., tx_n) = t^k f(x_1, ...x_n). \tag{1}$$

Предполагается, что точка $tx = (tx_1, ..., tx_n)$ также принадлежит области G.

Степень однородности k может быть любым вещественным числом. Получим общее выражение однородной функции k - ой степени. Пусть сперва $f(x_1, ...x_n)$ есть однородная функция нулевой степени, тогда

$$f(tx_1, ..., tx_n) = f(x_1, ..., x_n).$$

Положив здесь $t = 1/x_1$, получим

$$f(x_1, ..., x_n) = f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right).$$

Если ввести функцию $n-1$ аргументов, то окажется

$$f(x_1, ..., x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right). \tag{2}$$

Это равенство дает общее выражение однородной функции нулевой степени, то есть всякая однородная функция нулевой степени представляется в виде функции отношений всех аргументов к одному из них.

Если $f(x_1, ...x_n)$ есть однородная функция k - ой степени, то отношение ее к x_1^k будет однородной функцией нулевой степени, так что по доказанному

$$\frac{f(x_1, ...x_n)}{x_1^k} = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$$

и

$$f(x_1, ...x_n) = x_1^k \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right). \tag{3}$$

Если $f(x_1, ...x_n)$ – однородная функция степени k, то она представима в виде (3), и наоборот, если функция $f(x_1, ...x_n)$ имеет вид (3), то она будет однородной функцией степени k.

Пример.

$$x\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{x-y}\ln\frac{x}{y}=x^2\frac{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}}{\frac{y}{x}-1}\ln\frac{y}{x}$$

Предположим теперь, что однородная функция $f(x_1,...x_n)$ степени k имеет в области $G\subset\mathbf{R}^n$ непрерывные частные производные по всем аргументам. В силу основного тождества (1) для $\forall t>0$ будем иметь

$$f(tx_1,...,tx_n)=t^kf(x_1,...x_n).$$

Продифференцируем это равенство по t, левую часть равенства по правилу дифференцирования сложной функции, правую просто как степенную функцию,

$$f_1'(tx)x_1+...+f_n'(tx))x_n=kt^{k-1}f(x).$$

Если положить здесь $t=1$, то придем к следующей формуле

$$f_1'(x)x_1+...+f_n'(x)x_n=kf(x), \tag{4}$$

которая называется формулой Эйлера. Этому равенству удовлетворяет любая однородная функция степени k, имеющая непрерывные частные производные в точке $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbf{R}^n$. Можно показать и обратное – каждая функция $f(x_1,...x_n)$, имеющая непрерывные частные производные и удовлетворяющая равенству (4), необходимо является однородной функцией степени k.

17.12. Отображения

Будем рассматривать отображения $f:X\to Y$, $X\subset\mathbf{R}^n$, $Y\subset\mathbf{R}^m$, которые каждой точке $x=(x_1,...,x_n)$ множества $X\subset\mathbf{R}^n$ ставят в соответствие точку $y=f(x)=(y_1,...,y_m)$ множества $Y\subset\mathbf{R}^m$. Очевидно, что задание отображения f равносильно заданию m вещественнозначных функций $f_j:X\to\mathbf{R}$, $(j=\overline{1,m})$. Функции $f_j(x)$, $x\in X$, $(j=\overline{1,m})$, называют координатными функциями отображения f и пишут $f=(f_1,...,f_m)$.

На отображения обобщаются понятия предела и непрерывности вещественнозначных функций. Рассмотрим два определения предела отображения – в терминах последовательностей и в терминах окрестностей.

Определение 1. Точка $A\in\mathbf{R}^m$ называется пределом отображения $f:X\to\mathbf{R}^m$, $X\subset\mathbf{R}^n$, при $x\to a$, где a -предельная точка множества X, если для любой последовательности точек $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2...$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$, выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = A. \tag{1}$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Это условие равносильно следующему

$$\lim_{k\to\infty} f_j(x^{(k)}) = A_j, \quad j = \overline{1,m}.$$

Отображение f имеет предел при $x \to a$ тогда и только тогда, когда все координатные функции $f_j(x)$ имеют предел в этой точке $\lim\limits_{x\to a} f_j(x) = A_j$, $(j = \overline{1,m})$.

Сформулируем эквивалентное определение предела функции в терминах окрестностей. В случае конечных точек a и A можно дать следующее определение предела

Определение 2. Точка $A \in \mathbf{R}^m$ называется пределом отображения $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, при $x \to a$, где a – предельная точка множества X, если для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0$, что для $\forall x \in X$, удовлетворяющих условию $d(x;a) < \delta$, выполняется неравенство $d(f(x);A)) < \varepsilon$.

Эквивалентность определений 1 и 2 доказывается аналогично случаю функций одной переменной.

Непрерывность отображения

Можно дать разные определения непрерывности отображения в точке. Если в определениях предела 1 и 2 заменить точку $A \in \mathbf{R}^m$ значением отображения $f(a)$, то получим непосредственно два определения непрерывности отображения в терминах последовательностей и окрестностей.

Определение 3. Отображение $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, называется непрерывным в точке $a \in X$, являющейся внутренней для этого множества, если выполняется условие $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Определение 4. Отображение $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, называется непрерывным в точке $a \in X$, являющейся внутренней для этого множества, если для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall x \in X$, удовлетворяющих условию $d(x;a) < \delta$, выполняется неравенство $d(f(x);f(a)) < \varepsilon$.

Отображение $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, называется непрерывным на множестве X, если оно непрерывно в каждой точке этого множества.

Определение 5. Отображение $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, называется равномерно непрерывным на множестве X, если для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\forall\, x, y \in X$, удовлетворяющих условию $d(x; y) < \delta$, выполняется неравенство $d(f(x); f(y)) < \varepsilon$.

Для отображений имеют место почти все теоремы, которые были сформулированы для вещественнозначных функций. В частности, аналог теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывных на компакте функций и достижимости этими функциями верхней и нижней граней.

Теорема 1. (Вейерштрасса). Пусть $f : K \to \mathbf{R}^m$, $K \subset \mathbf{R}^n$, есть непрерывное отображение компакта K в пространство $\mathbf{R}^m$, тогда множество $f(K)$ также является компактом в $\mathbf{R}^m$.

► Пусть $y^{(k)} \in f(K)$, $k = 1, 2...$ – произвольная последовательность точек из $f(K)$. В силу определения образа множества при отображении для любого $y^{(k)}$ существует такая точка $x^{(k)}$, что $f(x^{(k)}) = y^{(k)}$. Поскольку K – компакт, то из последовательности $\{x^{(k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(k_j)}\}$, предел которой принадлежит K: $\lim\limits_{j\to\infty} x^{(k_j)} = a$, $a \in K$. В силу непрерывности отображения f в точке a имеем $\lim\limits_{j\to\infty} f(x^{(k_j)}) = f(a)$, то есть

$$\lim_{j\to\infty} (y^{(k_j)}) = f(a) \in f(K).$$

Таким образом, из любой последовательности точек, принадлежащих множеству $f(K)$, можно выделить сходящуюся подпоследовательность, предел которой принадлежит этому множеству. Это и означает, что $f(K)$ – компакт. ◄

Для отображений имеет место и утверждение, аналогичное теореме Кантора для непрерывных функций.

Теорема 2 (Кантора). Если $f : K \to \mathbf{R}^m$, – непрерывное отображение компакта $K \subset \mathbf{R}^n$ в пространство $\mathbf{R}^m$, то оно и равномерно непрерывно.

► Воспользуемся тем же методом, что и при доказательстве теоремы Кантора о равномерной непрерывности вещественнозначных функций, непрерывных на компакте.

Допустим, что существует отображение $f : K \to \mathbf{R}^m$, $K \subset \mathbf{R}^n$, непрерывное на компакте K, но не равномерно непрерывное. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$, для которого не найдется такого $\delta > 0$, о котором говорится в определении равномерной непрерывности. То есть для $\forall\,\delta > 0$ найдутся две точки $x, y \in K$, для которых $d(x;y) < \delta$, но $d(f(x);f(y)) \geq \varepsilon$.

Возьмем последовательность положительных чисел $\delta_k = 1/k$, очевидно $\delta_k \to 0$ при $k \to \infty$. В силу сказанного, для каждого δ_k найдутся в K точки $x^{(k)}$ и $y^{(k)} \in K$, что $d(x^{(k)};y^{(k)}) < \delta_k$ и $d(f(x^{(k)});f(y^{(k)})) \geq \varepsilon$.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x^{(k)}\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность к некоторой точке $a \in K$. Будем считать, что сама последовательность $\{x^{(k)}\}$ сходится к точке a. Так как $x^{(k)} - y^{(k)} \to 0$ при $k \to \infty$, то и последовательность $\{y^{(k)}\}$ сходится к точке a. Ввиду непрерывности отображения f в точке a должно быть

$$\lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} f(y^{(k)}) = f(a).$$

Тогда $d(f(x^{(k)});f(y^{(k)})) \to 0$ при $k \to \infty$. А это противоречит нашему предположению. ◄

Для отображений остаются в силе теоремы о пределе и непрерывности композиции отображений.

Теорема 3. (о пределе композиции отображений). Пусть определены отображения $f : X \to Y$, $X \subset \mathbf{R}^n$ и $g : Y \to \mathbf{R}^k$, $Y \subset \mathbf{R}^m$. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, где a – предельная точка множества X, и $\lim\limits_{y\to A} g(y)$, где A – предельная точка множества Y, то существует предел композиции отображений $g \circ f : X \to \mathbf{R}^k$ при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a} g \circ f = \lim_{y\to A} g(y)$$

► Задание отображения $g : Y \to \mathbf{R}^k$ эквивалентно заданию k вещественнозначных функций $g_j\colon Y \to \mathbf{R}$, $(j = \overline{1,k})$. Для композиции $g_j \circ f : X \subset \mathbf{R}$ существование предела $\lim\limits_{x\to a} g_j \circ f$ следует из теоремы о пределе вещественнозначной сложной функции. Справедливость данной теоремы следует из равносильности существующих пределов $\lim\limits_{x\to a} g \circ f \iff \lim\limits_{x\to a} g_j \circ f$, $(j = \overline{1,k})$. ◄

Теорема 4. (о непрерывности композиции отображений). Пусть определены отображения $f\colon X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, $g\colon Y \to \mathbf{R}^k$, $Y \subset \mathbf{R}^m$. Если отображение f непрерывно в точке $a \in X$, а отображение g непрерывно в точке $f(a) \in Y$, то композиция отображений $g \circ f : X \to \mathbf{R}^k$ также непрерывна в точке a.

► Возьмем произвольную последовательность точек $x^{(i)} \in X$, $i = 1, 2...$, имеющую предел $\lim\limits_{i\to\infty} x^{(i)} = a$. Тогда $f(x^{(i)}) \in Y$ и, в силу непрерывности отображения $f : X \to \mathbf{R}^m$ в точке a, имеем $\lim\limits_{i\to\infty} f(x^{(i)}) = f(a)$. В силу непрерывности отображения $g \colon Y \to \mathbf{R}^k$ в точке $f(a)$ для любой последовательности точек $y^{(i)} \in Y$, $i = 1, 2, ...,$ $\lim\limits_{i\to\infty} y^{(i)} = f(a)$. Имеет место равенство $\lim\limits_{i\to\infty} g(y^{(i)}) = g(f(a))$. В частности, это равенство будет справедливо для последовательности $y^{(i)} = f(x^{(i)})$, то есть $\lim\limits_{i\to\infty} g(f(x^{(i)})) = g(f(a))$. Что означает непрерывность композиции $g \circ f$ в точке $a \in X$. ◄

17.13. Дифференцируемые отображения

Определение 1. Отображение $\alpha : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, называется бесконечно малым при $x \to a$ по сравнению с функцией $\|x-a\|^n$: $\alpha(x) = o(\|x-a\|^n)$, $x \to a$, если существует такое отображение $\varepsilon : X \to \mathbf{R}^m$, что для некоторой фиксированной окрестности точки $a \in X$ имеет место равенство

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)\|x-a\|^n \;\text{ и }\; \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

Если отображение $\alpha(x)$ определено в точке $x = a$, то отображение $\varepsilon(x)$ также будет определено в этой точке, следовательно, согласно определению предела, и непрерывно в ней: $\varepsilon(a) = 0$.

Определение 2. Отображение $f : X \to \mathbf{R}^m$, определенное на множестве $X \subset \mathbf{R}^n$, называется дифференцируемым в точке $x \in X$, внутренней для множества X, если

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = L(x)(h) + \alpha(x;h),\; h \to 0, \tag{1}$$

где $L(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ – линейный относительно h оператор, $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$, $(\|\alpha(x;h)\|_{\mathbf{R}^m} = o(\|h\|_{\mathbf{R}^n}),\ h \to 0)$, $x + h \in X$.

Векторы Δf и $\Delta x(h) = h$ в соотношении (1) называются соответственно приращением отображения и приращением аргумента. Очевидно, если отображение f дифференцируемо в точке $x \in X$, то оно непрерывно в этой точке. Линейный относительно h оператор $L(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ в формуле (1) называется дифференциалом отображения f в точке $x \in X$ и обозначается символом $Df(x)$. Матрицу дифференциала $Df(x)$ называют производной отображения f

в точке $x \in X$ и обозначают символом $f'(x)$. С учетом принятых обозначений определение дифференцируемого отображения можно записать в виде

$$\Delta f = f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + o(h), \quad h \to 0. \tag{2}$$

Заметим, что дифференциал определен на смещениях h от рассматриваемой точки $x \in \mathbf{R}^n$.

Ввиду линейности отображения $L(x)$, вместо выражения $L(x)(h)$ в формуле (1) обычно пишут $L(x)h$, аналогично, вместо $Df(x)(h)$ пишут $Df(x)h$.

В координатных функциях равенство (1) равносильно m равенствам

$$\Delta f_j = f_j(x+h) - f_j(x) = L_j(x)h + \alpha_j(x;h), \quad j = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где $\alpha_j(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$, $x+h \in X$, $L_j(x) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – вещественнозначные функции, линейные относительно вектора h.

Таким образом, справедливо утверждение: отображение $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, дифференцируемо в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда в этой точке дифференцируемы координатные функции $f_j : X \to \mathbf{R}$, $(j = \overline{1,m})$, этого отображения.

Поскольку соотношения (1) и (3) равносильны, то для отыскания дифференциала $L(x)$ отображения $f : X \to \mathbf{R}^m$ достаточно найти дифференциалы $L_j(x)$ его координатных функций $f_j : X \to \mathbf{R}$

$$Df_j(x)h = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x)h_1 + ... + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(x)h_n = (\mathbf{grad}\, f_j, h), \quad j = \overline{1,m}$$

Дифференциал отображения можно записать в виде

$$Df(x)h = \begin{pmatrix} Df_1(x)h \\ \cdots \\ Df_m(x)h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x)h_1 + ... + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x)h_n \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x)h_1 + ... + \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(x)h_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. Если отображение $f : X \to \mathbf{R}^m$, $X \subset \mathbf{R}^n$, дифференцируемо в точке $x \in X$, то его дифференциал в этой точке определен однозначно.

► Отображение f дифференцируемо тогда и только тогда, когда дифференцируемы его координатные функции $f_j\,(j = \overline{1,m})$. Дифференциалы вещественнозначных функций f_j определяются однозначно, отсюда следует однозначность дифференциала отображения f. ◄

Следствие 1. Дифференциал линейного отображения совпадает с самим отображением.

► Пусть $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ – линейный оператор. В силу линейности f для любых x и $h \in \mathbf{R}^n : f(x+h) - f(x) = f(h)$, то есть равенство (2) выполняется при $Df(x) = f$ и $o(h) \equiv 0$. В силу единственности дифференциала следствие доказано. ◄

Теорема 2 (дифференцирование композиции отображений). Если отображение $f : X \to Y$ множества $X \subset \mathbf{R}^n$ в множество $Y \subset \mathbf{R}^m$ дифференцируемо в точке $x \in X$, а отображение $g : Y \to \mathbf{R}^k$, дифференцируемо в точке $y = f(x) \in Y$, тогда композиция этих отображений $g \circ f : X \to \mathbf{R}^k$ дифференцируема в точке $x \in X$ и ее дифференциал равен композиции дифференциалов:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) \tag{3}$$

► Используя дифференцируемость отображений f и g в точках x и $y = f(x)$, а также линейность дифференциала $Dg(y)$, можно написать

$$(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x) = g\big(f(x+h)\big) - g\big(f(x)\big) = Dg(y)\big(Df(x)h + o(h)\big) +$$

$$+ o\big(f(x+h) - f(x)\big) = Dg(y)\big(Df(x)h\big) + Dg(y)\big(o(h)\big) + o\big(f(x+h) - f(x)\big) =$$

$$= \big(Dg(y) \circ Df(x)\big)h + \alpha(x;h)$$

где $Dg(y) \circ Df(x)$ есть композиция линейных отображений,

$$\alpha(x;h) = Dg(y)\big(o(h)\big) + o\big(f(x+h) - f(x)\big)$$

Как следует из п., 17.1, $Dg(y)(o(h)) = o(h)$ при $h \to 0$, $f(x+h) - f(x) = Df(x)h + o(h) = O(h) + o(h) = O(h)$ при $h \to 0$, и $o\big(f(x+h) - f(x)\big) = o\big(O(h)\big) = o(h)$ при $h \to 0$. Следовательно, $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to 0$ и теорема доказана. ◄

Следствие 2. Производная композиции отображений равна произведению производных этих отображений

$$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \tag{4}$$

► Формула (4) следует из формулы (3) теоремы 2, поскольку при композиции любых операторов их матрицы перемножаются. Будучи переписана в координатной форме, теорема 2 дает выражение (4). Пусть

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}, \quad g'(y) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(y) & \dots & \partial_m g_1(y) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_1 g_k(y) & \dots & \partial_m g_k(y) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(g \circ f)'(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(y) & \dots & \partial_m g_1(y) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_1 g_k(y) & \dots & \partial_m g_k(y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \dots & \partial_n f_1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \partial_1 f_m(x) & \dots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

Использованы обозначения: $\partial_i f_j(x) = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$, $\partial_i g_j(y) = \dfrac{\partial g_j}{\partial y_i}$.

ГЛАВА 18. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

18.1. Неявные функции, определяемые одним уравнением

Пусть значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n, u$ связаны между собой уравнением

$$F(x_1, ..., x_n, u) = 0, \tag{1}$$

где $F : X \to \mathbf{R}$, $X \subset \mathbf{R}^{n+1}$, есть функция $n+1$ переменной. Уравнение (1) можно рассматривать как уравнение для одной из переменных как функции остальных. Например, будем считать, что $u = f(x_1, ..., x_n)$. Тогда равенство (1) называют неявным заданием функции u.

Если для каждого набора переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ из некоторой области $G \subset \mathbf{R}^n$ существует одно или несколько значений u, которые совместно с x удовлетворяют уравнению (1), то этим определяется однозначная или многозначная функция $u = f(x)$, для которой равенство (1) выполняется тождественно относительно $x : F(x, f(x)) \equiv 0$.

Выясним условия, при которых одно уравнение с несколькими переменными определяет одну из них как однозначную функцию остальных, независимо от возможности представления ее в явном виде аналитической формулой.

Теорема 1 (о неявной функции двух переменных). Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ точки $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ и имеет в этой окрестности частные производные F'_x и F'_y, которые непрерывны в точке (x_0, y_0). Если $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, тогда найдется прямоугольная окрестность точки (x_0, y_0)

$$P = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \middle| \, |x - x_0| < \delta_x, \ |y - y_0| < \delta_y \right\} \subset U(x_0, y_0),$$

в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как однозначную функцию x: $y = f(x)$, причем $y_0 = f(x_0)$. В интервале $|x - x_0| < \delta_x$ функция f непрерывна и имеет в точке $x = x_0$ непрерывную производную, вычисляемую по формуле

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \tag{2}$$

► Пусть для определенности $F'_y(x_0, y_0) > 0$. В силу непрерывности производной F'_y в точке (x_0, y_0) эта производная будет положительной $F'_y(x, y) > 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Возьмем такую окрестность P, чтобы функция $F(x, y)$ была непрерывна на замыкании $\overline{P}$ и чтобы выполнялось условие $F'_y(x, y) > 0$ при $(x, y) \in \overline{P}$. Отсюда следует, что при любом фиксированном x из $|x - x_0| < leq \delta_x$ функция $F(x, y)$, как функция переменной y, будет строго монотонно возрастающей на отрезке $|y - y_0| \leq \delta_y$ и, так как $F(x_0, y_0) = 0$, то $F(x_0, y_0 - \delta_y) < 0$, $F(x_0, y_0 + \delta_y) > 0$. Теперь фиксируем переменную y и будем рассматривать функцию $F(x, y)$ как функцию одной переменной x. В силу непрерывности $F(x, y)$ в окрестности $U(x_0, y_0)$, функции $F(x, y_0 - \delta_y)$ и $F(x, y_0 + \delta_y)$, как функции переменного x, непрерывны в точке $x = x_0$. Поэтому существует окрестность $|x - x_0| < \delta'_x$, где $F(x, y_0 - \delta_y) < 0$ и $F(x, y_0 + \delta_y) > 0$ для $\forall x \in \{|x - x_0| < \delta'_x\}$. Выберем $\delta'_x \leq \delta_x$ (это всегда возможно), согласно теореме о промежуточном значении непрерывной функции (теореме Больцано-Коши), для каждого $\overline{x} \in \{|x - x_0| < \delta'_x\}$ существует точка $\overline{y} \in [y_0 - \delta_y, y_0 + \delta_y]$, где $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. В силу строгой монотонности функции $F(\overline{x}, \overline{y})$ на отрезке $[y_0 - \delta_y, y_0 + \delta_y]$, указанное число $\overline{y}$ – единственное. Таким образом, мы получили некоторую единственную функцию $\overline{y} = f(\overline{x})$, заданную для $\overline{x} \in \{|x - x_0| < \delta'_x\}$ со значениями $\overline{y} \in [y_0 - \delta_y, y_0 + \delta_y]$ и $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$, при этом доказана однозначность функции f. В то же время, предыдущее рассуждение, ввиду $F(x_0, y_0) = 0$, доказывает также, что $f(x_0) = y_0$, то есть y_0 есть единственное значение в промежутке $|y - y_0| < \delta_y$, которое вместе с $x = x_0$ удовлетворяет данному условию.

Переходя ко второй части утверждения – доказательству непрерывности функции $f(x)$ на интервале $|x - x_0| < \delta'_x$, будем под y иметь ту неявную функцию $y = f(x)$, которая определяется уравнением $F(x, y) = 0$ и тождественно ему удовлетворяет.

Пусть задано $\varepsilon > 0$, используемое выше δ_y подчиним условию $\delta_y \leq \varepsilon$. Тогда, по доказанному, при $|x - x_0| < \delta'_x$ будем иметь $y = f(x) \in \{|y - y_0| < \delta_y \leq \varepsilon\}$. Что означает непрерывность функции f в точке x_0. Непрерывность функции $y = f(x)$ в произвольной точке $\overline{x} \in \{|x - x_0| < \delta'_x\}$ доказывается аналогично.

Согласно доказанному выше, выполняются следующие условия: $F(\overline{x}, f(\overline{x})) = 0$ и $(\overline{x}, f(\overline{x})) \in P$. Отсюда и следует непрерывность функции $f(x)$ в любой точке $\overline{x} \in \{|x - x_0| < \delta'_x\}$: для $\forall \varepsilon > 0$ и $\delta_y \leq \varepsilon$ из $|x - \overline{x}| < \delta_x \Longrightarrow |y - \overline{y}| < \delta_y \leq \varepsilon$.

Докажем теперь существование непрерывной производной функции f в точке x_0. Пусть в окрестности P существуют частные производные F'_x и F'_y, которые непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда функция $F(x, y)$ дифференцируема в этой точке, то есть

$$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-F(x_0, y_0) = F'_x(x_0, y_0)\Delta x+F'_y(x_0, y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y, \quad (3)$$

где $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1 = \lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2 = 0$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Возьмем в формуле (3) $x_0 + \Delta x \in \{|x - x_0| < \delta_x\}$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, тогда, в силу условия $F(x, f(x)) = 0$, получим $F(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = F(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = 0$ и так как $F(x_0, y_0) = 0$, то из (3) имеем:

$$F'_x(x_0, y_0)\Delta x + F'_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = 0.$$

Откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2}. \quad (4)$$

Пусть теперь $\Delta x \to 0$, тогда в силу непрерывности функции f и $\Delta y \to 0$, а значит $\rho \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда следует, что в формуле (3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1 = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2 = 0$, поэтому при $\Delta x \to 0$ предел правой части равенства (4) существует, а тогда при $\Delta x \to 0$ существует и предел левой части, то есть существует

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}. \quad \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Если производные F'_x и F'_y непрерывны в прямоугольной окрестности P точки (x_0, y_0), то производная f'_x непрерывна на интервале $|x - x_0| < \delta_x$, причем на этом интервале

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Действительно, применяя формулу (2) к произвольной точке $x \in \{|x-x_0| < \delta_x\}$, получим искомое выражение, откуда, по теореме о суперпозиции непрерывных функций, мы получаем непрерывность функции f'_x на $|x - x_0| < \delta_x$.

Аналогичным образом формулируется и доказывается теорема для неявной функции, определяемой уравнением $F(x_1, ..., x_n, u) = 0$.

Теорема 2 (о неявной функции многих переменных). Пусть функция $F(x, y)$, где $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}$, определена и непрерывна в некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y_0)$

точки $(x^{(0)}, y_0) \in \mathbf{R}^{n+1}$ и имеет в этой окрестности частные производные $\partial F/\partial x_i$, $(i = \overline{1,n})$, и $F'_y = \partial F/\partial y$, которые непрерывны в точке $(x^{(0)}, y_0)$. Если $F(x^{(0)}, y_0) = 0$ и $F'_y(x^{(0)}, y_0) \neq 0$, тогда найдется $(n+1)$ - мерная прямоугольная окрестность точки $(x^{(0)}, y_0)$ $P = P_x \times I_y \subset U$, где

$$P_x = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i\}, \quad I_y = \{y \in \mathbf{R} : |y - y_0| < \delta_y\},$$

в которой уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как однозначную функцию точки $x \in P_x : y = f(x)$, причем $y_0 = f(x^{(0)})$. В области P_x функция f непрерывна и имеет в точке $x = x^{(0)}$ непрерывные частные производные $\partial f/\partial x_i$, $(i = \overline{1,n})$, причем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{F'_i(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}. \tag{5}$$

► Доказательство существования промежутка $P = P_x \times I_y$, в котором $F(x, y) = 0 \iff y = f(x)$, и непрерывности функции f в промежутке P_x повторяет соответствующие части теоремы 1. Пусть для определенности $F'_y(x^{(0)}, y_0) > 0$. Поскольку F'_y – непрерывная функция в точке $(x^{(0)}, y_0)$, она будет положительной $F'_y(x, y) > 0$ и в некоторой окрестности этой точки. Будем считать, что в $U(x^{(0)}, y_0)$. Возьмем в U такую прямоугольную окрестность точки $(x^{(0)}, y_0)$ $P = P_x \times I_y$, чтобы функция $F(x, y)$ была непрерывна на замыкании $\overline{P} = \overline{P}_x \times \overline{I}_y$. Поскольку $F'_y(x, y) > 0$ в U, то функция $F(x^{(0)}, y)$ переменного y определена и строго монотонно возрастает на отрезке $\overline{I}_y = |y - y_0| \leq \delta_y$. Так как $F(x^{(0)}, y_0) = 0$, то на концах отрезка $\overline{I}_y$ будет $F(x^{(0)}, y_0 - \delta_y) < 0$ и $F(x^{(0)}, y_0 + \delta_y) > 0$. Теперь будем рассматривать функцию $F(x, y)$ как функцию переменной x при фиксированном значении y. В силу непрерывности функции $F(x, y)$ в $U(x^{(0)}, y_0)$ функции $F(x, y_0 - \delta_y)$ и $F(x, y_0 + \delta_y)$ будут непрерывны в точке $x = x^{(0)}$, поэтому существует n - мерная прямоугольная окрестность этой точки P'_x, что при $x \in P'_x = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta'_i\}$ будут выполнены соотношения $F(x, y_0 - \delta_y) < 0$ и $F(x, y_0 + \delta_y) > 0$ для $\forall x \in P'_x$.

Выберем точку $\delta' = (\delta'_1, ..., \delta'_n) \in \mathbf{R}^n$ таким образом, чтобы $P'_x \subset P_x$. Согласно теореме Больцано-Коши о промежуточном значении функции, для каждой точки $\overline{x} \in P'_x$ существует точка $\overline{y} \in [y_0 - \delta_y, y_0 + \delta_y]$, что $F(\overline{x}, \overline{y}) = 0$. В силу строгой монотонности функции $F(\overline{x}, y)$ на отрезке $|y - y_0| \leq \delta_y$, указанное число $\overline{y}$ – единственное, следовательно, при $x \in P'_x$ найдется единственная точка

$y = f(x) \in I_y$, такая, что $F(x, f(x)) = 0$. Мы доказали эквивалентность равенств $F(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x)$. Равенство $y_0 = f(x^{(0)})$ вытекает из того, что при $x = x^{(0)}$ есть единственная точка $f(x^{(0)}) \in I_y$, для которой $F(x^{(0)}, f(x^{(0)})) = 0$, а у нас по условию $F(x^{(0)}, y_0) = 0$.

Если теперь в функциях $F(x, y)$ и $f(x)$ фиксировать все переменные, кроме x_i и y, то мы окажемся в условиях теоремы 1, где роль x выполняет переменная x_i. Отсюда следует справедливость формулы (5). Из этой формулы видно, что частные производные $\partial f/\partial x_i$ непрерывны в точке $x^{(0)}$, то есть функция f непрерывно дифференцируема в этой точке. ◀

Замечание 2. Если производные $\partial F/\partial x_i$, $(i = \overline{1, n})$ и $F'_y = \partial F/\partial y$ непрерывны в некоторой окрестности $P = P_x \times I_y \subset U(x^{(0)}, y_0)$ точки $(x^{(0)}, y_0)$, то частные производные $\partial f/\partial x_i$ будут также непрерывны в промежутке P_x. Это следует из формулы (5), если ее применить к точке $x \in P_x$.

Мы видим, что в вопросе существования однозначной неявной функции, определяемой одним уравнением $F(x, y) = 0$, решающую роль играет требование, чтобы в рассматриваемой точке, удовлетворяющей уравнению, не обращалась в нуль производная F'_y именно по той переменной, которая подлежит определению как неявная функция. Если в данной точке $F'_y = 0$, то в качестве неявной функции можно рассматривать другую переменную, например, x_i, если $\partial F/\partial x_i \neq 0$ в рассматриваемой точке. Лишь в точке, где все частные производные $\partial F/\partial y$ и $\partial F/\partial x_i$ обращаются в нуль, наши теоремы не применимы. Такие точки называются особыми.

18.2. Неявные функции, определяемые системой уравнений

Рассмотрим систему m уравнений с $n + m$ переменными

$$F_j(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Речь идет об определении системой (1) m переменных $y_1, ..., y_m$ как неявных функций от n переменных $x_1, ..., x_n$, то есть

$$y_k = f_k(x_1, ..., x_n), \quad k = \overline{1, m}, \tag{2}$$

так что при подстановке (2) в (1) получаются тождества относительно переменных $x_1, ..., x_n$. Для краткости письма и ясности формулировок введем обозначения

$$x = (x_1, ..., x_n), \quad y = (y_1, ..., y_m),$$

$$F(x, y) = (F_1(x, y), ..., F_m(x, y)), \quad f(x) = (f_1(x), ..., f_m(x)).$$

Тогда систему (1) будем записывать как $F(x, y) = 0$, а систему (2) как $y = f(x)$. Далее положим

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x), \tag{3}$$

$$F'_x(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x, y), \tag{4}$$

$$F'_y(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}(x, y). \tag{5}$$

Заметим, что матрица $F'_y(x, y)$ квадратная и, следовательно, она обратима тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля. Матрицу, обратную к $F'_y(x, y)$, будем обозначать символом $[F'_y(x, y)]^{-1}$.

Определение 1. Пусть дана система функций (2), имеющих в точке $x \in \mathbf{R}^n$ частные производные первого порядка. Тогда матрица (3), составленная из частных производных этих функций (в точке x), называется матрицей Якоби данной системы функций. Если $m = n$, то определитель матрицы частных производных называется определителем Якоби или якобианом системы функций (2) по переменным $x_1, ..., x_m$ и обозначается символом

$$\frac{\partial(y_1, ..., y_m)}{\partial(x_1, ..., x_m)} \quad \text{или} \quad \frac{D(y_1, ..., y_m)}{D(x_1, ..., x_m)}.$$

Определение 2. Говорят, что в $(n + m)$ - мерном параллелепипеде $P = P_x \times P_y$, где

$$P_x = \{x \in \mathbf{R}^n : \, a_i < x_i < b_i, \, i = \overline{1, n}\}, \quad P_y = \{y \in \mathbf{R}^m : \, c_j < y_j < d_j, \, j = \overline{1, m}\},$$

система уравнений (1) определяет переменные $y = (y_1, ..., y_m)$ как однозначные функции переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ – формулы (2), если для любых значений $x \in P_x$ система уравнений (1) имеет одну и только одну систему решений (2) из промежутка P_y. При этих условиях в параллелепипеде $P = P_x \times P_y$ системы (1) и (2) эквивалентны.

Теорема 1 (о неявных функциях). Пусть функции $F_j(x, y)$, $j = \overline{1, m}$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$, определены и непрерывны в некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbf{R}^{n+m}$ и имеют в этой окрестности все частные производные первого порядка $\partial F_j/\partial x_i$ и $\partial F_j/\partial y_k$, которые непрерывны в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Если в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ $F_j(x, y) = 0$, а $J = \det F'_y(x, y) \neq 0$, тогда существует $(n+m)$ - мерная прямоугольная окрестность $P = P_x \times P_y \subset U(x^{(0)}, y^{(0)})$, в которой уравнения $F_j(x, y) = 0$, $j = \overline{1, m}$ определяют $y_k = f_k(x)$, $k = \overline{1, m}$ как однозначные функции точки $x \in P_x$, причем $y_k^{(0)} = f_k(x^{(0)})$. В промежутке P_x функции $f_k(x)$ непрерывны и в точке $x = x^{(0)}$ имеют непрерывные частные производные $\partial f_k/\partial x_i$, $i = \overline{1, n}$. Матрица Якоби (3) системы уравнений (2) может быть найдена по формуле

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1}[F'_x(x, f(x))]. \tag{6}$$

► Для доказательства теоремы применим метод математической индукции.

а) При $m = 1$, то есть когда имеется одно уравнение $F(x, y) = 0$, $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}$, теорема справедлива, так как она совпадает с теоремой 2 п.18.1. Пусть теорема справедлива для системы размерности $m-1$. Покажем, что она будет верна и для системы размерности m. По условию, якобиан $J = \det(\partial F_j/\partial y_k) \neq 0$, $j, k = \overline{1, m}$, в точке $(x^{(0)}, y^{(0)}) \in \mathbf{R}^{n+m}$, а значит и в некоторой окрестности этой точки. По крайней мере один элемент последней строки матрицы (5) отличен от нуля. Без ограничения общности положим $\partial F_m/\partial y_m \neq 0$. Для уравнения

$$F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, \tag{7}$$

как уравнения для неявной функции y_m, выполнены условия теоремы 2 § 1. Значит, существует промежуток $P' = (P'_x \times P'_y) \times I_y \subset U$ где $P'_x \subset \mathbf{R}^n$, $P'_y \subset \mathbf{R}^{m-1}$, $I_y \subset \mathbf{R}$ в котором уравнение (7) определяет однозначно функцию $y_m =$

$\varphi(x, y_1, ..., y_{m-1})$, то есть

$$\Big(F_m(x,y) = 0,\ (x,y) \in P'\Big) \Longleftrightarrow \Big(y_m = \varphi(x,y),\ x \in P'_x,\ y \in P'_y\Big). \qquad (8)$$

Подставим найденное выражение y_m в первые $m-1$ уравнений системы $F_j(x,y) = 0$, $(j = \overline{1, m-1})$, получим $m-1$ соотношений

$$\Phi_j(x, y_1, ..., y_{m-1}) = F_j(x, y_1, ..., y_{m-1}, \varphi(x, y_1, ..., y_{m-1})) = 0. \qquad (9)$$

Функции Φ_j определены и непрерывны в промежутке $P'_x \times P'_y$ вместе с частными производными первого порядка, причем в точке $(x^{(0)}, y^0_1, ..., y^0_{m-1})$ $\Phi_j = 0$. Докажем, что в этой точке $\det(\partial \Phi_j / \partial y_k) \neq 0$, $j, k = \overline{1, m-1}$. В силу определения функций Φ_j

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_k} = \frac{\partial F_j}{\partial y_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k}, \quad j, k = \overline{1, m-1}. \qquad (10)$$

Положив еще по определению

$$\Phi_m(x, y_1, ..., y_{m-1}) = F_m(x, y_1, ..., y_{m-1}, \varphi(x, y_1, ..., y_{m-1})),$$

в силу (8) получаем, что в области своего определения $\Phi_m \equiv 0$, поэтому

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial y_k} = \frac{\partial F_m}{\partial y_k} + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial y_k} \equiv 0, \quad k = \overline{1, m-1}. \qquad (11)$$

Учитывая соотношения (10), (11) получим, что определитель матрицы $(\partial F_j / \partial y_k)$ равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} + \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial \Phi_{m-1}}{\partial y_{m-1}} & \dfrac{\partial F_{m-1}}{\partial y_m} \\ 0 & \dots & 0 & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Матрица получается из матрицы $F'_y(x,y)$ добавлением к k-ому столбцу последнего, умноженного на $\partial \varphi / \partial y_k$.

По предположению $\partial F_m/\partial y_m \neq 0$ в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и $det(\partial F_j/\partial y_k) \neq 0$, следовательно, в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y_1^0, ...y_{m-1}^0)$ отличен от нуля определитель матрицы $(\partial \Phi_j/\partial y_k)$. Для функций Φ_j, $(j = \overline{1, m-1})$, выполнены все условия для функций F_j, $(j = \overline{1, m})$. Тогда по предположению метода индукции найдется промежуток $P_x \times P_y \subset P'_x \times P'_y$, где система (9)

$$\Phi_j(x, y_1, ..., y_{m-1}) = 0 \Longleftrightarrow y_k = f_k(x),\ x \in P_x,\ j, k = \overline{1, m-1}. \tag{12}$$

Подставляя функции y_k, $(k = \overline{1, m-1})$ из (12) в функцию $y_m = \varphi(x, y_1, ..., y_{m-1})$ из соотношения (8), получим зависимость $y_m = f_m(x)$, $x \in P_x$, переменной y_m от x.

б) Покажем теперь, что система равенств

$$y_k = f_k(x),\ k = \overline{1, m},\ x \in P_x,\ y = (y_1, ...y_m) \subset P_y \tag{13}$$

равносильна в окрестности $P = P_x \times P_y$ системе (1) $F_j(x, y) = 0$, $(j = \overline{1, m})$ и является искомой системой.

В самом деле, сначала мы в промежутке $P' = (P'_x \times P'_y) \times I_y$ заменили последнее уравнение $F_m(x, y) = 0$ эквивалентным ему, в силу (8), равенством $y_m = \varphi(x, y_1, ..., y_{m-1})$, затем от системы $F_j(x, y) = 0$, $j = \overline{1, m-1}$ мы перешли к равносильной третьей системе (9), заменив в первых $m-1$ уравнениях переменную y_m на $\varphi(x, y_1, ..., y_{m-1})$. Первые $m-1$ уравнений $\Phi_j(x, y_1, ..., y_{m-1}) = 0$, $(j = \overline{1, m-1})$, третьей системы мы в промежутке $P_x \times P_y \subset P'_x \times P'_y$ заменили равносильными соотношениями $y_k = f_k(x)$, $x \in P_x$, $(k = \overline{1, m-1})$, после чего перешли к равносильной ей в промежутке $P = (P_x \times P_y) \times I_y$ окончательной системе (13).

Для завершения доказательства теоремы остается проверить формулу (6). Поскольку в промежутке $P_x \times P_y$, являющемся окрестностью точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, системы $F_j(x, y) = 0$ и $y_k = f_k(x)$ равносильны, то $F_j(x, f(x)) \equiv 0$, $x \in P_x$. Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{14}$$

Соотношение (14) равносильно одному матричному уравнению

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) f'(x) = 0.$$

Ввиду обратимости матрицы $F'_y(x,y)$ в окрестности точки (x^0,y^0), отсюда получим (6).◀

Теорема 2 (об обратном отображении). Пусть $f : G \to \mathbf{R}^n$ – непрерывно дифференцируемое отображение области $G \subset \mathbf{R}^n$ в пространство $\mathbf{R}^n$. Если Якобиан отображения $y = f(x)$ не обращается в нуль в точке $x^{(0)} \in G$, тогда существуют такие окрестности $U(x^{(0)})$ и $V(y^{(0)})$ точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$, что $f : U \to V$ является взаимно однозначным отображением и обратное ему отображение $f^{-1} : V \to U$ непрерывно дифференцируемо на множестве V. При этом, если $x \in U(x^{(0)})$, $y \in V(y^{(0)})$, то $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$.

► Соотношение $y = f(x)$ перепишем в виде

$$F(x,y) = f(x) - y = 0. \tag{15}$$

Запишем равенство (15) в координатной форме

$$F_j(x,y) = f_j(x_1,...,x_n) - y_j = 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{16}$$

Функции $F_j(x,y)$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $(x^{(0)},y^{(0)})$, за такую окрестность можно взять, например, $G \times \mathbf{R}^n$, при этом

$$F_j(x^{(0)},y^{(0)}) = 0, \quad \frac{D(F_1,...,F_n)}{D(x_1,...,x_n)}(x^{(0)},y^{(0)}) = \frac{D(f_1,...,f_n)}{D(x_1,...,x_n)}(x^{(0)}) \neq 0 \tag{17}$$

Таким образом, для функций $F_j(x,y)$ выполнены все условия теоремы 1 о неявной функции. Следовательно, уравнения (16) могут быть разрешены, притом единственным образом, относительно переменных $x_1,...,x_n$ в некоторой окрестности точки $(x^{(0)},y^{(0)})$. Найдутся окрестность $P = P_x \times P_y$ и отображение $g : P_y \to P_x$ такие, что для любой точки $(x,y) \in P$

$$f(x) - y = 0 \Longleftrightarrow x = g(y) \tag{18}$$

и $g'(y) = -[F'_x(x,y)]^{-1}[F'_y(x,y)]$. В нашем случае $F'_x = f'(x)$, $F'_y(x,y) = -E$, где E – единичная матрица, поэтому

$$g'(y) = [f'(x)]^{-1}. \tag{19}$$

Если положить $V = P_y$ и $U = g(V)$, то соотношение (18) показывает, что отображения $f : U \to V$ и $g : V \to U$ взаимно обратны, то есть $g = f^{-1}$ на V.

Поскольку $V = P_y$, то V – окрестность точки $y^{(0)}$. Это означает, что при условиях теоремы образ $y^{(0)} = f(x^{(0)})$ точки $x^{(0)} \in G$, внутренней для G, является внутренней точкой образа $f(G)$ множества G. В силу формулы (19) матрица $g'(y^{(0)})$ обратима. Значит, отображение $g : V \to U$ обладает свойствами, указанными в теореме, относительно области V и точки $y^{(0)} \in V$. Тогда по уже доказанному $x^{(0)} = g(y^{(0)})$ – внутренняя точка множества $U = g(V)$. Поскольку условия теоремы, в силу формулы (19), очевидно, выполнены в любой точке $y \in V$, то любая точка $x = g(y)$ является внутренней точкой множества U. Таким образом, U – открытая (и даже связная) окрестность точки $x^{(0)}$ в $\mathbf{R}^n$. Теперь доказано, что отображение $f : U \to V$ удовлетворяет утверждению теоремы. ◄

Следствие. Из теоремы следует, если G – область и $f : G \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяет условиям теоремы 2, то $f(G)$ – область в $\mathbf{R}^n$.

Пример. Часто теорема об обратной функции используется при переходе от одной системы координат к другой. Простейший вариант такого преобразования координат имеет вид $y = Ax$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $x = (x_1, ...x_n)$. Это линейное преобразование $A : \mathbf{R}^n_x \to \mathbf{R}^n_y$ имеет обратное $A^{-1} : \mathbf{R}^n_y \to \mathbf{R}^n_x$ тогда и только тогда, когда матрица $A = (a_{ij})$, $(i, j = \overline{1, n})$, обратима, то есть когда $\det A \neq 0$.

18.3. Условный или относительный экстремум

Рассмотрим вопрос о нахождении экстремума функции $n + m$ переменных

$$u = f(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m), \tag{1}$$

подчиненных m уравнениям связи

$$F_j(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) = 0, \quad j = \overline{1, m} \tag{2}$$

Мы уточним понятие о таком относительном экстремуме и укажем приемы для его отыскания.

Определение 1. Говорят, что в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$, где $x^{(0)} = (x^0_1, ..., x^0_n)$, $y^{(0)} = (y^0_1, ..., y^0_m)$, удовлетворяющей уравнениям связи (2), функция f имеет условный (относительный) максимум (минимум), если в некоторой окрестности $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ этой точки выполняются неравенства $f(x, y) \le f(x^{(0)}, y^{(0)})$, $(f(x, y) \ge f(x^{(0)}, y^{(0)}))$ для всех точек $(x, y) \in U$, удовлетворяющих уравнениям связи (2).

Если, например, речь идет о функции трех переменных $u = f(x, y, z)$, подчиненных уравнению связи $F(x, y, z) = 0$, то отыскание относительного экстремума функции f геометрически означает, что экстремум ищется не в трехмерной области, а на поверхности в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$. Наличие двух уравнений $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$ означает, что экстремум функции f ищется на кривой в пространстве $\mathbf{R}^3$.

Будем предполагать, что в окрестности $U(x^{(0)}, y^{(0)})$ точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ функция f и все функции (2) имеют непрерывные частные производные по всем аргументам. Пусть далее в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ отличен от нуля хоть один из определителей m - го порядка матрицы частных производных (матрицы Якоби) системы функций (2), которая имеет порядок $m \times (n + m)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Например, пусть не равен нулю определитель

$$J = \frac{D(F_1, ..., F_m)}{D(y_1, ..., y_m)} \neq 0. \tag{4}$$

Тогда для достаточно малой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ система уравнений (2), согласно теореме 1 предыдущего параграфа, будет равносильна системе

$$y_j = f_j(x_1, ..., x_n), \quad j = \overline{1, m}, \tag{5}$$

где $f_1, ..., f_m$ – неявные функции, определяемые системой (2). Иными словами, требование, чтобы переменные $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m$ удовлетворяли уравнениям связи (2) можно заменить предположением, что переменные $y_1, ..., y_m$ представляют собой функции (5) от переменных $x_1, ..., x_n$. Таким образом, вопрос об условном экстремуме для функции (1) от $n + m$ переменных в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ сводится к вопросу об обычном экстремуме для сложной функции от n переменных

$$u = f(x, f_1(x), ..., f_m(x)), \quad x \in \mathbf{R}^n \tag{6}$$

в точке $x^{(0)} = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Однако указанный путь требует фактически разрешить уравнения связи (2) относительно переменных $y = (y_1, ..., y_m)$, что далеко не всегда возможно.

Укажем теперь другой путь для нахождения точки условного экстремума $(x^{(0)}, y^{(0)})$, не предполагая, что мы имеем явные выражения для функций (5), хотя существование этих функций будем предполагать и здесь. Итак, пусть в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ функция $f(x, y)$ имеет относительный экстремум, или, что то же, сложная функция (6) имеет в этой точке абсолютный экстремум. Тогда в этой точке должны обращаться в нуль все частные производные по x_i, $i = \overline{1, n}$, а следовательно, и ее дифференциал. Ввиду инвариантности формы первого дифференциала, это условие можно записать так:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_j}\, dy_j = 0, \tag{7}$$

где под dy_j, $j = \overline{1, m}$ понимаются дифференциалы функций (5), вычисленные в точке $x^{(0)}$, ибо $y_j^{(0)} = f_j(x^{(0)})$, $x^{(0)} = (x_1^0, ..., x_n^0)$, $y^{(0)} = (y_1^0, ..., y_m^0)$. Из (7) нельзя заключить о равенстве нулю всех коэффициентов при дифференциалах переменных, так как не все эти дифференциалы произвольны. Для того, чтобы свести дело к произвольно выбираемым дифференциалам, то есть к дифференциалам dx_i, $i = \overline{1, n}$, нужно исключить в (7) дифференциалы зависимых переменных dy_j, $j = \overline{1, m}$. Это легко сделать, если продифференцировать уравнения связи (2), понимая под y_j функции (5). Тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F_k}{\partial y_j}\, dy_j = 0, \quad k = \overline{1, m}. \tag{8}$$

Здесь, как и выше, частные производные вычислены в точке $x^{(0)}$ ввиду зависимости $y_j^{(0)} = f_j(x^{(0)})$, $j = \overline{1, m}$. Поскольку определитель (4) $J = det(\partial F_k / \partial y_j)$, $k, j = \overline{1, m}$, не равен нулю в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$, то дифференциалы dy_j могут быть найдены из (8) как линейные функции дифференциалов dx_i, $i = \overline{1, n}$. Подставив дифференциалы dy_j в формулу (7), получим равенство вида

$$A_1 dx_1 + ... + A_n dx_n = 0, \tag{9}$$

где A_i, $i = \overline{1, n}$, означают выражения, рациональные относительно частных производных функций F_j, и здесь взятых в точке $x^{(0)}$. Так как в (9) фигурируют только дифференциалы dx_i независимых переменных, то есть произвольные числа, то в точке $x^{(0)}$ имеем $A_i = 0$, $i = \overline{1, n}$. Эти равенства вместе с уравнениями связи (2) дают $n+m$ уравнений для определения неизвестных $x = (x_1, ..., x_n)$

и $y = (y_1, ..., y_m)$. Конечно, эти равенства являются лишь необходимым условием для экстремальной точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Но и в таком виде условия могут быть полезны для разыскания наибольшего или наименьшего значений функции f при условиях (2).

18.4. Метод неопределенных множителей Лагранжа

В изложенных выше способах нахождения условного экстремума функции многих переменных нарушается симметрия в отношении этих переменных: часть из них трактуются как независимые, другие как зависимые. Иногда это влечет за собой усложнение выкладок. Лагранж предложил метод, при котором все переменные играют одинаковую роль.

Умножим равенства (8) п. 18.3 на произвольные пока неопределенные множители λ_j, $j = \overline{1, m}$, называемые множителями Лагранжа, и результаты почленно сложим с равенством (7) п. 18.3. Мы получим следующее соотношение

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \right) dx_i + \\ + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial y_j} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_j} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_j} \right) dy_j = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где по-прежнему dy_j означают дифференциалы неявных функций $y_j = f_j(x_1, ..., x_n)$, производные в формуле (1) вычисляются в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$. Выберем теперь параметры λ_j, $j = \overline{1, m}$, так, чтобы обращались в нуль коэффициенты при зависимых дифференциалах dy_j в формуле (1)

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial y_j} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial y_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Это можно сделать, поскольку определитель системы уравнений (2) отличен от нуля. При выбранных значениях множителей Лагранжа λ_j в равенстве (1) пропадает вторая сумма, и оно примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_i} \right) dx_i = 0. \tag{3}$$

Здесь мы снова имеем дело лишь с дифференциалами независимых переменных dx_i, $i = \overline{1, n}$. Коэффициенты при этих дифференциалах должны равняться нулю, то есть наряду с (2) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + ... + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Таким образом для определения $n + m$ переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ и $y = (y_1, ..., y_m)$, да еще m множителей Лагранжа $\lambda_1, ..., \lambda_m$, имеем столько же уравнений, именно, m уравнений связи $F_j(x, y) = 0$, $j = \overline{1, m}$, $n+m$ уравнений (2) и (3). Чтобы упростить запись этих уравнений обычно вводят вспомогательную функцию Лагранжа

$$\Phi = f + \lambda_1 F_1 + ... + \lambda_m F_m. \tag{5}$$

Тогда упомянутые уравнения можно записать в виде системы

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{6}$$

Они выглядят также, как и условия обыкновенного экстремума для функции Φ. Это следует рассматривать лишь как указание, облегчающее запоминание. Метод Лагранжа приводит лишь к необходимым условиям экстремума.

18.5. Понятие независимости функций

Рассмотрим систему функций

$$y_k = f_k(x_1, ..., x_n), \quad k = \overline{1, m}, \tag{1}$$

определенных и непрерывных вместе со своими частными производными первого порядка в области $G \subset \mathbf{R}^n$. Может случиться, что одна или несколько функций, например, y_k, где k – фиксировано, является функцией остальных

$$y_k = \Phi(y_1, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ..., y_m). \tag{2}$$

Существенно, что функция Φ в числе своих аргументов не содержит переменных x_i. Функция Φ предполагается непрерывной функцией от всех своих аргументов с непрерывными частными производными первого порядка в $(m-1)$ - мерной области E изменения переменных $y_1, ..., y_{k-1}, y_{k+1}, ..., y_m$, которые принимают эти функции, когда точка $x = (x_1, ..., x_n) \in G \subset \mathbf{R}^n$. При этом мы подразумеваем, что равенство (2) выполняется тождественно относительно точки

$x \in G$. Тогда говорят, что в области G функция y_k зависит от остальных функций. В частности, так будет, если y_k является постоянной, в этом случае можно положить $\Phi = const$.

Функции $y_1, ..., y_m$ называют зависимыми в области G, если одна или несколько функций из (1) являются функциями остальных (2). Если ни в области G, ни в какой-либо ее части не имеет место тождество (2), то функции $y_1, ..., y_m$ называют независимыми в области G. Ответ на вопрос о независимости функций дает рассмотрение функциональной матрицы системы (1), состоящей из частных производных этих функций по всем переменным, то есть матрицы Якоби

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

предполагается, что $n \geq m$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (о независимости функций). Если хоть один определитель m -го порядка матрицы (3) отличен от нуля в области $G \subset \mathbf{R}^n$, то в этой области функции $y_1, ..., y_m$ независимы.

► Пусть определитель

$$J = \det f'(x) = \det \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right), \quad i, k = \overline{1, m} \tag{4}$$

не равен нулю. Если бы не равным нулю был другой определитель, то изменив нумерацию переменных, можно было бы свести вопрос к рассматриваемому случаю. Доказательство теоремы будем вести от противного. Предположим, что одна из функций, например, y_m, выражается через другие, так что $y_m = \Phi(y_1, ..., y_{m-1})$ хотя бы в некоторой части области G. Продифференцировав это тождество по каждой из переменных x_i, $i = \overline{1, n}$, мы получим ряд тождеств вида

$$\frac{\partial y_m}{\partial x_i} = \frac{\partial y_m}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_i}.$$

Мы видим, что элементы последней строки определителя (4) получаются путем сложения соответствующих элементов первых $m-1$ строк, умноженных предварительно на множители $\dfrac{\partial y_m}{\partial y_1}, ..., \dfrac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}$. Такой определитель, как известно, равен нулю, что противоречит условиям теоремы. ◄

Переходя к общему случаю, введем следующее определение.

Определение 1. Рангом функциональной матрицы (3) в области $G \subset \mathbf{R}^n$ называется наивысший из порядков определителей этой матрицы, не обращающийся в нуль тождественно в области G.

Если ранг матрицы (3) равен $r \geq 1$, то существует хотя бы один определитель порядка r, составленный из элементов матрицы (предполагается, что $m \geq r$ и $n \geq r$) и не равный тождественно нулю в области G, в то время как все определители порядка выше r тождественно равны нулю.

Говорят, что ранг r матрицы достигается в точке $x^{(0)} \in G \subset \mathbf{R}^n$, если определитель r - го порядка отличен от нуля в этой точке.

Теорема 2 (о независимости функций). Пусть ранг функциональной матрицы (3) в области $G \subset \mathbf{R}^n$ равен $r \geq 1$ и достигается он в точке $x^{(0)} \in G$. Тогда в некоторой окрестности $U(x^{(0)})$ этой точки r функций y_k из $m > r$ будут независимыми, а остальные $m - r$ функций y_k от них зависят. При этом независимыми будут именно те функции, производные которых входят в определитель, отличный от нуля в точке $x^{(0)} \in G$.

► Рассмотрим систему функций (1), и пусть ранг функциональной матрицы (3) равен r и достигается в точке $x^{(0)} \in G$. Для определенности положим, что определитель

$$J = \det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = \overline{1, r} \tag{5}$$

отличен от нуля в точке $x^{(0)} \in G$. Ввиду непрерывности частных производных, определитель $J \neq 0$ в некоторой окрестности $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, так что по теореме 1 в этой окрестности функции $y_1, ..., y_r$ независимы. Положим $f_j(x^{(0)}) = y_j^{(0)}$, $j = \overline{1, r}$, и применим к системе уравнений

$$f_1(x_1, ..., x_n) - y_1 = 0, ..., f_r(x_1, ..., x_n) - y_r = 0 \tag{6}$$

с $n + r$ переменными в окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$, $y^{(0)} = (y_1^0, ..., y_r^0)$, которая удовлетворяет системе (6), теорему 1 § 18.2 о неявной функции. Именно, пользуясь тем, что определитель, составленный из частных производных от левых частей уравнений (6) по $x_1, ..., x_r$ в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$ отличен от нуля, мы можем утверждать, что в некоторой окрестности этой точки $P = P_x \times P_y$, где

$P_x = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n : |x - x^{(0)}| < \delta\}$, $P_y = \{y \in \mathbf{R}^r : |y - y^{(0)}| < \Delta\}$, система (6) определяет $x_1, ..., x_r$ как однозначные функции от $x_{r+1}, ..., x_n, y_1, ..., y_r$:

$$
\begin{gathered}
x_1 = \varphi_1(x_{r+1}, ..., x_n, y_1, ..., y_r), \\
\cdots \\
x_r = \varphi_r(x_{r+1}, ..., x_n, y_1, ..., y_r).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Напомним, что в области $P = P_x \times P_y$ системы (6) и (7) равносильны: точки этой области, удовлетворяющие одной из систем, удовлетворяют и другой. Из теоремы 1 § 18.2 следует, что если вместо $x_1, ..., x_r$ подставить в (6) функции (7), то получаются тождества относительно переменных $x_{r+1}, ..., x_n, y_1, ..., y_r$ в параллелепипеде $P'_x \times P_y$, $P'_x = \{x \in \mathbf{R}^{n-r} : |x_i - x_i^{(0)}| < \delta_i, \, i = \overline{r+1, n}\}$. Но для нас важно и другое, если вместо $y_1, ..., y_r$ подставить в (7) функции (1), то есть $f_1, ..., f_r$, то получатся тождества относительно переменных $x_1, ..., x_r$ по-крайней мере в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$: $P^*_x \subset P_x$ и, кроме того, для точки $x \in P^*_x$ значения функций $y = (y_1, ..., y_r) \in P_y$. Это можно осуществить ввиду непрерывности функций $f_1, ..., f_r$, принимающих в точке $x^{(0)}$ значения $y_1^0, ..., y_r^0$. Действительно, тогда точка (x, y) попадает в промежуток $P = P_x \times P_y$, и одновременно с равенствами (6) должны выполняться равенства (7). Обратимся теперь к функциям

$$
y_{r+1} = f_{r+1}(x_1, ..., x_n), \; ... \; , y_m = f_m(x_1, ..., x_n). \tag{8}
$$

Подставив сюда вместо $x_1, ..., x_r$ функции (7), получим

$$
\begin{gathered}
y_k = f_k(\varphi_1(x_{r+1}, ..., x_n, y), ..., \varphi_r(x_{r+1}, ..., x_n, y), x_{r+1}, ..., x_n) \; = \\
= \; \Phi_k(x_{r+1}, ..., x_n, y), \quad k = \overline{r+1, m},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где $y = (y_1, ..., y_r)$.

Если в эти равенства вместо $y = (y_1, ..., y_m)$ подставить, соответственно, функции $f_1, ..., f_m$ из (1), то они тождественно удовлетворятся относительно x в области P^*_x.

Для того, чтобы убедиться в зависимости функций $y_{r+1}, ..., y_m$ от функций $y_1, ..., y_r$ остается лишь доказать, что функции $\Phi_{r+1}, ..., \Phi_m$ в (9) на самом деле аргументов $x_{r+1}, ..., x_n$ не содержат, так что (9) можно написать так

$$
y_{r+1} = \Phi_{r+1}(y), \quad ..., \quad y_m = \Phi_m(y), \quad y = (y_1, ..., y_r)
$$

С этой целью, очевидно, достаточно установить, что

$$\frac{\partial \Phi_{r+1}}{\partial x_i} = ... = \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{r+1, n}. \tag{10}$$

тождественно относительно $x_{r+1}, ..., x_n, y$. По определению функций $\Phi_{r+1}, ..., \Phi_m$:

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} = \frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f_k}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \quad k = \overline{r+1, m},\ i = \overline{r+1, n}. \tag{11}$$

С другой стороны, если продифференцировать по $x_{r+1}, ..., x_n$ уравнения (6), считая $x_1, ..., x_r$ функциями $x_{r+1}, ..., x_n, y_1, ..., y_r$, то получим равенства

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{r+1, n}, \\
\cdots \\
\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f_r}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial f_r}{\partial x_i} = 0,\ i = \overline{r+1, n},
\end{gathered} \tag{12}$$

линейные относительно величин $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}$, $i = \overline{r+1, n}$. Из линейных равенств (12), как следствие, вытекают линейные равенства

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + ... + \frac{\partial f_k}{\partial x_r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0, \quad k = \overline{r+1, m},\ i = \overline{r+1, n}, \tag{13}$$

потому что определители $(r+1)$ - го порядка, состоящие из коэффициентов при величинах $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}, ..., \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}$ в (12), и из свободных членов

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} & \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} & \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \\
\frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_r} & \frac{\partial f_k}{\partial x_i}
\end{vmatrix}, \quad k = \overline{r+1, n},\ i = \overline{r+1, n}, \tag{14}$$

тождественно равны нулю (ранг матрицы (3) равен r). Сопоставляя (13) и (11), приходим к требуемому результату – тождествам (10).

Первый столбец умножим на $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}$, второй на $\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}$, r-й на $\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_i}$ и сложим с последним, тогда последний столбец имеет все нули, кроме последнего элемента, который и есть (13), так как определитель (14) равен нулю, то и этот элемент равен нулю. ◀

ГЛАВА 19. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

19.1 Интеграл Римана на n - мерном промежутке

Определение 1. Множество $P(a;b) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, a_i \leq x_i \leq b_i,\, i = \overline{1,n}\}$ называется n - мерным параллелепипедом или промежутком в $\mathbf{R}^n$.

Определение 2. Каждому промежутку $P(a;b)$ ставится в соответствие число $|P| = \Pi_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, называемое объемом или мерой промежутка. Объем (меру) обозначают также символом $\mu(P)$.

Лемма 1. Мера промежутка в $\mathbf{R}^n$:

a) однородна, то есть $|P(\lambda a; \lambda b)| = \lambda^n |P(a;b)|$;

b) аддитивна, то есть если $P = \cup_{j=1}^{k} P_j$ и промежутки P_j попарно не имеют общих внутренних точек, то $|P| = \sum\limits_{j=1}^{k} |P_j|$;

c) если $P \subset \cup_{j=1}^{k} P_j$, (то есть промежуток P покрыт системой промежутков P_j, $j = \overline{1,k}$), то $|P| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} |P_j|$.

► Эти утверждения очевидны и легко получаются из определений 1 и 2. ◄

Пусть задан промежуток $P(a;b)$, производя разбиение отрезков $[a_i, b_i]$, $i = \overline{1,n}$, на части, мы получим разбиение n - мерного промежутка P на части P_j, $j = \overline{1,k}$, так, что $P = \cup_{j=1}^{k} P_j$. Разбиение обозначим $Q = \{P_j\}$. Наибольший из диаметров промежутков $\lambda(Q) = \max\limits_{j} d(P_j)$ называется параметром разбиения Q. В каждом из промежутков P_j разбиения Q фиксируем точку $\xi^{(j)} \in P_j$, тогда получим разбиение промежутка с отмеченными точками, обозначенное (Q, ξ), где $Q = \{P_1, ..., P_k\}$, $\xi = \{\xi^1, ..., \xi^k\}$.

Определение 3. Пусть $f : P \to \mathbf{R}$ – вещественнозначная функция, заданная на промежутке $P \subset \mathbf{R}^n$, а (Q, ξ) – разбиение этого промежутка с отмеченными точками. Выражение

$$\sigma(f, Q, \xi) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi^{(j)})|P_j| \tag{1}$$

называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$, соответствующей разбиению (Q, ξ) промежутка $P \subset \mathbf{R^n}$.

Определение 4. Величина

$$\int\limits_P f(x)dx = \lim_{\lambda(Q) \to 0} \sigma(f, Q, \xi), \tag{2}$$

где $\lambda(Q)$ – параметр разбиения, если указанный предел существует, называется кратным интегралом Римана от функции f на промежутке P.

Определение 5. Если для функции $f : P \to \mathbf{R}$, $P \subset \mathbf{R}^n$, существует конечный предел (2), то функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману функцией на промежутке P, пишут $f \in \Re(P)$.

Определение 6. Под пределом интегральных сумм Римана (2) понимается число J, если для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta{>}0$ такое, что для $\forall(Q,\xi)$ промежутка P с параметром разбиения $\lambda(Q) < \delta$ выполняется неравенство

$$\Big|J - \sum_{j=1}^{k} f(\xi^{(j)})|P_j|\Big| < \varepsilon.$$

Замечание. Данные выше определения и весь процесс построения кратного интеграла на промежутке $P \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$ повторяет аналогичную процедуру построения определенного интеграла Римана на отрезке.

Наряду с указанным обозначением кратного интеграла, употребляются развернутые обозначения

$$\int\limits_P f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n \quad \text{или} \quad \int\limits_P \overset{(n)}{\cdots} \int f(x_1, ..., x_n)dx_1...dx_n.$$

Критерий Коши существования предела интегральных сумм Римана формулируется следующим образом: для существования предела J необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta{>}0$ такое, что для любых разбиений (Q', ξ') и (Q'', ξ'') промежутка P, для которых $\lambda(Q') < \delta$ и $\lambda(Q'') < \delta$, выполнялось неравенство

$$|\sigma(f, Q', \xi') - \sigma(f, Q'', \xi'')| < \varepsilon$$

Теорема 1. (необходимое условие интегрируемости). Если функция $f \in \Re(P)$, то она ограничена на промежутке P.

► Пусть Q – разбиение промежутка P. Если функция f неограничена на P, то она неограничена на некотором промежутке P_j разбиения Q. Если (Q, ξ) и (Q, η) – два разбиения Q промежутка P с отмеченными точками ξ и η, которые отличаются только выбором точек $\xi^{(j)}$ и $\eta^{(j)}$ в промежутке P_j, то

$$|\sigma(f, Q, \xi) - \sigma(f, Q, \eta)| = |f(\xi^{(j)}) - f(\eta^{(j)})| \cdot |P_j|.$$

Меняя одну из точек $\xi^{(j)}$ или $\eta^{(j)}$ при неограниченности функции f в P_j, мы можем сделать правую часть равенства сколь угодно большой. В силу критерия Коши отсюда следует, что интегральная сумма функции f не имеет конечного предела при $\lambda(Q) \to 0$. ◄

Замечание. Для доказательства можно было использовать метод, примененный в аналогичной теореме для функций одной переменной.

19.2 Критерий интегрируемости Лебега

Определение 1. Говорят, что множество $E \subset \mathbf{R}^n$ имеет меру нуль в смысле Лебега, если для $\forall\,\varepsilon{>}0$ найдется покрытие множества E не более чем счетной системой n - мерных промежутков $\{P_J\}$, сумма объемов которых $\sum\limits_j |P_j| < \varepsilon$.

Будем говорить, что некоторое свойство имеет место почти всюду на $E \subset \mathbf{R^n}$, если подмножество $X \subset E$, где это свойство может нарушаться, имеет меру нуль.

Лемма 1. Справедливы утверждения:

a) объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры Лебега нуль;

b) подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль;

c) точка и конечное число точек есть множество меры нуль;

d) невырожденный промежуток $P(a;b)$ не является множеством меры нуль в $\mathbf{R}^n$.

► a) Пусть $E = \bigcup\limits_m E_m$ – объединение множеств меры нуль. По $\varepsilon{>}0$ для каждого E_m строим покрытие $\{P_m^{(k)}\}$ такими промежутками, что $\sum\limits_k \left|P_m^{(k)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2^m}$. Поскольку объединение счетных множеств есть счетное множество, промежутки $P_m^{(k)}$, $m, k \in \mathbf{N}$, образуют не более чем счетное покрытие множества E, причем

$$\sum_{m,k} \left|P_m^{(k)}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + ... + \frac{\varepsilon}{2^m} + ... = \varepsilon.$$

Порядок суммирования по индексам m и k безразличен, ибо любые частичные суммы ограничены числом ε. Итак, E есть множество меры нуль.

b) Это утверждение непосредственно следует из определения множества меры нуль и определения покрытия.

c) Точку можно покрыть интервалом сколь угодно малого объема. Вторая часть утверждения следует из a).

d) Поскольку промежуток $P(a;b)$ является компактом, из любого покрытия $P(a;b)$ можно выделить конечное покрытие. Сумма объемов промежутков, образующих покрытие, не меньше $|P(a;b)|$. ◄

Пример 1. Множество рациональных точек в $\mathbf{R^n}$ счетно и потому имеет меру нуль (рациональными называются точки, все координаты которых рациональны).

Пример 2. Пусть $f : P \to \mathbf{R}$ – непрерывная вещественнозначная функция, определенная на $(n-1)$ - мерном промежутке $P \subset \mathbf{R^{n-1}}$. Тогда график функции f в $\mathbf{R}^n$ есть множество n - мерной меры нуль.

► Поскольку функция f и равномерно непрерывна на P, то по $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta{>}0$, чтобы для любых точек $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in P$ при условии $d(x^{(1)},\, x^{(2)}) < \delta$ будем иметь $|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})| < \varepsilon$. Если взять разбиение Q промежутка P с параметром $\lambda(Q) < \delta$, то на каждом промежутке P_j такого разбиения колебание функции f будет меньше ε. Значит, если $x^{(j)}$ – любая фиксированная точка из P_j, то n - мерный промежуток $\overline{P}_j = P \times [f(x^{(j)}) - \varepsilon, f(x^{(j)}) + \varepsilon]$, очевидно, содержит всю часть графика функции f над промежутком P_j, а объединение $\bigcup\limits_j \overline{P}_j$ покрывает весь график функции f над промежутком P. Но

$$\sum_j \left|\overline{P}_j\right| = \sum_j |P_j| 2\varepsilon = 2\varepsilon |P|.$$

Здесь $|P_j|$ – объем промежутка P_j в $\mathbf{R}^{n-1}$, а $\left|\overline{P}_j\right|$ – объем $\overline{P}_j$ в $\mathbf{R}^n$. Таким образом, общий объем покрытия графика функции f можно сделать сколь угодно малым. ◄

Замечание. Из примера 2 и Леммы 1 следует, что график непрерывной функции $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^{n-1}$ есть множество n - мерной меры нуль.

Определение 2. Колебанием функции $f : E \to \mathbf{R}$ на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ называется величина

$$\omega(f, E) = \sup_{x^{(1)},\, x^{(2)} \in E} \left|f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})\right|.$$

Колебанием функции f в точке $x \in E$ называется величина

$$\omega(f, x) = \lim_{\delta \to 0} \omega(f, B(x, \delta))$$

где $B(x,\delta) \subset E$ – шаровая окрестность точки x. Для функции $f(x)$, непрерывной в точке $x \in E$, очевидно $\omega(f,x) = 0$.

Теорема 1. (обобщенная теорема Кантора). Если в каждой точке x компакта K для функции $f : K \to \mathbf{R}$ имеет место соотношение $\omega(f,x) \le \omega_0$, то для $\forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, \delta{>}0$ такое, что для $\forall x \in K$ будет выполняться неравенство $\omega(f, B(x,\delta)) < \omega_0 + \varepsilon$.

► При $\omega_0 = 0$ это утверждение превращается в теорему Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на компакте. Доказательство теоремы при $\omega_0 \ne 0$ повторяет схему доказательства теоремы Кантора, поэтому мы на нем не останавливаемся. ◄

Теорема 2. (критерий интегрируемости Лебега). Чтобы функция $f : P \to \mathbf{R}$, $P \subset \mathbf{R}^n$, была интегрируема на промежутке P : $f \in \Re(P)$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была ограничена на P и непрерывна почти всюду на P.

19.3 Критерий интегрируемости Дарбу

Определение 1. Пусть функция $f : P \to \mathbf{R}$ ограничена на промежутке $P \subset \mathbf{R}^n$, а Q – разбиение промежутка P. Положим

$$m_j = \inf_{x \in P_j} f(x), \quad M_j = \sup_{x \in P_j} f(x).$$

Величины

$$s(f,Q) = \sum_{j=1}^{k} m_j |P_j|, \quad S(f,Q) = \sum_{j=1}^{k} M_j |P_j|$$

называются соответственно нижней и верхней интегральными суммами Дарбу функции $f(x)$ на промежутке P, отвечающие разбиению Q этого промежутка.

Теорема 1. Для интегральных сумм Дарбу функции $f : P \to \mathbf{R}$ имеют место соотношения:

1) $s(f,Q) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,Q,\xi) \le \sigma(f,Q,\xi) \le \sup\limits_{\xi} \sigma(f,Q,\xi) = S(f,Q)$;

2) если разбиение Q' промежутка P получено измельчением промежутков разбиения Q, то $s(f,Q) \le s(f,Q') \le S(f,Q') \le S(f,Q)$;

3) для любой пары Q_1 и Q_2 разбиений промежутка P справедливо неравенство $s(f,Q_1) \le S(f,Q_2)$.

► Соотношения 1) и 2) непосредственно следуют из определений интегральных сумм Римана и Дарбу и определения нижней и верхней граней числового множества.

Для доказательства соотношения 3) возьмем третье разбиение Q, полученное пересечением промежутков разбиений Q_1 и Q_2. Разбиение Q можно рассматривать как измельчение разбиений Q_1 и Q_2, поэтому из соотношения 2) следует $s(f,Q_1) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,Q_2)$. ◄

Определение 2. Нижним и верхним интегралами Дарбу от функции $f : P \to \mathbf{R}$ на промежутке $P \subset \mathbf{R}^n$ называются величины

$$J_* = \sup_Q s(f,Q), \quad J^* = \inf_Q S(f,Q),$$

где операции sup и inf берутся по всевозможным разбиениям Q промежутка P.

Из этого определения и свойств сумм Дарбу следует, что для любого разбиения Q промежутка P имеют место неравенства: $s(f,Q) \leq J_* \leq J^* \leq S(f,Q)$.

Теорема 2 (критерий интегрируемости Дарбу). Для того чтобы ограниченная на промежутке $P \subset \mathbf{R}^\mathbf{n}$ функция $f : P \to \mathbf{R}$ была интегрируема на нем, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda\to 0}\big(S(f,Q) - s(f,Q)\big) = 0. \tag{1}$$

► *Необходимость.* Пусть функция $f \in \Re(P)$, то есть существует интеграл

$$J = \int\limits_P f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sigma(f,Q,\xi). \tag{2}$$

По определению предела для $\forall\varepsilon{>}0\ \exists\delta{=}\delta(\varepsilon){>}0$, что для $\forall(Q,\xi)$ при $\lambda(Q) < \delta$ выполняется неравенство

$$|\sigma - J| < \varepsilon \iff J - \varepsilon < \sigma < J + \varepsilon. \tag{3}$$

Согласно теореме 1

$$s(f,Q) = \inf_\xi \sigma(f,Q,\xi), \quad S(f,Q) = \sup_\xi \sigma(f,Q,\xi)$$

Поэтому из (3) следует

$$J - \varepsilon \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq J + \varepsilon$$

Таким образом, при $\lambda(Q) < \delta$ будет $S(f,Q) - s(f,Q) \leq 2\varepsilon$. Это неравенство означает выполнение условия (1).

Достаточность. Пусть функция $f : P \to \mathbf{R}$ ограничена на P и выполняется условие (1). Тогда из неравенства $s(f,Q) \leq J_* \leq J^* \leq S(f,Q)$ и условия (1) ясно, что $J_* = J^*$, обозначим их общее значение J. Для одного и того же разбиения Q промежутка P имеем

$$s(f,Q) \leq J \leq S(f,Q), \quad \text{и} \quad s(f,Q) \leq \sigma(f,Q,\xi) \leq S(f,Q) \tag{4}$$

Из этих неравенств вытекает

$$|\sigma(f,Q,\xi) - J| \leq S(f,Q) - s(f,Q) \tag{5}$$

Согласно условию (1) для $\forall \varepsilon{>}0\ \exists \delta{=}\delta(\varepsilon){>}0$, что для $\forall (Q,\xi)$ с $\lambda(Q) < \delta$ будет $|S(f,Q) - s(f,Q)| < \varepsilon$, тогда из (5) получим $|\sigma - J| < \varepsilon$, что означает существование интеграла. ◄

Следствие 1. Из критерия интегрируемости Дарбу следует, что если функция $f : P \to \mathbf{R}$ интегрируема на промежутке $P \subset \mathbf{R}^n$, то есть $f \in \Re(P)$, то ее нижний и верхний интегралы Дарбу совпадают между собой и равны значению интеграла Римана от этой функции: $J_* = J^* = J$.

19.4 Интеграл по множеству

Здесь рассмотрим интегрирование функции не только по промежутку $P(a;b)$, но и по другим не слишком сложным множествам в $\mathbf{R}^n$.

Определение 1. Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ называют допустимым, если оно ограничено в $\mathbf{R}^n$ и его граница ∂E есть множество меры Лебега нуль.

Напомним, что граница ∂E множества $E \subset \mathbf{R^n}$ состоит из точек, в любой окрестности которых имеются как точки множества E, так и точки, ему не принадлежащие.

Лемма 1. Для любых множеств E, E_1, $E_2 \subset \mathbf{R^n}$ справедливы утверждения:
1) ∂E – замкнутое в $\mathbf{R^n}$ множество;
2) $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;
3) $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$;
4) $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Лемма 2. Объединение или пересечение конечного числа допустимых множеств является допустимым множеством; разность допустимых множеств есть допустимое множество.

Замечание 1. Для бесконечного числа допустимых множеств лемма 2, вообще говоря, не верна, как и утверждения 2) и 3) леммы 1.

Замечание 2. Граница допустимого множества не только замкнутое, но и ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, то есть это компакт в $\mathbf{R^n}$. Значит, ее можно покрыть конечной системой промежутков со сколь угодно малым объемом.

Определение 2. Характеристической функцией допустимого множества $E \subset \mathbf{R^n}$ называется функция

$$h_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

Функция $h_E(x)$ имеет разрывы только в точках множества ∂E. Значит, если E – допустимое множество, то функция $h_E(x)$ непрерывна почти всюду в $\mathbf{R}^n$.

Определение 3. Пусть функция $f : E \to \mathbf{R}$ определена на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$. Символом $fh_E(x)$ будем обозначать функцию, равную $f(x)$ при $x \in E$ и равную нулю вне E, хотя функция $f(x)$ вне E не определена.

Определение 4. Интеграл от функции $f(x)$ по множеству $E \subset \mathbf{R}^n$ определяется соотношением

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{P \supset E} fh_E(x)dx, \tag{1}$$

где P – произвольный промежуток, содержащий множество E.

Если интеграл в правой части равенства существует, то функция $f : E \to \mathbf{R}$ называется интегрируемой по Риману на множестве E. Если этот интеграл не существует, то говорят, что функция $f(x)$ не интегрируема по Риману на множестве E.

Определение 4 требует пояснения, которое дается ниже леммой.

Лемма 3. Если P_1 и P_2 – два промежутка в $\mathbf{R}^n$, содержащие порознь множество E, то интегралы

$$\int\limits_{P_1} fh_E(x)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{P_2} fh_E(x)dx$$

существуют или не существуют одновременно, причем в первом случае их значения совпадают.

► Рассмотрим промежуток $P = P_1 \cap P_2$. По условию $E \subset P$. Точки разрыва функции $fh_E(x)$ либо совпадают с точками разрыва функции f на E, либо происходят от разрывов функции $h_E(x)$ и лежат на ∂E. Во всяком случае, все эти точки лежат в $P = P_1 \cap P_2$. По критерию Лебега отсюда следует, что интегралы от функции $fh_E(x)$ по промежуткам P, P_1, P_2 существуют или нет одновременно. Если они существуют, то мы вправе выбирать разбиения промежутков P, P_1, P_2 по своему усмотрению. Будем брать только те разбиения промежутков P_1 и P_2, которые получаются продолжением разбиений промежутка $P = P_1 \cap P_2$. Поскольку вне P рассматриваемая функция равна нулю, интегральные суммы Римана, отвечающие описанным разбиениям промежутков P_1 и P_2, сведутся к интегральной сумме соответствующего разбиения промежутка P. После предельного перехода при $\lambda \to 0$ отсюда получим, что интегралы по P_1 и P_2 равны интегралу от функции f по промежутку P. ◄

Из критерия Лебега существования интеграла на промежутке и определения 2 следует следующая теорема

Теорема 1 (критерий интегрируемости Лебега). Функция $f : E \to \mathbf{R}$ интегрируема на допустимом множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда она ограничена на E и непрерывна почти всюду на множестве E.

► Функция $fh_E(x)$ по сравнению с функцией $f(x)$ может иметь дополнительные точки разрыва лишь на ∂E, которая по условию является множеством меры нуль. ◄

Мера Жордана допустимого множества и её геометрический смысл

Определение 5. Мерой Жордана допустимого множества $E \subset \mathbf{R}^n$ называют величину интеграла $\mu(E) = \int\limits_E 1dx$, если указанный интеграл Римана существует.

Поскольку

$$\int\limits_E dx = \int\limits_{P \supset E} h_E(x)dx$$

и множество точек разрыва функции $h_E(x)$ совпадает с ∂E, то по критерию Лебега получаем, что так введенная мера определена только для допустимых множеств. Допустимые множества и только они являются измеримыми по Жордану.

Выясним геометрический смысл величины $\mu(E)$. Если E – допустимое множество, то по определению интеграла по множеству

$$\mu(E) = \int\limits_{P \supset E} h_E(x)dx = J_* = J^*,$$

где J_*, J^* – нижний и верхний интегралы Дарбу функции $h_E(x)$, $P \subset \mathbf{R}^n$ – любой промежуток, содержащий множество E. В силу критерия Дарбу существования интеграла, мера $\mu(E)$ определена тогда и только тогда, когда J_* и J^* совпадают. Тогда $s(h_E, Q) \leq \mu(E) \leq S(h_E, Q)$, где s и S – нижняя и верхняя интегральные суммы Дарбу функции $h_E(x)$, отвечающие разбиению Q промежутка P. Но в силу определения функции $h_E(x)$ суммы $s(h_E, Q)$ и $S(h_E, Q)$ равны соответственно объемам вписанных и описанных промежутков (многогранников) для множества E. По критерию интегрируемости Дарбу имеем

$$\lim_{\lambda \to 0}(S(h_E, Q) - s(h_E, Q)) = 0.$$

Значит, мера Жордана $\mu(E)$ есть общий предел объемов этих многогранников. Что совпадает с принятым представлением об объеме простых тел $E \subset \mathbf{R}^n$.

Замечание 3. Пределы сумм s и S при $\lambda \to 0$ существуют, так как суммы s не уменьшаются, а суммы S не увеличиваются при измельчении промежутков разбиения и ограничены сверху и снизу соответственно. Ввиду существования интеграла мы вправе брать такие Q.

Поясним теперь, почему введенная в определении 5 мера $\mu(E)$ множества E называется мерой Жордана.

Определение 6. Говорят, что множество $E \subset \mathbf{R}^n$ имеет меру нуль в смысле Жордана, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется покрытие множества E конечной системой n - мерных промежутков $\{P_j\}$, $j = \overline{1, k}$, сумма объемов которых $\sum\limits_{j=1}^{k} |P_j| < \varepsilon$.

По сравнению с мерой нуль в смысле Лебега здесь появилось требование конечного покрытия, которое сужает Лебеговский класс множеств меры нуль. Например, множество рациональных точек является множеством меры нуль в смысле Лебега, но не Жордана.

Для того, чтобы верхняя грань объемов вписанных в ограниченное множество E многогранников совпадала с нижней гранью объемов описанных около E многогранников (и служила мерой $\mu(E)$ или объемом), очевидно, необходимо и достаточно, чтобы граница ∂E множества E имела меру нуль в смысле Жордана.

Именно поэтому принимают определение.

Определение 7. Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ называется измеримым по Жордану, если оно ограничено в $\mathbf{R}^n$ и его граница ∂E имеет меру нуль в смысле Жордана.

Как видно из замечания 2, класс множеств, измеримых по Жордану, это в точности тот же класс допустимых множеств, который был введен определением 1. Вот почему определенная выше мера $\mu(E)$ может быть названа мерой Жордана множеств E, измеримых по Жордану.

19.5 Общие свойства интеграла

Свойство 1. Линейность интеграла.

1) Множество $\Re(E)$ функций, интегрируемых по Риману на допустимом множестве $E \subset \mathbf{R^n}$, является линейным пространством относительно стандартных операций сложения функций и умножения на число.

2) Интеграл Римана является линейным функционалом на пространстве $\Re(E)$:

$$J(f) = \int\limits_E f(x)dx : \Re(E) \to \mathbf{R}.$$

► Если учесть, что объединение множеств меры нуль также является множеством меры нуль, то условие 1) вытекает непосредственно из определения интеграла и критерия Лебега существования интеграла на промежутке.

Учитывая линейность интегральных сумм Римана, предельным переходом при $\lambda \to 0$ получаем линейность интеграла. ◄

Замечание 1. Поскольку предел интегральных сумм должен существовать при $\lambda \to 0$ независимо от выбора отмеченных точек ξ, то можно записать, что из $f \in \Re(E)$ и $f(x) = 0$ почти всюду на E следует $\int_E f(x)dx = 0$.

Таким образом, если две интегрируемые функции совпадают почти всюду на множестве E, то их интегралы по E равны.

Свойство 2. Аддитивность интеграла.

Пусть E_1 и E_2 – допустимые множества в $\mathbf{R}^n$, тогда для функции $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbf{R}$

1) имеют место соотношения

$f \in \Re(E_1 \cup E_2) \Longleftrightarrow \big(f \in \Re(E_1) \text{ и } f \in \Re(E_2)\big) \Longrightarrow f \in \Re(E_1 \cap E_2)$;

2) если дополнительно имеем условие $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$ в $\mathbf{R^n}$, то справедливо равенство

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

► Утверждение 1) следует из критерия Лебега существования интеграла Римана по допустимому множеству. При этом следует учесть, что объединение и пересечение допустимых множеств является допустимым множеством.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что

$$h_{E_1 \cup E_2}(x) = h_{E_1}(x) + h_{E_2}(x) - h_{E_1 \cap E_2}(x).$$

Тогда

$$\int\limits_{E_1 \cup E_2} f(x)dx = \int\limits_{P \supset E_1 \cup E_2} f h_{E_1 \cup E_2}(x)dx =$$

$$= \int\limits_{P} f h_{E_1}(x)dx + \int\limits_{P} f h_{E_2}(x)dx - \int\limits_{P} f h_{E_1 \cap E_2}(x)dx =$$

$$= \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Так как $\int_P f h_{E_1 \cap E_2}(x)dx = 0$ ввиду $\mu(E_1 \cap E_2) = 0$. (Функция $f h_{E_1 \cap E_2}(x) \neq 0$ на множестве меры нуль.) ◄

Свойство 3. Оценки интеграла.

Если функция $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subset \mathbf{R}^n$ и $f \in \Re(E)$, то

1) $|f| \in \Re(E)$, причем

$$\left| \int\limits_{E} f(x)dx \right| \leq \int\limits_{E} \big|f(x)\big|\, dx;$$

2) для $f(x) \geq 0$ при $\forall x \in E$ имеем $\int_E f(x)dx \geq 0$.

► Утверждение $|f| \in \Re(E)$ следует из определения интеграла по множеству и критерия Лебега интегрируемости функции на промежутке. Само неравенство получается предельным переходом из неравенства для интегральных сумм Римана.

Неравенство из утверждения 2) очевидным образом вытекает из предыдущего. ◀

Из последнего утверждения получим следствия.

Следствие 1. $\big(f, g \in \Re(E)$ и $f \le g$ на $E\big) \implies \int\limits_E f(x)dx \le \int\limits_E g(x)dx.$

Следствие 2. Если $f \in \Re(E)$ и $m \le f(x) \le M$ для $\forall x{\in}E$, то

$$m\mu(E) \le \int\limits_E f(x)dx \le M\mu(E).$$

Следствие 3. (первая теорема о среднем). Если $f \in \Re(E)$ и $m = \inf\limits_{x\in E} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$, то $\exists\, \theta \in [m, M]$, что $\int\limits_E f(x)dx = \theta\mu(E)$.

Следствие 4. Если функция $f : E \to \mathbf{R}$ непрерывна на допустимом связном множестве $E \subset \mathbf{R}^n$, то найдется точка $\xi \in E$, что $\int\limits_E f(x)dx = f(\xi)\mu(E)$.

Следствие 5. (вторая теорема о среднем). Если функции $f, g \in \Re(E)$ и при $\forall x{\in}E$ выполняются неравенства $m \le f(x) \le M$, $g(x) \ge 0$, то

$$m\int\limits_E g(x)dx \le \int\limits_E f(x)g(x)dx \le M\int\limits_E g(x)dx.$$

Это утверждение называется теоремой о среднем для кратного интеграла.

▶ Оно вытекает из неравенства $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$, линейности интеграла и следствия 1. Интегрируемость произведения $f \cdot g$ функций f и g следует из критерия Лебега. ◀

Лемма 1. Если интеграл от неотрицательной функции $f : P \to \mathbf{R}$ на промежутке $P \subset \mathbf{R}^n$ равен нулю, то функция $f(x) = 0$ почти всюду на P. Утверждение остается в силе, если промежуток P заменить любым допустимым множеством $E \subset \mathbf{R}^n$.

▶ По критерию Лебега, если функция $f \in \Re(P)$, то она непрерывна почти всюду на P. Покажем, если функция f непрерывна в точке $a \in P$, то $f(a) = 0$. Пусть $f(a) > 0$, тогда $f(x) \ge C > 0$ в некоторой окрестности $U(a)$ (эту окрестность можно считать промежутком). Из свойств интеграла получим

$$\int\limits_P f(x)dx = \int\limits_{U(a)} f(x)dx + \int\limits_{P\setminus U(a)} f(x)dx \ge \int\limits_{U(a)} f(x)dx \ge C\mu(U(a)) > 0.$$

Полученное противоречие доказывает первое утверждение. Если применить его к функции $fh_E(x)$ и учесть, что $\mu(\partial E) = 0$, то получим второе утверждение. ◀

Замечание 1. Неравенство следствия 5 равносильно равенству

$$\int\limits_E f(x)g(x)dx = \theta \int\limits_E g(x)dx, \quad m \le \theta \le M.$$

► Действительно, если $\int\limits_E g(x)dx = 0$, то утверждение очевидно. Если $\int\limits_E g(x)dx \neq 0$, то положим

$$\theta = \left(\int\limits_E g(x)dx\right)^{-1} \int\limits_E f(x)g(x)dx$$

В силу неравенств свойства 5, $m \le \theta \le M$. ◄

19.6 Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини

Здесь будет рассмотрена одна теорема, которая, наряду с теоремой о замене переменных, является инструментом для вычисления кратных интегралов.

Пусть $P = X \times Y$ – промежуток в пространстве $\mathbf{R}^{n+m}$, являющийся прямым произведением промежутков $X \subset \mathbf{R^n}$ и $Y \subset \mathbf{R}^m$. Обозначим $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy$ – интеграл от функции $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ по промежутку $X \times Y$, записанный в переменных $x \in X$ и $y \in Y$. Символы $\int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy$ и $\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)dx$ называют повторными интегралами, они понимаются следующим образом: сначала вычисляется внутренний интеграл, вторая переменная фиксирована, затем вычисляется внешний интеграл.

При этом, если для некоторых точек $x \in X$ интеграл $\int\limits_Y f(x,y)dy$ не существует, то он полагается равным любому числу между $J_*(x)$ и $J^*(x)$, не исключая и самих значений интегралов Дарбу функции на промежутке Y. Аналогично полагаем и для интеграла $\int\limits_X f(x,y)dx$.

Теорема Фубини. Если функция $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ интегрируема на промежутке $P = X \times Y$ пространства $\mathbf{R^{n+m}}$, являющемся прямым произведением промежутков $X \subset \mathbf{R^n}$ и $Y \subset \mathbf{R^m}$, то интегралы

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy, \quad \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy, \quad \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)dx \tag{1}$$

существуют одновременно и равны между собой.

► Возьмем разбиение Q промежутка $P = X \times Y$. Соответствующие разбиения промежутков $X \subset \mathbf{R^n}$ и $Y \subset \mathbf{R^m}$ обозначим Q_x и Q_y. Преобразуем интегральную сумму Римана функции f для разбиения Q

$$\sum_{i,j} f(\xi^i, \eta^j)|X_i \times Y_j| = \sum_i \Big(\sum_j f(\xi^i, \eta^j)|Y_j| \Big)|X_i| = \\ = \sum_j \Big(\sum_i f(\xi^i, \eta^j)|X_i| \Big)|Y_j|. \tag{2}$$

Выражения (2) являются интегральными суммами Римана для соответствующих интегралов (1), (приводящие в пределе при $\lambda \to 0$ к интегралам (1))

Каждая из сумм (2) заключена между нижней и верхней суммами Дарбу $s(f,Q)$ и $S(f,Q)$ функции f. При $\lambda \to 0$ эти суммы стремятся к общему пределу – кратному интегралу от функции $f \in \Re(P)$. Таким образом, существование и равенство интегралов (1) доказано. Разбиения (Q_x, ξ) и (Q_y, η) промежутков X и Y можно выбирать произвольно, а разбиение Q брать как их продолжение. ◀

Следствие 1. Если функция $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ интегрируема на промежутке $P = X \times Y$, то при почти всех (в смысле Лебега) значениях $x \in X$ интеграл $\int\limits_Y f(x,y)dy$ существует и при почти всех значениях $y \in Y$ интеграл $\int\limits_X f(x,y)dx$ также существует.

▶ Обозначим $J_*(x)$ и $J^*(x)$ – нижний и верхний интегралы Дарбу функции $f(x,y)$ на промежутке Y. По доказанной теореме $\int_X (J^* - J_*)dx = 0$. Стоящая в скобках разность неотрицательна. На основании леммы 1 п. 19.5 заключаем, что эта разность равна нулю почти всюду на X. Тогда по критерию Дарбу интеграл $\int\limits_Y f(x,y)dy$ существует почти при всех $x \in X$. Аналогично доказывается вторая часть утверждения. ◀

Следствие 2. Если промежуток $P \subset \mathbf{R}^n$ является прямым произведением отрезков $I_i = [a_i, b_i]$, $i = \overline{1,n}$, то

$$\int\limits_P f(x)dx = \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n \ldots \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x_1, ..., x_n)dx_1.$$

▶ Эта формула выводится повторным применением доказанной теоремы. ◀

Пример. Пусть $f = z\sin(x+y)$. Найдем интеграл от этой функции на промежутке $P \subset \mathbf{R}^3$, определяемый соотношениями: $0 \le x \le \pi$, $|y| \le \pi/2$, $0 \le$

$z \leq 1$. По следствию 2 получим

$$\int\limits_P z\sin(x+y)dxdydz = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\pi} z\sin(x+y)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-z\cos(x+y)\Big|_{x=0}^{x=\pi}\right) dy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2z\cos y dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2z\sin y\Big|_{y=-\pi/2}^{y=\pi/2}\right) dz = \int\limits_0^1 4zdz = 2.$$

Доказанную теорему можно использовать и для вычисления интегралов по области, отличной от параллелепипеда.

Следствие 3. Пусть D – ограниченное множество в $\mathbf{R}^{n-1}$, а множество $E \subset \mathbf{R}^n$ есть $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \mid x \in D,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, где $\varphi_1,\ \varphi_2 : D \to \mathbf{R}$. Если $f \in \Re(E)$, то

$$\int\limits_E f(x,y)dxdy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

► Пусть для фиксированных x $E_x = \{(x,y) \in \mathbf{R^n} \mid \boldsymbol{\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)}\}$, если $x \in D$ и $E_x = \varnothing$, если $x \notin D$. Заметим, что $E = D \times E_x$, $h_E(x,y) = h_D(x)h_{E_x}(y)$. Используя определение интеграла по множеству и теорему Фубини, получим

$$\int\limits_E f(x,y)dxdy = \int\limits_{P\supset E} fh_E(x,y)dxdy = \int\limits_{P_x\supset D} dx \int\limits_{P_y\supset E_x} fh_E(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{P_x} \left(\int\limits_{P_y} f(x,y)h_{E_x}(y)dy\right) h_D(x)dx =$$

$$= \int\limits_{P_x} \left(\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)dy\right) h_D(x)dx = \int\limits_D \left(\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y)dy\right) dx.$$

Внутренний интеграл может не существовать на некотором множестве точек $x \in D$ меры нуль в смысле Лебега. Тогда ему приписывается тот же смысл, что и в теореме Фубини. ◄

Следствие 4. Если в условиях следствия 3 множество $D \subset \mathbf{R}^{n-1}$ измеримо по Жордану, а функции $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbf{R}$ непрерывны, то множество $E \subset \mathbf{R^n}$

измеримо по Жордану и его объем (мера) вычисляется по формуле

$$\mu(E) = \int\limits_D [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]dx. \tag{3}$$

► Граница ∂E множества E состоит из двух графиков непрерывных функций φ_1 и φ_2, являющихся множествами меры нуль, и части границы ∂E, являющейся прямым прямым произведением границы ∂D множества D на некоторый одномерный отрезок длины l. По условию, ∂D можно покрыть конечной системой $(n-1)$ - мерных промежутков, сумма объемов которых будет меньше ε/l. Прямое произведение этих промежутков на отрезок l дает покрытие ∂E промежутком с объемом меньше ε. Из следствия 3 и определения меры измеримого множества получим результат (3). ◄

19.7 Замена переменных в кратном интеграле

Для простого интеграла получена следующая формула замены переменной

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти формулу замены переменных для кратных интегралов.

Пусть D_x – множество в $\mathbf{R}^n$, f – интегрируемая на D_x функция, а $\varphi : D_t \to D_x$ – отображение множества $D_t \subset \mathbf{R}^n$ на D_x. Необходимо найти функцию $\psi(t)$ в D_t, зная функции f и φ так, чтобы получить равенство

$$\int\limits_{D_x} f(x)dx = \int\limits_{D_t} \psi(t)dt, \tag{2}$$

позволяющее сводить вычисление интеграла по D_x к вычислению интеграла по D_t.

Определение 1. Отображение $f : U \to V$, где U и V – открытые множества в $\mathbf{R}^n$, называется $C^{(p)}$ диффеоморфизмом гладкости p, если

1) $f \in C^{(p)}(U,V)$,

2) f – биекция (взаимно-однозначно),

3) $f^{-1} \in C^{(p)}(V,U)$.

$C^{(0)}$ диффеоморфизм называется гомеоморфизмом.

Предположим сначала, что D_t есть промежуток $P \subset \mathbf{R}^n$, а $\varphi : P \to D_x$ – диффеоморфное отображение $C^{(1)}$ этого промежутка на D_x. Любому разбиению Q промежутка P на промежутки P_j, $j = \overline{1,k}$, соответствует разложение множества D_x на множества $\varphi(P_j)$, $j = \overline{1,k}$. Если все эти множества измеримы и пересекаются попарно лишь по множествам меры нуль, то в силу аддитивности интеграла

$$\int\limits_{D_x} f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi(P_j)} f(x)dx. \tag{3}$$

Если функция f непрерывна на D_x, то по теореме о среднем

$$\int\limits_{\varphi(P_j)} f(x)dx = f(\xi^j)\mu(\varphi(P_j)), \quad \xi^j \in P_j.$$

Поскольку $f(\xi^j) = f(\varphi(\tau^j))$, где $\tau^j = \varphi^{-1}(\xi^j)$, то нам остается связать $\mu(\varphi(P_j))$ с $\mu(P_j)$.

Если бы $\varphi : P \to D_x$ было линейным отображением, то $\varphi(P_j)$ был бы параллелепипед, и, как известно из алгебры, $\mu(\varphi(P_j)) = |\det \varphi'(t)|\, \mu(P_j)$, где определитель – якобиан отображения φ. Но диффеоморфизм $C^{(1)}$ локально является почти линейным отображением, поэтому, если размеры промежутка P_j достаточно малы, то приближенно можно считать, что $\mu(\varphi(P_j)) \approx |\det \varphi'(\tau^j)|\, \mu(P_j)$, (можно показать, что при некотором выборе $\tau^j \in P_j$ будет иметь место точное равенство). Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\varphi(P_j)} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{k} f(\varphi(\tau^j))|\det \varphi'(\tau^j)|\, |P_j|. \tag{4}$$

Справа в этом приближенном равенстве стоит интегральная сумма от функции $f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)|$ по промежутку P, отвечающему разбиению Q этого промежутка с отмеченными точками τ. В пределе при $\lambda \to 0$ из (3), (4) получаем

$$\int\limits_{D_x} f(x)dx = \int\limits_{D_t} f(\varphi(t))|\det \varphi'(t)|\, dt. \tag{5}$$

Это и есть искомая формула замены переменных. Намеченный путь к равенству (5) можно пройти со всеми доказательствами.

Определение 2. Носителем функции $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$, называется замыкание в D множества тех точек $x \in D$, в которых $f(x) \neq 0$. Обозначается $\mathrm{supp} f$.

Ниже рассмотрим случай, когда носитель интегрируемой функции $f : D_x \to \mathbf{R}$ является компактом, лежащим в D_x. Интегралы от функции f по D_x и $K = \mathrm{supp} f \subset D_x$, очевидно, совпадают. С точки зрения отображений, условие $\mathrm{supp} f = K \subset D_x$ равносильно тому, что замена $x = \varphi(t)$ действует не только на множестве K, по которому и нужно интегрировать, но и в некоторой окрестности D_x этого множества.

Сформулируем теорему о замене переменных.

Теорема 1. Если $\varphi : D_t \to D_x$ – диффеоморфизм $C^{(1)}$ ограниченного открытого множества $D_t \subset \mathbf{R}^n$ на такое же множество $D_x = \varphi(D_t) \subset \mathbf{R}^n$, а функция $f \in \Re(D_x)$ и $\mathrm{supp} f$ – компакт в D_x, то $f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)| \in \Re(D_t)$ и справедлива формула замены переменных

$$\int\limits_{D_x} f(x)dx = \int\limits_{D_t} f(\varphi(t))|\det\varphi'(t)|\, dt.$$

► Без доказательства. ◄

19.8 Несобственные кратные интегралы

Рассмотрим обобщение понятия кратного интеграла на случай неограниченной области интегрирования и неограниченной подынтегральной функции.

Определение 1. Исчерпанием множества $E \subset \mathbf{R}^n$ называется последовательность измеримых по Жордану множеств $\{E_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, таких, что $E_m \subset E_{m+1} \subset E$ при $\forall m \in \mathbb{N}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = E$.

Лемма 1. Если $\{E_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$ – исчерпание множества $E \subset \mathbf{R}^n$, то

a) $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(E_m) = \mu(E)$,

b) для любой функции $f \in \Re(E)$ также $f\big|_{E_m} \in \Re(E_m)$ и

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f(x)dx = \int\limits_{E} f(x)dx. \qquad (1)$$

► a) Поскольку $E_m \subset E_{m+1} \subset E$, то $\mu(E_m) \le \mu(E_{m+1}) \le \mu(E)$. Значит, предел существует, и $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(E_m) \le \mu(E)$. Докажем, что выполняется и противоположное неравенство $\lim\limits_{m\to\infty} \mu(E_m) \ge \mu(E)$. Граница ∂E множества E имеет объем нуль и ее можно покрыть конечной системой открытых промежутков, сумма объемов которых меньше $\forall \varepsilon{>}0$. Пусть Δ – объединение всех этих промежутков. Тогда множество $\widetilde{E} = E \cup \Delta$ открыто в $\mathbf{R}^n$, причем множество $\widetilde{E}$ содержит замыкание $\overline{E}$ множества E и $\mu(\widetilde{E}) \leq \mu(E) + \mu(\Delta) < \mu(E) + \varepsilon$.

Для каждого множества E_m можно повторить описанное построение со значениями $\varepsilon_m = \varepsilon/2^m$ и покрытиями Δ_m. Тогда $\overline{E}_m \subset \widetilde{E}_m$ и $\mu(\widetilde{E}_m) \leq \mu(E_m) + \mu(\Delta_m) < \mu(E_m) + \varepsilon_m$. Так как $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \widetilde{E}_m$, то система открытых множеств Δ, $\widetilde{E}_1$, $\widetilde{E}_2, ...$ образует открытое покрытие компакта $\overline{E}$. Пусть Δ, $\widetilde{E}_1, ..., \widetilde{E}_k$ – конечное покрытие компакта $\overline{E}$. Поскольку $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_k$, то множества Δ, $\Delta_1, ..., \Delta_k$, E_k тоже образуют покрытие $\overline{E}$, значит

$$\mu(E) \leq \mu(\overline{E}) \leq \mu(\Delta) + \mu(\Delta_1) + ... + \mu(\Delta_k) + \mu(E_k) < \mu(E_k) + 2\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\mu(E) \leq \lim\limits_{m\to\infty} \mu(E_m)$. Значит $\mu(E) = \lim\limits_{m\to\infty} \mu(E_m)$.

b) Что $f\big|_{E_m} \in \Re(E_m)$ является следствием критерия Лебега. По условию $f \in \Re(E)$, тогда $\exists M>0$, что $|f(x)| \leq M$ на E. Из аддитивности интеграла и общей оценки интеграла получим

$$\left| \int\limits_{E} f(x)dx - \int\limits_{E_m} f(x)dx \right| = \left| \int\limits_{E \setminus E_m} f(x)dx \right| \leq M\mu(E \setminus E_m).$$

Отсюда, с учетом доказанного в п. a), заключаем,что утверждение b) имеет место. ◀

Определение 2. Пусть $\{E_m\}$ – исчерпание множества $E \subset \mathbf{R}^n$, а $f : E \to \mathbf{R}$ – функция, интегрируемая на множествах E_m. Тогда выражение (1), если указанный предел существует и его величина не зависит от выбора исчерпания множества E, называется несобственным интегралом от функции f по множеству E.

Если такого общего для всех исчерпаний предела не существует, то говорят, что интеграл от функции f по множеству E не существует или что интеграл расходится.

Замечание 1. Если $E \subset \mathbf{R}^n$ – измеримое по Жордану множество и $f \in \Re(E)$, то интеграл от функции f по множеству E в смысле определения 2 существует и совпадает с собственным интегралом (утверждение b) леммы 1).

Совокупность всех исчерпаний множества E практически необозрима. В частном случае проверку сходимости облегчает следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $f : E \to \mathbf{R}$ неотрицательна на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ и хотя бы для одного исчерпания $\{E_m\}$ множества E указанный в определении 2 предел существует, то несобственный интеграл от функции f по множеству E сходится.

► Пусть $\{E'_m\}$ – другое исчерпание множества E, на элементах которого функция f интегрируема. Множества $E^k_m = E'_k \cap E_m$, $m = 1, 2...$, образуют исчерпание измеримого множества E'_k, поэтому из утверждения b) леммы 1 следует, что

$$\int\limits_{E'_k} f(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E^k_m} f(x)dx \le \lim_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f(x)dx = A.$$

Поскольку $f(x) \ge 0$, а $E'_k \subset E'_{k+1} \subset E$, то существует

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{E'_k} f(x)dx = B \le A.$$

Теперь исчерпания $\{E_m\}$ и $\{E'_m\}$ равноправны, поменяв их роли, получим $A \le B$, значит $A = B$. ◄

Пример 1. Найдем несобственный интеграл

$$\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Будем исчерпывать плоскость $\mathbf{R}^2$ последовательностью кругов $E_m = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, x^2 + y^2 \le m^2\}$. После перехода к полярным координатам получим

$$\iint\limits_{E_m} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{m} e^{-r^2} rdr = \pi(1 - e^{-m^2}) \to \pi,\ m \to \infty.$$

В силу теоремы 1 можно заключить, что интеграл сходится и равен π. Отсюда можно получить полезный результат, если рассмотреть исчерпание плоскости квадратами $E_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \,\big|\, |x| < k,\ |y| < k\}$. По теореме Фубини

$$\iint\limits_{E_k} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_{-k}^{k} e^{-y^2}dy \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}dx = \Bigg(\int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}dx\Bigg)^2 \to \pi,\ k \to \infty.$$

В результате получим значение интеграла Эйлера - Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Мажорантный признак сходимости несобственного интеграла.

Теорема 2.(признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ и интегрируемы на одних и тех же подмножествах множества E, причем $|f(x)| \leq g(x)$ на E. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_E g(x)dx$ вытекает сходимость несобственных интегралов $\int\limits_E |f(x)|\,dx$ и $\int\limits_E f(x)dx$.

► Пусть $\{E_m\}$ – исчерпание множества E, на элементах которого функции f и g интегрируемы. Из критерия Лебега вытекает интегрируемость функции $|f(x)|$ на E_m, поэтому можно записать

$$\int\limits_{E_{m+k}} |f(x)|\,dx - \int\limits_{E_m} |f(x)|\,dx = \int\limits_{E_{m+k}\setminus E_m} |f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{E_{m+k}\setminus E_m} g(x)\,dx = \int\limits_{E_{m+k}} g(x)\,dx - \int\limits_{E_m} g(x)\,dx,$$

где m и k – любые натуральные числа. Эти неравенства, с учетом теоремы 1 и критерия Коши существования предела последовательности, позволяют заключить, что интеграл $\int\limits_E |f(x)|\,dx$ сходится.

Рассмотрим теперь функции $f_+ = \dfrac{1}{2}(|f| + f)$ и $f_- = \dfrac{1}{2}(|f| - f)$, очевидно, $0 \leq f_+ \leq |f|$ и $0 \leq f_- \leq |f|$. В силу уже доказанного, интегралы от функций f_- и f_+ по множеству E сходятся. Но функция $f = f_+ - f_-$, значит сходится и несобственный интеграл от функции f по этому множеству и он равен разности интегралов от функций f_+ и f_-. ◄

Замечание 2. При доказательстве теоремы 2 показано, что из сходимости несобственного интеграла от функции $|f(x)|$ следует сходимость несобственного интеграла от функции $f(x)$. Оказывается, для несобственных интегралов в смысле определения 2 верно и обратное утверждение, из сходимости несобственного интеграла от функции $f(x)$ следует сходимость несобственного интеграла от функции $|f(x)|$. Этого не было в случае несобственных интегралов на прямой, где различались абсолютная и условная сходимость. Требуемая в определении 2 независимость предела от выбора исчерпания эквивалентна независимости суммы ряда от порядка суммирования его членов. Последнее, как известно, равносильно абсолютной сходимости.

Чтобы теоремой 2 было эффективно пользоваться при исследовании сходимости несобственных интегралов, полезно иметь некоторый набор эталонных функций для сравнения.

Пример 2. В n - мерном шаре $B(0;1) \subset \mathbf{R}^n$ с выколотым центром $x = 0$ рассмотрим функцию $1/r^\alpha$, где $r = d(0;x)$ – расстояние от центра до точки $x \in B \setminus \{0\}$. Выясним, при каких $\alpha \in \mathbf{R}$ интеграл от этой функции по области $B \setminus \{0\}$ сходится. Для этого построим исчерпание шара кольцевыми областями $B(\varepsilon) = \{x \in B \,\big|\, \varepsilon < d(0;x) < 1\}$.

Переходя к сферическим координатам с центром в точке $x = 0$, по теореме Фубини получим

$$\int\limits_{B(\varepsilon)} \frac{dr}{r^\alpha} = \int\limits_S f(\varphi)\, d\varphi \int\limits_\varepsilon^1 \frac{r^{n-1}}{r^\alpha}\, dr = C_n \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{\alpha-n+1}},$$

где $d\varphi = d\varphi_1 ... d\varphi_{n-1}$, $f(\varphi)$ – некоторая функция от синусов углов $\varphi_1, ..., \varphi_{n-1}$, получающаяся в Якобиане перехода к сферическим координатам в $\mathbf{R}^n$, C_n – константа, величина интеграла по множеству S, который зависит только от n и не зависит от r и ε. При $\varepsilon \to 0$ величина интеграла по множеству $B(\varepsilon)$ будет иметь конечный предел, если $\alpha < n$. В остальных случаях интеграл стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$.

Итак, мы показали, что функция $1/r^\alpha$ интегрируется в проколотой окрестности точки $x = 0$ лишь при $\alpha < n$, где n – размерность пространства. Аналогично показывается, что вне шара $B(0;1) \subset \mathbf{R}^n$, то есть в окрестности бесконечности, эта же функция интегрируется в несобственном смысле лишь при $\alpha > n$.

При вычислении несобственных интегралов практически всегда приходится рассматривать лишь специальные исчерпания следующего вида. Пусть функция $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$, неограничена в окрестности некоторого множества $E \subset \partial D$. Тогда мы удаляем из D точки, лежащие в ε окрестности множества E и получаем область $D(\varepsilon) \subset D$. При $\varepsilon \to 0$ эти области порождают исчерпание множества D. Если же область D неограничена, то ее исчерпание можно получить, взяв дополнение в D к окрестности бесконечной точки.

Эти специальные исчерпания ведут к обобщению понятия главного значения (в смысле Коши) несобственного интеграла.

Главное значение кратных несобственных интегралов.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ определена при $\forall x \in \mathbf{R}^n$ и интегрируема в некотором шаре $B(0;r)$. Говорят, что функция $f(x)$ интегрируема по Коши в $\mathbf{R}^n$, если существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{B(0;r)} f(x)dx.$$

Этот предел называется главным значением несобственного интеграла от функции $f(x)$ в смысле Коши и обозначается

$$V.p. \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{B(0;r)} f(x)dx.$$

В случае, когда функция $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}^n$, имеет особенность в точке $a \in D$, главное значение несобственного интеграла в смысле Коши вводится как предел

$$V.p. \int\limits_{D} f(x)dx = \lim_{r\to 0} \int\limits_{D\setminus B(a;r)} f(x)dx,$$

где $D \setminus B(a;\, r)$ – множество, полученное удалением из области D шара $B(a;r)$ с центром в точке a радиуса r.

19.9 Двойные интегралы

1. Объем цилиндрического бруса.

Аналогично задаче о площади криволинейной трапеции, которая привела к понятию определенного интеграла, задача об объеме цилиндрического бруса приводит к двойному интегралу.

Пусть $S \subset \mathbf{R}^2$ – связное ограниченное множество, множество $E \subset \mathbf{R}^3$ определено соотношением $E = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,\big|\, (x,y) \in S, 0 \le z \le f(x,y)\}$, где (x,y,z) – декартовы координаты точки в $\mathbf{R}^3$. Точки множества E образуют тело, называемое цилиндрическим брусом. Это тело ограничено снизу плоскостью $z = 0$, сверху – поверхностью $z = f(x,y)$, с боков – цилиндрической поверхностью с направляющей кривой ∂S и образующими, параллельными оси z. Требуется найти объем бруса.

Возьмем разбиение с отмеченными точками (Q,ξ) области S на части ΔS_i, $i = \overline{1,n}$, и рассмотрим цилиндрические столбики с основаниями ΔS_i, которые в совокупности составляют тело. Приближенно заменим каждый столбик цилиндром высоты $h_i = f(\xi_i, \eta_i)$, где (ξ_i, η_i) – отмеченные точки (рис.1). Объем одного столбика приближенно равен $\Delta V_i \approx h_i \Delta S_i$. Приближенное значение объема всего тела

$$V \approx \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \to 0$, где λ – наибольший диаметр области

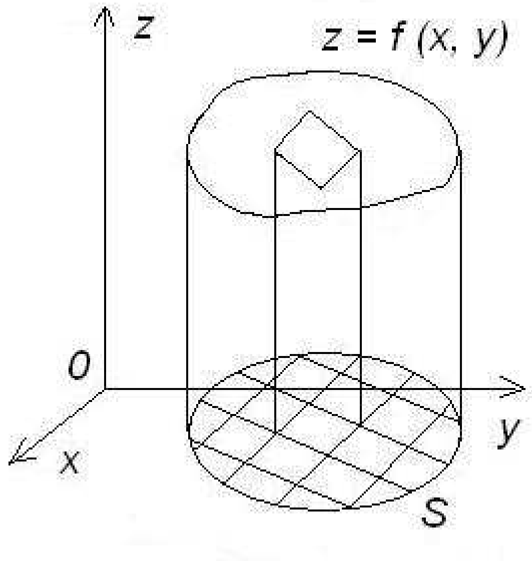

Рис.1 Вычисление объема бруса

ΔS_i, получим

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Предел интегральных сумм и есть двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области S

$$\iint\limits_S f(x, y)dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Формула для объема рассматриваемого тела

$$V = \iint\limits_S f(x, y)dS.$$

2. Сведение двойного интеграла к повторному.

На примере задачи вычисления объема цилиндрического бруса рассмотрим метод сведения двойного интеграла к повторному. Пусть основанием бруса является прямоугольник $P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, a \le x \le b, \, c \le y \le d\}$.

Произведем сечение бруса плоскостями $x = const$, $a \le x \le b$. Площадь криволинейной трапеции в любом сечении вычисляется по формуле

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Тогда объем тела будет равен

$$V = \int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Аналогичный результат можно получить и для более общего случая, когда в основании бруса лежит криволинейная трапеция $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$, ограниченная двумя отрезками $x = a$ и $x = b$ и двумя кривыми $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. В этом случае площадь сечения и объем будут равны

$$F(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \quad V = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Сформулируем аналог теоремы Фубини для двойного интеграла.

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена в промежутке $P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ и существует двойной интеграл

$$\iint\limits_P f(x,y)dxdy. \tag{1}$$

При каждом $x \in [a,b\,]$ существует простой интеграл

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy, \quad a \le x \le b.$$

Тогда существует повторный интеграл и имеет место равенство

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \iint\limits_P f(x,y)dxdy. \tag{2}$$

► Возьмем разбиения Q_x отрезка $[a,b\,]$ на части $\{[x_i, x_{i+1}]\}$, $i = \overline{0, n-1}$ и Q_y отрезка $[c,d]$ на части $\{[y_j, y_{j+1}]\}$, $j = \overline{0, m-1}$. Тогда разбиение $Q = Q_x \times Q_y$ разделит промежуток P на части $\{P_{ij}\}$, где $P_{ij} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, x_i \le x \le x_{i+1},\ y_j \le y \le y_{j+1}\}$. Обозначим m_{ij} и M_{ij} – нижнюю и верхнюю грани функции

f на промежутке P_{ij}. Для всех точек этого промежутка $m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$. Фиксируем точку $x = \xi_i$ в промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ и проинтегрируем неравенство по y в промежутке $[y_j, y_{j+1}]$

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\, dy \le M_{ij}\Delta y_j, \tag{3}$$

где $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$. Интеграл по y существует, так как по условию существует интеграл по отрезку $[c,d]$. Суммируя неравенство (3) по индексу j от нуля до $m-1$, получим

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \le F(\xi_i) = \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\, dy \le \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j.$$

Умножим все части неравенства на $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и просуммируем по индексу $i = \overline{1, n-1}$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}\Delta y_j \le \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\Delta y_j.$$

Крайние члены являются суммами Дарбу функции f на промежутке P. Средняя сумма есть интегральная сумма Римана функции $F(x)$ на отрезке $[a,b]$. При $\lambda \to 0$ обе суммы Дарбу стремятся к общему пределу – интегралу (1). В таком случае и средний член будет стремиться к этому пределу, следовательно

$$\int\limits_a^b F(x)\, dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\, dy = \iint\limits_P f(x,y)\, dS. \quad \blacktriangleleft$$

Замечание 1. Меняя роли переменных x и y, получим равенство

$$\iint\limits_P f(x,y) dx dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\, dx \tag{4}$$

в предположении, что при $\forall\, y \in [c,d]$ существует интеграл $\int\limits_a^b f(x,y) dx$. Если существуют оба простых интеграла, то из равенств (2), (4) следует

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\, dx.$$

Рассмотрим далее криволинейную область в плоскости xy, ограниченную отрезками $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $S=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \big| \, a\le x\le b,\, \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$ и существует двойной интеграл

$$\int\limits_S\int f(x,y)dxdy.$$

При каждом $x\in[a,b\,]$ существует обычный интеграл

$$F(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy,\quad a\le x\le b.$$

Тогда существует повторный интеграл и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int\limits_S\int f(x,y)dxdy. \tag{5}$$

► Доказательство строится на сведении этого случая к уже рассмотренному. Интеграл по области S определяется равенством

$$\int\limits_S\int f(x,y)dxdy=\int\limits_{P\supset S}\int fh_s(x,y)dxdy, \tag{6}$$

где $P=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \big| \, a\le x\le b,\, c\le y\le d\}$ – промежуток, содержащий область S, $c=\min\limits_{x\in[a,b]}\varphi_1(x)$, $d=\max\limits_{x\in[a,b]}\varphi_2(x)$. Функция $fh_s(x,y)$ на промежутке P удовлетворяет условиям теоремы 1. При фиксированном $x\in[a,b\,]$ существует интеграл

$$\int\limits_c^d fh_s(x,y)dy=\int\limits_c^{\varphi_1(x)} fh_s(x,y)dy+\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} fh_s(x,y)dy+\int\limits_{\varphi_2(x)}^{d} fh_s(x,y)dy, \tag{7}$$

так как существуют интегралы справа, причем первый и третий равны нулю, поскольку вне промежутка $[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$ изменения переменной y функции $fh_s(x,y)=0$.

В силу теоремы 1, для функции $fh_s(x,y)$ существует на P и повторный интеграл, который равен двойному

$$\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d fh_s(x,y)dy=\int\limits_P\int fh_S(x,y)dxdy.$$

С учетом формул (6), (7) получим (5). ◀

Замечание 2. Если область S представляет собой криволинейную трапецию другого вида $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y),\, c \le y \le d\}$, где функции ψ_1, ψ_2 непрерывны на $[c, d]$, то вместо формулы (5) придем к формуле

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx = \int\limits_S\int f(x, y)dxdy \tag{8}$$

в предположении, что наряду с двойным интегралом существует при фиксированном $y \in [c, d]$ простой интеграл по x в формуле (8).

Замечание 3. Если граница ∂S области S пересекается лишь в двух точках прямыми, параллельными оси x и прямыми, параллельными оси y, то, при выполнении указанных в теоремах 1 и 2 условий, применимы обе формулы (5) и (8). При сопоставлении их получим

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx.$$

В случае более сложного контура ∂S область S разлагается на конечное число частей рассмотренного вида (рис. 2).

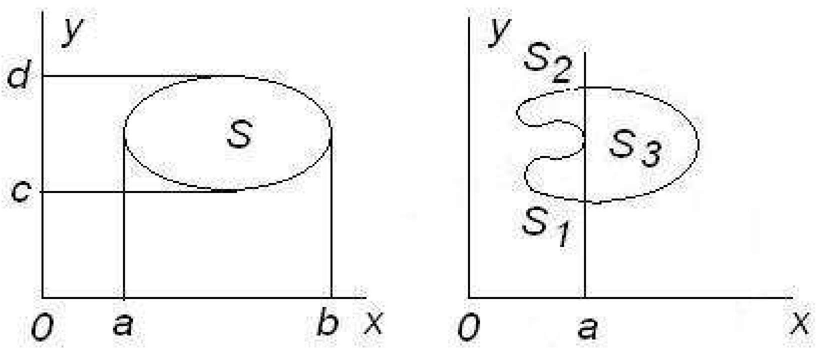

Рис. 2 Разложение области на части

Примеры. 1. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_P\int \frac{y\,dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1\}.$$

$$J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{y\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} = \int\limits_0^1 dx \left(\frac{-1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx = \ln \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{2+x^2}} \bigg|_0^1 = \ln \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$$

Второй способ сведения интеграла к повторному

$$\int\limits_0^1 y dy \int\limits_0^1 \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$$

оказывается более сложным для вычислений.

2. Найти объем тела, ограниченного снизу плоскостью $z = 0$, сверху – эллиптическим параболоидом $z = \dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{y^2}{2q}$, с боков – плоскостями $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$, $y = b$. По формуле вычисления объема цилиндрического бруса имеем

$$J = \iint\limits_P \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dS, \quad P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, 0 \le x \le a, \, 0 \le y \le b\}.$$

$$V = \int\limits_0^b dy \int\limits_0^a \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dx = \int\limits_0^b dy \left(\frac{x^3}{6p} + \frac{xy^2}{2q} \right) \bigg|_0^a =$$

$$= \int\limits_0^b \left(\frac{a^3}{6p} + \frac{ay^2}{2q} \right) dy = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right).$$

3. Вычислить двойной интеграл $J = \iint\limits_S y^2\sqrt{R^2-x^2}dS$, где S есть круг R с центром в начале координат. Уравнение $\partial S: \, x^2+y^2 = R^2$. При фиксированном $x \in [-R, \, R]$ переменная y меняется в пределах $-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$. По формуле (5) получим

$$J = \int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2-x^2} dy = 2 \int\limits_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\, dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 dy =$$

$$= 2 \int\limits_{-R}^R \sqrt{R^2-x^2}\, \frac{1}{3} y^3 \bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{2}{3} \int\limits_{-R}^R (R^2-x^2)^2 dx = \frac{32}{45} R^5.$$

4. Вычислить интеграл $J = \iint\limits_S \sqrt{4x^2-y^2}dS$, где область S есть треугольник, ограниченный прямыми $y = 0$, $x = 1$, $y = x$

$$J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy.$$

Найдем внутренний интеграл

$$\int\limits_0^x \sqrt{4x^2-y^2}dy = \left(\frac{y}{2}\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x^2}{2}\arcsin\frac{y}{2x}\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{3}x + 2x^2\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{\pi}{3}x^2.$$

$$J = \int\limits_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)x^2dx = \frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\Big).$$

19.10 Замена переменных в двойном интеграле

1. Преобразование плоских областей.

Пусть даны две плоскости, на которых введены декартовы координаты (x, y) и (u, v) соответственно. На этих плоскостях рассмотрим две ограниченные замкнутые области S – в плоскости xy и D – в плоскости uv. Предположим, что функции

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{1}$$

задают отображение D на S. Будем считать это отображение диффеоморфизмом класса $C^{(1)}$. Тогда определитель

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

будет непрерывной функцией переменных u, v, заданной в области D. Предположим, что Якобиан отображения отличен от нуля и, следовательно, по непрерывности, сохраняет знак. Фиксируя в (1) значения координаты $v = const$, получим семейство координатных линий на плоскости xy. Другое семейство координатных линий получим, если фиксируем переменную u. Поскольку отображение (1) взаимно однозначно, координатные линии одного семейства на плоскости xy не пересекаются между собой, то есть через каждую точку области S проходит по одной линии каждого семейства. Если на плоскости uv координатные линии были прямыми, то их отображения на плоскости xy будут кривыми линиями (рис. 3). Поэтому параметры u, v называются криволинейными координатами точки на плоскости xy. Можно показать, что отображение (1) переводит точ-

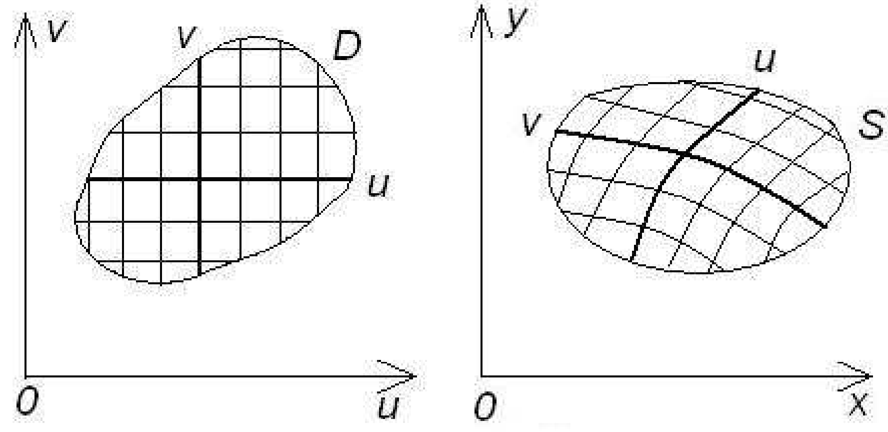

Рис. 3 Преобразование плоских областей

ки границы ∂D в точки границы ∂S и обратно. Если ∂D является простой кусочно-гладкой кривой, то такой же кривой будет и контур ∂S.

2. Выражение площади в криволинейных координатах.

Мы ограничимся только геометрическим выводом формулы площади при замене переменных. По предположению, отображение (1) дифференцируемо в каждой точке $(u, v) \in D$, тогда

$$\Delta x = x'_u \Delta u + x'_v \Delta v + o(\rho), \quad \Delta y = y'_u \Delta u + y'_v \Delta v + o(\rho). \tag{2}$$

при $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \to 0$, где Δx, Δy – приращения функции (1), Δu, Δv – приращение аргументов. Диффеоморфизм $C^{(1)}$ является локально линейным отображением относительно приращений аргументов, это видно из формул (2). При отображении $(1) : D \to S$ прямоугольник со сторонами Δu и Δv преобразуется в некоторую плоскую фигуру области S. Так как с точностью до слагаемых порядка $o(\rho)$ при $\rho \to 0$ преобразование (2) является линейным, то образом прямоугольника в области S приближенно будет параллелограммом. Площадь прямоугольника со сторонами Δu и Δv в области D равна $\Delta D = \Delta u \Delta v$. Площадь его образа в области S приближенно равна площади параллелограмма, то есть равна определителю из проекций его сторон на оси x и y

$$\Delta S \approx \left| \begin{vmatrix} x'_u \Delta u & x'_v \Delta v \\ y'_u \Delta u & y'_v \Delta v \end{vmatrix} \right| = \left| J(u, v) \right| \Delta u \Delta v, \tag{3}$$

где $J(u, y) = x'_u y'_v - x'_v y'_u$ – Якобиан отображения (1). Формулу (3) запишем в виде $\Delta S \approx |J(u,v)|\Delta D$. Так как при вычислении площади ΔS мы удерживали в преобразовании (1) только главные части – дифференциалы приращений, то в пределе при $\rho \to 0$ получим

$$dS = |J(u,v)|dD. \tag{4}$$

Отсюда получим площадь области S

$$S = \int\limits_S |J(u,v)|dudv. \tag{5}$$

3. Замена переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим двойной интеграл от функции $f \in \Re(S)$

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy, \tag{6}$$

где область $S \subset \mathbf{R}^2$ ограничена простым кусочно-гладким контуром ∂S. Предположим, что задано отображение формулами (1) $D \to S$. Поставим задачу: путем замены переменных в интеграле (6) представить его в виде интеграла по области D.

Разобьем область D с помощью некоторой сетки кусочно-гладких кривых на части ΔD_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда область S также кусочно-гладкими кривыми разобьется на части ΔS_i. В каждой части выберем произвольно точку $(\xi_i,\, \eta_i)$ и составим интегральную сумму для интеграла (6)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i. \tag{7}$$

Применим к интегралу (5) теорему о среднем, тогда

$$S = |J(\overline{u}, \overline{v})|D, \quad (\overline{u},\, \overline{v}) \in D. \tag{8}$$

Каждую площадь ΔS_i в формуле (7) заменим на (8)

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)|J(\overline{u}_i, \overline{v}_i)|\Delta D_i. \tag{9}$$

Отметим, что точка $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$ дается теоремой о среднем и ее выбор от нее не зависит. Так как функция $f \in \Re(S)$, то точку $(\xi_i,\, \eta_i)$ в области ΔS_i можно выбирать произвольно. Возьмем $\xi_i = x(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$, $\eta_i = y(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$. Тогда сумма (9) примет вид

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(\overline{u}_i, \overline{v}_i), y(\overline{u}_i, \overline{v}_i))|J(\overline{u}_i, \overline{v}_i)|\Delta D_i.$$

В этом виде σ является интегральной суммой для интеграла

$$\int\limits_D\int f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv. \tag{10}$$

Существование интеграла следует из того, что функция f интегрируема, а функция J – непрерывна. Если диаметр $\Delta D_i \to 0$, то из непрерывности функций $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ и диаметр $\Delta S_i \to 0$, тогда σ будет интегральной суммой для интегралов (6) и (10). Таким образом

$$\int\limits_S\int f(x,y)dxdy = \int\limits_D\int f(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv. \tag{11}$$

Эта формула и решает задачу о замене переменных в двойном интеграле. Формула (5) является частным случаем (11) при $f(x,y) \equiv 1$. Формула (11) будет справедлива и в том случае, когда функции f и J ограничены, а другие условия, накладываемые на отображение (преобразование координат), нарушаются на множестве меры нуль.

Замечание 1. Формулы замены переменных получены в предположении, что отображение $D \to S$ в $\mathbf{R}^2$ является диффеоморфизмом класса $C^{(1)}$. Однако на практике встречаются случаи, когда это условие нарушается в отдельных точках или вдоль отдельных линий. Если эти множества имеют меру нуль, то при их выделении формулы (5) и (11) становятся применимы. Например,

$$S - \delta S = \int\limits_{D\setminus\delta D}\int |J(u,v)|dudv.$$

Пример. Важным примером криволинейных координат являются полярные координаты (r, θ). Они вводятся с помощью соотношений $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$. В начале координат $x = y = 0$ взаимная однозначность отображения нарушается, этой точке соответствуют все значения отрезка $0 \leq \theta < 2\pi$. Якобиан отображения

$$J(r,\theta) = \frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta \\ y'_r & y'_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

При $r = 0$ определитель обращается в нуль и таким образом нарушаются условия, при которых получены формулы (5), (11). Возьмем область $D = \{(r, \theta) \in \mathbf{R}^2 \big| \, 0 \le r \le R, \, 0 \le \theta < 2\pi\}$, тогда область $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \big| \, x^2 + y^2 \le R^2\}$. К этим областям указанные формулы не применимы. Но, если исключить заштрихованные области, то формулы можно применить и далее перейти к пределу. Здесь ситуация такова же, как и в несобственных интегралах.

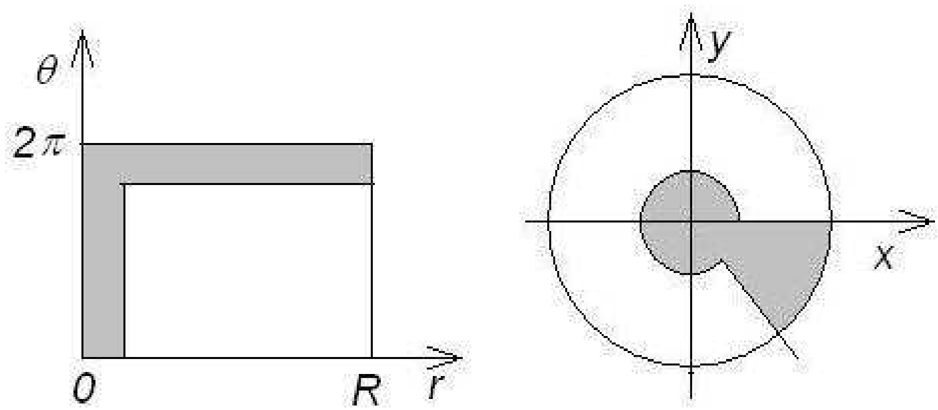

Рис. 4 Переход к полярным координатам

19.11 Тройные интегралы

1. Вычисление массы тела

Пусть дано некоторое тело V в $\mathbf{R}^3$ и в каждой точке, принадлежащей V, известна плотность $\rho(x, y, z)$. Требуется определить массу тела. Для решения задачи возьмем разложение тела V на части $\{\Delta V_i\}$, $i = \overline{1, n}$, не имеющие общих внутренних точек. В каждой из частей ΔV_i выберем по точке (ξ_i, η_i, ζ_i), таким образом получим разбиение множества V с отмеченными точками. В каждой из частей ΔV_i приближенно полагаем плотность ρ постоянной, тогда масса части ΔV_i будет $\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$. Масса всего тела приближенно выражается формулой

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda(Q) \to 0$, получим точное значение массы

$$m = \int\limits_V \rho(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

Подобного рода пределы приходится часто рассматривать в механике и физике, их называют тройными интегралами.

2. Определение тройного интеграла и его вычисление.

При построении общего определения тройного интеграла важную роль играет понятие объема тела, подобно тому, как понятие площади лежало в основе определения двойного интеграла. С понятием объема или меры Жордана множества мы уже знакомы. Условие существования объема для данного тела заключается в том, чтобы ограничивающая его поверхностью имела объем, равный нулю (была множеством меры нуль в смысле Лебега или Жордана). К числу таких поверхностей относятся гладкие и кусочно-гладкие поверхности. Только такие поверхности мы и будем рассматривать.

Пусть в некотором ограниченном замкнутом множестве $V \subset \mathbf{R}^3$ имеющем объем, задана функция $f(x, y, z)$. Разобьем эту область с помощью сети поверхностей на части $\{\Delta V_i\}$, $i = \overline{1, n}$, не имеющие общих внутренних точек. В каждой области ΔV_i возьмем произвольную точку (ξ_i, η_i, ζ_i), значение функции f в этой точке умножим на объем ΔV_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

Предел этой суммы при $\lambda \to 0$ (λ – наибольший из $d(\Delta V_i)$) и называется тройным интегралом

$$\int\limits_V f(x, y, z)dV = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$$

Всякая ограниченная функция интегрируема, если все ее разрывы лежат на конечном числе поверхностей с нулевым объемом.

Свойства тройного интеграла здесь не рассматриваем, так как они рассматриваются в общем случае n - мерных интегралов.

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению повторных интегралов. Рассмотрим несколько простых областей. Для параллелепипеда $P(a; b)$ тройной интеграл можно записать в виде

$$\int\limits_P f(x, y, z)dV = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz.$$

Предположим, что тройной интеграл берется по телу V, заключенному между постоянными $x = a$, $x = b$, его сечения постоянными $x = const$ обозначим S, тогда

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_S\int f(x,y,z)dydz.$$

Пусть далее тело V представляющее собой цилиндрический брус, ограничено снизу и сверху поверхностями $z = h_1(x,y)$ и $z = h_2(x,y)$, где h_1 и h_2 – непрерывные функции переменных x, y в области S плоскости xy, причем $h_1 \le h_2$ при $(x,y) \in S$. Тогда для непрерывной функции $f(x,y,z)$ имеем

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_S\int \Big(\int\limits_{h_1}^{h_2} f(x,y,z)dz\Big)dxdy. \tag{1}$$

При вычислении тройного интеграла сначала вычислим внутренний интеграл по переменной z при фиксированных (x,y), а затем полученная функция интегрируется по области S изменения переменных (x,y). Если область S представляет собой криволинейную трапецию $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, тогда для интеграла получим формулу

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz. \tag{2}$$

Пример. Вычислить интеграл от функции $f = \dfrac{1}{(1+x+y+z)^3}$ по области, ограниченной плоскостями $x = y = z = 0$ и $x + y + z = 1$. Проекцией тела на плоскость xy является треугольник, образованный прямыми: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$. Если $0 \le x \le 1$, то $0 \le y \le 1 - x$, при фиксированных x и y получим $0 \le z \le 1 - x - y$. По формуле (2) имеем

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}y - \frac{1}{1+x+y}\right)\Big|_{y=0}^{y=1-x} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(-\frac{1-x}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).$$

19.12 Замена переменных в тройном интеграле

Пусть в $\mathbf{R}^3$ задано отображение ограниченной области D на область V, которая является диффеоморфизмом класса $C^{(1)}$

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \tag{1}$$

где (u, v, w) – декартовы координаты точки области D, а (x, y, z) – области V в пространстве $\mathbf{R}^3$. Граница области D является кусочно-гладкой поверхностью, при отображении ∂D отображается на границу ∂V того же класса. Поскольку отображение (1) является диффеоморфизмом $C^{(1)}$, оно дифференцируемо в каждой точке $(u, v, w) \in D$

$$\begin{gathered}\Delta x = x'_u \Delta u + x'_v \Delta v + x'_w \Delta w + o(\rho), \\ \Delta y = y'_u \Delta u + y'_v \Delta v + y'_w \Delta w + o(\rho), \\ \Delta z = z'_u \Delta u + z'_v \Delta v + z'_w \Delta w + o(\rho), \quad \rho \to 0,\end{gathered} \tag{2}$$

где $\rho = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2 + \Delta w^2}$; Δu, Δv, Δw – приращения аргументов. При отображении (2) прямоугольный параллелепипед со сторонами Δu, Δv, Δw отображается в некоторую область ΔV, которая с точностью до малых слагаемых порядка $o(\rho)$, $\rho \to 0$, является косоугольным параллелепипедом. Объем элементарного параллелепипеда области D равен $\Delta D = \Delta u \Delta v \Delta w$. Объем тела ΔV

$$\Delta V \approx |J(u, v, w)| \Delta D, \tag{3}$$

где $J(u, v, w)$ – Якобиан отображения (2). В пределе при $\lambda \to 0$ из (3) следует

$$dV = |J(u, v, w)|\, dD, \tag{4}$$

$$V = \int_D |J(u, v, w)|\, dD. \tag{5}$$

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_D f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J(u,v,w)|dD. \qquad (6)$$

Формула (6) остается верной и в том случае, когда функция f ограничена, а другие условия, накладываемые на отображение (1), нарушаются на множествах меры нуль.

Замечание. К вопросу о замене переменных в кратном интеграле. Рассмотрим интеграл по объему $V \subset \mathbf{R}^3$

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Здесь $dV = dxdydz$. Значение интеграла зависит только от функции f и области V. Сделав замену переменных (1), мы получим другое разбиение области V на части с объемом $dV = |J(u,v,w)|dD$. Очевидно, это значение $dV \neq dxdydz$.

Некоторые замены переменных.

Рассмотрим две наиболее употребительные замены переменных в тройном интеграле.

1. Цилиндрические координаты $(r,\ \varphi,\ z)$ вводятся с помощью следующих соотношений

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z,$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Якобиан отображения

$$J(r,\varphi,z) = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$$

всегда положителен, исключая случай $r = 0$. Формула замены переменных имеет вид

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_D f(r,\varphi,z)rdrd\varphi dz,$$

где элемент объема в цилиндрических координатах $dV = rdrd\varphi dz$.

2. Сферические координаты $(r,\ \theta,\ \varphi)$ вводятся соотношениями

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$, r – радиус точки из $\mathbf{R}^3$, то есть расстояние от начала координат, θ – угол между осью z и радиусом r, φ – угол в плоскости xy (как в цилиндрических координатах). Якобиан отображения

$$J(r,\theta,\varphi) = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$$

всегда положителен, исключая случаев $r = 0$ или $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Элемент объема в сферических координатах $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$, а формула замены переменных в тройном интеграле

$$\int\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_D f(r,\theta,\varphi)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi.$$

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3z$, $a > 0$.

Тело симметрично относительно оси z, так как переменные x и y входят в формулу поверхности в виде $x^2 + y^2$. Левая часть уравнения положительна, поэтому $z \geq 0$ и тело лежит над плоскостью xy. Наличие в формуле выражения $x^2 + y^2 + z^2$ подсказывает нам переход к сферическим координатам. Перейдем в уравнении к сферическим координатам. Уравнение поверхности будет $r = a\sqrt[3]{\cos\theta}$. Первый октант характеризуется неравенствами: $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$V = 4\int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2\sin\theta dr = \frac{2}{3}\pi a^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

Вычисление двойных и тройных интегралов

1. Найти $\int\limits_S\int(x+y)dxdy$; $\partial S: x^2+y^2 = x+y$.

$$\partial S:\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

$$x - \frac{1}{2} = r\cos\varphi, \quad y - \frac{1}{2} = r\sin\varphi; \quad \partial S:\ r = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\int\limits_S\int(x+y)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1/\sqrt{2}} (1 + r\cos\varphi + r\sin\varphi)rdr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{3}r^3\cos\varphi + \frac{1}{3}r^3\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\cos\varphi + \frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{6\sqrt{2}}\sin\varphi - \frac{1}{6\sqrt{2}}\cos\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

2. Найти

$$\iint\limits_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy; \quad \partial S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Сделаем замену переменных $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & b\sin\varphi \\ -ar\sin\varphi & br\cos\varphi \end{vmatrix} = abr, \quad \partial S: r = 1,$$

$$\iint\limits_S \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1 - r^2}\,abrdr$$

$$= 2\pi ab\left(-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}\pi ab.$$

3. Вычислить объем тела

$$V: \ x^2 + y^2 + z^2 = 2az, \quad x^2 + y^2 \le z^2, \quad a > 0.$$

Введем сферические координаты

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta, \quad J = r^2\sin\theta,$$

$\partial V : r = 2a\cos\theta$; $\sin^2\theta \le \cos^2\theta$. Так как $z \ge 0$, то $0 \le \theta \le \pi/2$; ввиду $\sin^2\theta \le \cos^2\theta$, тогда $0 \le \theta \le \pi/4$.

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{2a\cos\theta} r^2\sin\theta dr = 2\pi \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}r^3\right)\Bigg|_0^{2a\cos\theta} \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \int\limits_0^{\pi/4} 8a^3\cos^3\theta\sin\theta d\theta = -\frac{16}{3}\pi a^3 \frac{1}{4}\cos^4\theta\Bigg|_0^{\pi/4} = a^3\pi.$$

4. Найти объем тела $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1;\ x, y, z \ge 0.$

Введем обобщенные сферические координаты (r, θ, φ)

$$x = ar\sin\theta\cos^2\varphi, \quad y = br\sin\theta\sin^2\varphi, \quad z = cr\cos\theta, \quad J = abcr^2\sin\theta\sin 2\varphi,$$

$(r\sin\theta\cos^2\varphi + r\sin\theta\sin^2\varphi)^2 + z^2\cos^2\theta = 1,\ r = 1,$

$0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi \le \pi/2,$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^1 abcr^2\sin\theta\sin 2\varphi dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta abc \sin\theta \sin 2\varphi \left(\frac{1}{3} r^3\right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} abc \left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) \Bigg|_0^{\pi/2} (-\cos\theta) \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} abc.$$

ГЛАВА 20. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

20.1. Криволинейные интегралы I - го рода

Рассмотрим одну механическую задачу, которая приводит к новому понятию криволинейного интеграла. Пусть дана простая спрямляемая кривая AB, вдоль которой распределена масса с линейной плотностью $\rho(s)$, где s – длина дуги кривой, отсчитываемая от точки A. Требуется найти массу всей кривой. Разделим кривую на части $\{\Delta s_i\}$, $i = \overline{1,n}$, возрастание номеров i идет от точки A к точке B. На каждой дуге Δs_i выберем точку $\overline{s}_i$. Плотность материала в этой точке $\rho(\overline{s}_i)$. Предполагаем, что плотность этой дуги постоянна, тогда ее масса $\Delta m_i \approx \rho(\overline{s}_i)\Delta s_i$. Масса всей кривой $m \approx \sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\overline{s}_i)\Delta s_i$. За точное значение массы кривой принимают предел

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\overline{s}_i)\Delta s_i,$$

где $\lambda = \max\limits_i\{\Delta s_i\}$ – параметр разбиения кривой.

Дальше будем изучать пределы указанного вида, отвлекаясь от конкретной задачи. Рассмотрим произвольную функцию $f(x, y, z)$, заданную в точках простой спрямляемой кривой L и, повторив указанный выше процесс, составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i, \tag{1}$$

где (ξ_i, η_i, ζ_i) – декартовы координаты отмеченной точки на дуге Δs_i. Полученную сумму называют интегральной суммой функции $f(x, y, z)$, заданной на кривой L. Эта сумма зависит от способа разбиения кривой и от выбора отмеченных точек.

Определение 1. Конечный предел интегральной суммы (1) при $\lambda \to 0$, если этот предел существует, называют криволинейным интегралом первого рода от функции $f(x, y, z)$ по кривой L и обозначают

$$\int\limits_L f(x, y, z)\, ds = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i,$$

где s – длина дуги, ds – ее приращение (дифференциал).

Предел интегральных сумм определяется следующим образом.

Определение 2. Число J называется пределом интегральных сумм (1) при $\lambda \to 0$, если для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta(\varepsilon){>}0$, что при $\lambda < \delta$ выполняется неравенство

$$\Big|J - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i\Big| < \varepsilon.$$

В этом определении не играет роли направление отсчета дуги. В частном случае $f(x, y, z) \equiv 1$ полученная формула дает длину кривой $l = \int\limits_L ds$.

Криволинейный интеграл первого рода имеет те же свойства, что и простой интеграл, заданный на отрезке. Их доказательства аналогичны случаю простого интеграла, поэтому мы не останавливаемся на этом вопросе.

Рассмотрим далее связь криволинейного интеграла по дуге кривой с обыкновенным интегралом. Пусть L – простая спрямляемая кривая, заданная параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

где $x(t), y(t), z(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции параметра t, возрастание длины дуги s соответствует возрастанию t. На кривой L задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Длина дуги кривой от начала до любой фиксированной точки равна

$$s(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt. \tag{2}$$

Так как функция $s = s(t)$ непрерывная строго возрастающая функция параметра t, то каждому значению s соответствует единственное значение t и декартовы координаты точки кривой будут непрерывными функциями параметра s

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad 0 \le s \le l.$$

Эти уравнения называются естественной параметризацией кривой L. При этом функция $f(x, y, z)$, заданная на кривой, будет сложной функцией переменной s: $f(x(s), y(s), z(s))$. Интегральная сумма (1) криволинейного интеграла запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\overline{s}_i), y(\overline{s}_i), z(\overline{s}_i))\Delta s_i,$$

где $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ – длина дуги, $\overline{s}_i \in [s_{i-1}, s_i]$ – отмеченная точка. Выражение в правой части является интегральной суммой Римана для непрерывной функции переменной s, заданной на отрезке $[0, l]$. Переходя к пределу при $\lambda \to 0$ из этого равенства получим

$$\int\limits_L f(x, y, z)\, ds = \int\limits_0^l f(x(s), y(s), z(s))\, ds. \tag{3}$$

Заметим, что соотношение (3) дает не только способ вычисления криволинейного интеграла через определенный интеграл, но и доказывает существование криволинейного интеграла от непрерывной функции, заданной на кривой L. Произведем замену переменной в интеграле (3) справа по формуле (2)

$$\int\limits_L f(x, y, z)\, ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\, dt. \tag{4}$$

Таким образом, для вычисления криволинейного интеграла первого рода на кривой нужно, используя параметрические уравнения кривой, выразить подынтегральную функцию f через параметр t, а множитель ds заменить дифференциалом дуги как функции параметра t. В формуле (4) нижний предел должен быть меньше верхнего, то есть $\alpha < \beta$, и при возрастании t дуга s также должна возрастать. В противном случае нужно перейти к дуге $l - s$.

Если L – плоская кривая, заданная явным уравнением $y = y(x)$, $a \le x \le b$, где $y(x)$ – непрерывная функция, то, принимая x за параметр, из (4) получим частный случай

$$\int\limits_L f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y_x'^2}\, dx. \tag{5}$$

Если касательная к кривой L не параллельна оси y, то формулу (5) можно записать иначе. Обозначим α угол касательной с осью x, тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = y_x'(x), \quad |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + y_x'^2}}, \quad \int\limits_L f(x, y)\, ds = \int\limits_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos\alpha|}\, dx.$$

Примеры.

1. Вычислить криволинейный интеграл от функции $f(x, y) = xy$ по кривой L, являющейся четвертью эллипса: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$. Параметрическое представление эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Отсюда находим $x'_t = -a\sin t,\ y'_x = b\cos t$,

$$J = \int\limits_L xy\,ds = \int\limits_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt.$$

Положим $\cos^2 t = z,\ -2\cos t\sin t dt = dz,\ \sin^2 t = 1 - z$

$$J = \int\limits_0^1 \frac{ab}{2}\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)z}\,dz = \frac{ab}{3}\frac{1}{b^2 - a^2}\left[a^2 + (b^2 - a^2)z\right]^{3/2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{ab}{3}\frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{ab}{3}\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

2. Рассмотрим задачу о притяжении материальной точки массы m материальной кривой L. Согласно закону Ньютона, сила притяжения двух точек с массами m и m_i, расстояние между которыми r_i, вычисляется по формуле $F_i = kmm_i/r_i^2,\ k = const$, величина которой зависит от выбора единиц измерения.

Если имеется система материальных точек с массами m_i и расстояниями до точки с массой m равными $r_i,\ i = \overline{1,n}$, то составляющие суммарной силы по осям x и y находятся по формулам

$$F_x = \sum_{i=1}^{n} k\frac{mm_i}{r_i^2}\cos\theta_i, \quad F_y = \sum_{i=1}^{n} k\frac{mm_i}{r_i^2}\sin\theta_i, \tag{6}$$

где θ_i – угол между вектором $\mathbf{r}_i$ и осью x. Пусть теперь массы m_i распределены равномерно по кривой L. Разобьем кривую L на участки $\{\Delta s_i\}$, масса дуги приближенно равна $m_i \approx \rho(\overline{s}_i)\Delta s_i$, Δs_i – длина дуги, $\overline{s}_i$ – некоторая точка на дуге. Подставим значения массы m_i в формулы (6) и перейдем в них к пределу при $\lambda = \max\limits_i\{\Delta s_i\} \to 0$, тогда

$$F_x = \int\limits_L km\frac{\rho(s)\cos\theta}{r^2}\,ds, \quad F_y = \int\limits_L km\frac{\rho(s)\sin\theta}{r^2}\,ds.$$

20.2. Криволинейные интегралы второго рода

Практически более важным является понятие криволинейного интеграла второго рода.

Пусть дана простая незамкнутая кривая $L = AB$ и вдоль этой кривой задана функция $P(x, y, z)$. Разделим кривую точками на n дуг $\{\Delta s_i\}$, $i = \overline{1, n}$ и на каждой дуге возьмем точку (ξ_i, η_i, ζ_i). Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i, \tag{1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – проекция дуги Δs_i на ось x. Выражение σ называется интегральной суммой функции $P(x, y, z)$ на кривой L по переменной x.

Определение 1. Конечный предел интегральных сумм (1) при $\lambda = \max\limits_i\{\Delta s_i\} \to 0$, если он существует, называется криволинейным интегралом второго рода по переменной x от функции $P(x, y, z)$ по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i. \tag{2}$$

Так как, в отличие от длины дуги Δs_i, ее проекция Δx_i зависит от направления дуги и меняет знак при перемене направления, то криволинейный интеграл (2) также зависит от направления дуги

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\,dx = -\int\limits_{BA} P(x, y, z)\,dx$$

(в первом случае направление отсчета дуги s берется от точки A к точке B, во втором – от точки B к точке A).

Аналогичным образом вводятся криволинейные интегралы второго рода по переменным y и z от функций, заданных на кривой L

$$\int\limits_L Q(x, y, z)\,dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i, \tag{3}$$

$$\int\limits_L R(x, y, z)\,dz = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i, \tag{4}$$

если указанные пределы существуют.

Сумму интегралов (2) – (4) также называют криволинейным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$. Здесь также изменение направления интегрирования меняет знак интеграла.

Простейшие свойства простого интеграла легко переносятся на рассматриваемый криволинейный интеграл.

Рассмотрим вопрос о существовании и вычислении криволинейного интеграла второго рода.

Теорема 1. Пусть кривая $L = AB$ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \tag{5}$$

где функция $x(t)$ – непрерывно дифференцируема, а функции $y(t), z(t)$ – непрерывны. При изменении параметра t от α до β движение по кривой идет от A к B. На кривой L задана непрерывная функция $P(x, y, z)$. При этих условиях существует криволинейный интеграл (2) и справедливо равенство

$$\int\limits_L P(x, y, z)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(t))x'_t\,dt. \tag{6}$$

► Возьмем разбиение кривой точками M_i, $i = \overline{1, n}$, этим точкам соответствуют значения параметра t_i, а отмеченным точкам на дуге Δs_i – значения τ_i, $t_{i-1} \le \tau_i \le t_i$. Интегральная сумма

$$\sigma = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i$$

с учетом равенства $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)\,dt$ может быть переписана в виде

$$\sigma = \sum_{i=1}^n P(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} x'(t)\,dt.$$

С другой стороны, интеграл в (6) справа можно записать в виде суммы

$$I = \int\limits_\alpha^\beta P(x(t), y(t), z(t))x'_t\,dt = \sum_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} P(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt.$$

Из двух равенств следует

$$\sigma - I = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \big[P(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) - P(x(t), y(t), z(t))\big] x'(t)\, dt.$$

Взяв $\forall\, \varepsilon > 0$, предполагаем все Δt_i настолько малыми, чтобы изменение функции P на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$ было меньше ε. Непрерывная функция $x'(t)$ ограничена на отрезке $[\alpha,\, \beta]$: $|x'(t)| \le K$. Тогда имеем $|\sigma - I| \le \varepsilon K(\beta - \alpha)$. Таким образом, при $\lambda = \max\limits_i \{\Delta t_i\} \to 0$ будет $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$, этим одновременно доказано как существование криволинейного интеграла, так и равенство (6). ◄

Подобным же образом доказывается существование других интегралов (3), (4) и равенства

$$\int\limits_L Q(x, y, z)\, dy = \int\limits_\alpha^\beta Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t)\, dt, \tag{7}$$

$$\int\limits_L R(x, y, z)\, dz = \int\limits_\alpha^\beta R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)\, dt \tag{8}$$

при условии, что функции $y'(t)$ и $z'(t)$ непрерывны на $[\alpha,\, \beta]$. Порядок расстановки пределов в последнем интеграле отвечает выбранному на кривой направлению.

Определение криволинейного интеграла и указанный здесь способ сведения его к обыкновенному определенному интегралу непосредственно распространяется на случай пересекающейся кривой (5), если только направление на ней определяется монотонным изменением параметра t от α до β.

Укажем некоторые случаи, когда вычисление криволинейного интеграла является особенно простым. Пусть интеграл (2) берется по кривой на плоскости x, y, заданной явным уравнением $y = y(x)$ причем перемещение точки по кривой из A в B происходит при изменении x от a до b. Тогда без каких-либо предположений о кривой, кроме ее непрерывности, имеем

$$\int\limits_L P(x, y)\, dx = \int\limits_a^b P(x, y(x)) dx.$$

Аналогично, если кривая задана уравнением $x = x(y)$ где $c \le y \le d$, то

$$\int\limits_L Q(x, y)\, dy = \int\limits_c^d Q(x(y), y)\, dy.$$

Если интеграл (2) вычисляется по кривой L, лежащей в плоскости $x = const$, то он равен нулю, так как в этом случае $\Delta x = 0$. Аналогично, интегралы (3) и (4) равны нулю по кривым, лежащим в плоскостях $y = const$ и $z = const$ соответственно.

Случай замкнутого контура

Рассмотрим замкнутую кривую L, в этом случае начало и конец пути совпадают $A = B$. Возьмем на кривой L точку C, не совпадающую с A и B, тогда $\oint\limits_L = \int\limits_{AMC} + \int\limits_{CNA}$, в предположении, что интегралы справа существуют.

Легко показать, что существование и величина интеграла по кривой L не зависит от выбора точек A и C. Кроме того, для замкнутой кривой применимы формулы (6) – (8).

Можно в каждом случае особо указывать направление движения на замкнутой кривой. В случае плоской кривой обычно поступают иначе. Если кривая L замкнута и лежит в плоскости xy с правой системой координат, то положительным направлением обхода кривой называется движение, при котором область S с контуром $\partial S = L$ остается слева. Если система координат xy – левая, то положительным направление обхода будет, когда область остается справа. Принимается соглашение: если L является простой замкнутой кривой, то под символом $\oint Pdx+Qdy$ при отсутствии указания на направление обхода, понимается интеграл, взятый при положительном направлении обхода кривой.

20.3. Связь между криволинейными интегралами двух типов

Рассмотри простую гладкую кривую $L = AB$, заданную естественной параметризацией

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s), \quad 0 \le s \le l.$$

Введем обозначения

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

где α, β, γ – углы между касательной к кривой L, направленной в сторону возрастания дуг, с осями координат x, y, z. Очевидно, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Если вдоль кривой L задана непрерывная функция $P(x, y, z)$, то последовательно имеем

$$\int\limits_L P(x,y,z)\,dx = \int\limits_0^l P(x(s),y(s),z(s))x'(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_0^l P(x(s),y(s),z(s))\cos\alpha\,ds = \int\limits_L P(x,y,z)\cos\alpha\,ds.$$

Криволинейный интеграл второго типа оказался сведенным к криволинейному интегралу первого типа. Аналогично получим

$$\int\limits_L Q(x,y,z)\,dy = \int\limits_L Q(x,y,z)\cos\beta\,ds, \quad \int\limits_L R(x,y,z)\,dz = \int\limits_L R(x,y,z)\cos\gamma\,ds.$$

Складывая три равенства, имеем

$$\int\limits_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$$

Подчеркнем, что направление касательной совпадает с направлением пути интегрирования.

Выведенные формулы остаются справедливыми и для кусочно-гладкой простой кривой.

Примеры.

1. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L 2xy\,dx + x^2dy$ по пути, соединяющему точки $(0;0)$ и $(1;1)$, если путь L есть: а) $y = x$, б) $y = x^2$, в) $x = y^2$, г) $y = x^3$.

а) $dy = dx, \quad J = \int\limits_0^1 3x^2dx = 1;$

б) $dy = 2xdx, \quad J = \int\limits_0^1 4x^3dx = 1;$

в) $dx = 2ydy, \quad J = \int\limits_0^1 5y^4dy = 1;$

г) $dy = 3x^2dx, \quad J = \int\limits_0^1 5x^4dx = 1.$

2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xy\,dx + (y-x)dy$ при тех же путях интегрирования.

а) $dy = dx, \quad J = \int\limits_0^1 x^2 dx = \dfrac{1}{3};$

б) $dy = 2xdx, \quad J = \int\limits_0^1 (3x^3 - 2x^2)dx = \dfrac{1}{12};$

в) $dx = 2ydy, \quad J = \int\limits_0^1 (2y^4 - y^2 + y)dy = \dfrac{17}{30};$

г) $dy = 3x^2dx, \quad J = \int\limits_0^1 (5x^5 + x^4 - 3x^3)dx = -\dfrac{1}{20}.$

20.4. Формула Грина

Мы установим важную формулу, связывающую двойной интеграл с криволинейным.

Теорема 1. Пусть S – ограниченная замкнутая область в плоскости xy с кусочно-гладким контуром ∂S; P, Q – непрерывно дифференцируемые функции (x, y) в области S. Тогда имеет место соотношение

$$\int\limits_S\int (Q'_x - P'_y)\, dxdy = \int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy, \tag{1}$$

где интеграл по ∂S берется в положительном направлении.

► В плоскости xy с правой системой координат рассмотрим область S, ограниченную контуром $L = \partial S$, состоящим из двух отрезков $x = a$, $x = b$ и двух кривых $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $a \le x \le b$. Пусть функция $P(x, y)$ непрерывна в области S вместе с частной производной P'_y. При этих условиях существует двойной интеграл от функции P'_y и он сводится к повторному

$$\int\limits_S\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, \varphi_2(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, \varphi_1(x))\, dx.$$

Здесь использована формула Ньютона-Лейбница. Каждый из двух интегралов справа может быть заменен криволинейным интегралом, тогда

$$\int\limits_S\int \frac{\partial P}{\partial y}\, dS = \int\limits_{DC} P(x, y)\, dx - \int\limits_{AB} P(x, y)\, dx = \tag{2}$$

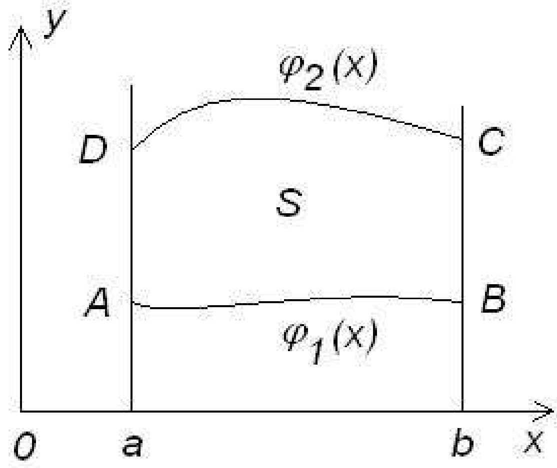

Рис. 1 К выводу формулы Грина

$$= -\Big(\int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA} \Big) P(x,y)\,dx = -\int\limits_{\partial S} P(x,y)\,dx.$$

Два добавленных интеграла по линиям BC и DA очевидно равны нулю, так как эти отрезки перпендикулярны оси x. Аналогичным путем устанавливается формула

$$\int\limits_{S}\int \frac{\partial Q}{\partial x}\,dS = \int\limits_{\partial S} Q(x,y)\,dy \qquad (3)$$

для случая, когда функции Q и Q'_x непрерывны в области S, ограниченной отрезками $y = c$, $y = d$ и кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $c \le y \le d$.

Если область S одновременно удовлетворяет условиям случаев (2) и (3), то есть разлагается на конечное число трапеций первого и второго типов, то для нее справедливы обе формулы (2) и (3). Вычитая формулу (2) из (3), получим (1). ◄

Формула (1) называется формулой Грина, можно доказать, что эта формула справедлива для любой области S, ограниченной одним или несколькими кусочно-гладкими контурами.

Хотя формула (1) выведена в предположении правой ориентации осей x и y, она сохраняется без изменения и при левой ориентации, лишь положительное направление обхода контура будет другим. Формулы (2), (3) выведены для областей S специального вида. Можно доказать, что они справедливы для любой области, которую можно разбить прямыми, параллельными осям y и x, на конечное число частей рассматриваемого вида. Интегралы по общим границам частей будут вычисляться дважды, но в противоположных направлениях, поэтому их сумма будет равна нулю.

Формула Грина (1) получена для области S, ограниченной одним контуром. Однако, она будет справедлива, когда область S ограничена несколькими контурами. В частности

$$\int\int\limits_{S=S_1\setminus S_2} (Q'_x - P'_y)\, dS = \int\limits_{L_1\cup L_2} Pdx + Qdy.$$

Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла

Формула Грина находит разнообразные применения в анализе и в прикладных областях. Сейчас мы применим ее для вычисления площади плоской фигуры. Если функции P и Q в формуле (1) подобрать таким образом, чтобы выражение $Q'_x - P'_y \equiv 1$, то двойной интеграл в формуле (1) дает площадь фигуры S. Полагая $Q = x,\ P = 0$ найдем $S = \oint\limits_{\partial S} x\, dy$; при $Q = 0,\ P = -y:\ S = \oint\limits_{\partial S} -y\, dx$. Взяв $Q = \dfrac{1}{2}x,\ P = -\dfrac{1}{2}y$ получим формулу $S = \oint\limits_{\partial S} x\, dy - y\, dx$.

20.5. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования

Определение 1. Область $S \subset \mathbf{R^2}$ называется односвязной, если вместе с простым замкнутым контуром L области S ей принадлежит и область, ограниченная этим контуром.

Иными словами, область S не должна иметь дырок, даже точечных. Если речь идет об ограниченной области, то понятие односвязности можно сформулировать еще проще: ограниченная область является односвязной, если она ограничена единственным замкнутым контуром.

Пусть в некоторой односвязной области S заданы непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Возьмем в S две точки A и B и соединим их некоторой кривой L, лежащей в области S, и рассмотрим интеграл

$$\int\limits_L Pdx + Qdy. \tag{1}$$

Ставится вопрос, при каких условиях на функции P и Q этот интеграл не зависит от кривой или пути, соединяющем точки A и B. Эта задача допускает и другую формулировку: какими должны быть функции P и Q, чтобы криволинейный интеграл по замкнутой кривой, лежащей в области S и проходящий через точки A и B, был равен нулю.

Докажем равносильность двух задач.

► Пусть $\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0$ для любого простого замкнутого контура L в области S. Возьмем точки A и $B \in S$ и соединим их кривыми L_1 и L_2, не имеющими общих точек, кроме A и B. Эти кривые образуют замкнутую кривую AL_1BL_2A, следовательно

$$\oint\limits_{AL_1BL_2A} Pdx + Qdy = \Bigg(\int\limits_{AL_1B} + \int\limits_{BL_2A} \Bigg) Pdx + Qdy = 0.$$

Отсюда получим

$$\int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy. \qquad (2)$$

Таким образом, интеграл (1) не зависит от пути.

Предположение, что кривые L_1 и L_2 не пересекаются, не является обязательным. Всегда можно взять третью кривую L_3, не имеющую общих точек с кривыми L_1 и L_2, по доказанному интегралы по L_1 и L_2 равны порознь интегралу по L_3, и потому выполняется равенство (2).

Пусть теперь интеграл (1) не зависит от пути. Докажем, что интеграл по любой простой замкнутой кривой L равен нулю. Возьмем на кривой L две точки A и B. Они делят кривую L на две части L_1 и L_2. По условию выполняется равенство (2), которое равносильно равенству нулю интеграла по замкнутому контуру L. ◄

Теперь займемся решением основной задачи – выводом условий на функции P и Q, чтобы интеграл (1) не зависел от пути.

Теорема 1. Пусть в односвязной области $S \subset \mathbf{R}^2$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\partial P/\partial y$ и $\partial Q/\partial x$. Для того, чтобы имело место равенство

$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = 0 \qquad (3)$$

для любого простого замкнутого контура L в области S, необходимо и достаточно, чтобы в S выполнялось тождество

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{4}$$

► *Необходимость.* Ввиду формулы Грина, равенство (3) означает

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS = 0 \tag{5}$$

для любой области S, ограниченной контуром $L = \partial S$. Отсюда следует равенство (4) в S. Действительно, если в некоторой точке $a \in S$ равенство (4) не выполнено, например, в этой точке

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2k > 0,$$

то существует круг $B(a, r)$, в котором

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} > k.$$

Для $S = B(a, r)$ будет

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS \geq \pi r^2 k > 0,$$

что противоречит условию (3), которое равносильно (5).

Достаточность. Достаточность условия (4) очевидна, так как в этом случае получим равенство (5), из которого следует (3). ◄

20.6. Условие точного дифференциала

Рассмотрим условия, при которых выражение $Pdx + Qdy$ будет полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, то есть $dF = F'_x dx + F'_y dy$, где $P = F'_x$, $Q = F'_y$.

Теорема 1. Пусть в односвязной области $S \subset \mathbf{R}^2$ функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\partial P / \partial y$ и $\partial Q / \partial x$. Чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{1}$$

► *Необходимость.* Видна из равенства $Pdx+Qdy = F'_x dx+F'_y dy$, следовательно

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

так как смешанные производные равны.

Достаточность. При выполнении условия (1) интеграл $\int\limits_L Pdx + Qdy$ не зависит от пути, так как по формуле Грина он равен нулю для любого замкнутого контура. Этот интеграл однозначно определяется началом и концом пути интегрирования A и B.

Покажем, что криволинейной интеграл

$$F(x, y) = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy \tag{2}$$

где $A(x_0, y_0)$ – фиксированная точка области S, а $B(x, y)$ – переменная точка области S, будет той функцией, дифференциалом которой является выражение $Pdx + Qdy$. Покажем сначала, что функция (2) имеет непрерывные частные производные по x и y. Придадим приращение Δx переменной x, мы перейдем из точки B в точку $C(x + \Delta x, y)$. При достаточно малых Δx точка C и отрезок BC будут принадлежать области S (так как B – внутренняя точка области S). Вычислим соответствующее приращение функции $F(x, y)$

$$\Delta_x F = F(x + \Delta x, y) - F(x, y) = \int\limits_{BC} Pdx + Qdy = \int\limits_{BC} Pdx,$$

так как интеграл от Qdy равен нулю, у нас BC перпендикулярен оси y. Оставшийся интеграл приводится к обыкновенному

$$\Delta_x F = \int\limits_x^{x+\Delta x} P(x, y(x))\, dx,$$

здесь $y(x)$ – фиксированное значение в точке B. По теореме о среднем $\Delta_x F = P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x$. Поделим это равенство на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$, тогда $\partial F/\partial x = P(x, y)$ (предел существует, так как функция P непрерывна). Аналогично устанавливается вторая формула $\partial F/\partial y = Q(x, y)$.

Так как точка $B(x, y)$ была выбрана произвольно внутри области S, то полученные соотношения будут выполняться для всех точек области S. Поскольку все частные производные функции $F(x,y)$ непрерывны, она имеет дифференциал

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = Pdx + Qdy. \quad \blacktriangleleft$$

Следствие 1. Чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{L=AB} Pdx + Qdy$ не зависел от пути, необходимо и достаточно, чтобы выражение $Pdx + Qdy$ было полным дифференциалом некоторой функции F.

Тогда из (2) следует $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = F(B) - F(A)$ (формула Ньютона-Лейбница).

ГЛАВА 21. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

21.1. Поверхность в $\mathbf{R}^3$

Определение 1. Двумерной поверхностью или двумерным многообразием в $\mathbf{R}^3$ называется множество $S \subset \mathbf{R}^3$, каждая точка которого имеет в S окрестность, гомеоморфную $\mathbf{R}^2$.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$, определенную в области $G \subset \mathbf{R^2}$. График функции $f : G \to \mathbf{R}$ есть множество

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, z = f(x, y),\ (x, y) \in G \subset \mathbf{R}^2\}.$$

Если функция f удовлетворяет условиям определения 1, то множество S будет поверхностью в $\mathbf{R}^3$.

Наряду с явным заданием поверхности, будем рассматривать ее параметрическое представление

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{1}$$

где функции (1) определены и непрерывны в области D на плоскости uv. Будем предполагать, что каждой точке поверхности S соответствует только одна пара параметров (u, v) так, что уравнения (1) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между точками поверхности S и точками области D. Такую поверхность будем называть простой. При этом считаем, что ∂S и ∂D – простые замкнутые контуры, соответствующие один другому по формулам (1). Параметры (u, v) называются криволинейными координатами точки поверхности S. Фиксируя по очереди значения параметров u и v, получим два семейства кривых на поверхности S, называемых координатными линиями. Если поверхность S является простой, то через любую точку поверхности S проходит по одной координатной линии каждого семейства. Для плоской поверхности мы это обсуждали раньше.

Предположим, что отображение (1) : $D \to S$ является диффеоморфизмом класса $C^{(1)}(D, S)$, и рассмотрим функциональную матрицу отображения (1)

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \tag{2}$$

Пусть для некоторых значений параметров (u_0, v_0), определяющих точку (x_0, y_0, z_0) поверхности S, отличен от нуля хотя бы один из определителей матрицы (2), например,

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда, переписав первые два уравнения (1) в виде

$$x(u,v) - x = 0, \quad y(u,v) - y = 0,$$

на основании теоремы о системе неявных функций можно утверждать, что в некоторой окрестности точки (u_0, v_0) переменные u и v определены как однозначные функции от x и y : $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, непрерывные вместе со своими частными производными. Подставляя эти выражения в третье уравнение (1), получим явное уравнение поверхности $S : z = f(x,y)$. Лишь когда все определители матрицы (2) обращаются в нуль в точке (u_0, v_0), такое представление может оказаться невозможным.

Возьмем на простой поверхности (1) точку (x_0, y_0, z_0), в окрестности которой уравнения (1) эквивалентны уравнению $z = f(x,y)$, и поверхность S имеет касательную плоскость в этой точке

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0. \tag{3}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярной касательной плоскости (3), имеет вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \tag{4}$$

Геометрическое определение касательной к пространственной кривой ничем не отличается от определения касательной к плоской кривой. Касательной к пространственной кривой в точке M называется предельное положение секущей MN при приближении точки N к точке M. Пусть пространственная кривая задана уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Найдем уравнение касательной к этой кривой в точке (x_0, y_0, z_0), которой отвечает параметр $t = t_0$, то есть $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$. Будем предполагать, что в этой точке существуют производные x'_t, y'_t, z'_t, не обращающиеся в нуль одновременно. Придадим приращение Δt параметру t. Ему соответствует переход к точке кривой с координатами $x_0+\Delta x$, $y_0+\Delta y$, $z_0+\Delta z$. Секущую, проходящую через две точки, зададим уравнением

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

Поделим здесь приращения Δx, Δy, Δz на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$

$$\frac{x-x_0}{x'_t(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'_t(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'_t(t_0)}. \tag{5}$$

Это и есть уравнение касательной к пространственной кривой в фиксированной точке (x_0,y_0,z_0).

Запишем уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной параметрическими уравнениями (1), в виде

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{6}$$

где коэффициенты A, B, C подлежат определению. Пусть точке (x_0,y_0,z_0) соответствуют параметры $(u_0,\, v_0)$ в уравнениях (1). Уравнения касательных к координатным линиям на поверхности S, проходящих через эту точку, можно записать в виде

$$\frac{x-x_0}{x'_u}=\frac{y-y_0}{y'_u}=\frac{z-z_0}{z'_u},\quad \frac{x-x_0}{x'_v}=\frac{y-y_0}{y'_v}=\frac{z-z_0}{z'_v}.$$

Так как эти касательные лежат в касательной плоскости (6), то вектор $\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v$, где $\mathbf{e}_u=(x'_u,\, y'_u,\, z'_u)$, $\mathbf{e}_v=(x'_v,\, y'_v,\, z'_v)$, перпендикулярен касательной плоскости (6). В таком случае, коэффициенты A, B, C должны быть пропорциональны определителям матрицы (2). Можно просто считать их равными этим определителям

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u\\ y'_v & z'_v\end{vmatrix},\quad B=\begin{vmatrix} x'_u & z'_u\\ x'_v & z'_v\end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u\\ x'_v & y'_v\end{vmatrix} \tag{7}$$

Направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}=\mathbf{e}_u\times\mathbf{e}_v$ к плоскости будут

$$\cos\alpha=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\beta=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\gamma=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8}$$

Знак зависит от направления выбираемой нормали.

Сторона поверхности

Рассмотрим некоторое тело в $\mathbf{R}^3$. Ясно, что ограничивающая его поверхность имеет две стороны: внешнюю и внутреннюю, примыкающую к нему. Исходя из этого интуитивного представления, дадим точное определение стороны поверхности. Рассмотрим поверхность $S \subset \mathbf{R}^n$, замкнутую или нет, и предположим, что в каждой точке поверхности имеется касательная плоскость, положение которой непрерывно меняется вместе изменением точки касания. Возьмем на поверхности S точку M и проведем в ней нормаль $\mathbf{n}$, перпендикулярную S, которой припишем одно из двух возможных направлений.

Проведем на поверхности замкнутый контур L через точку M, не пересекающий границу области S. Будем обходить контур, перемещая точку M и нормаль $\mathbf{n} \perp S$. Может случиться, что мы вернемся в исходное положение точки M с тем же направлением нормали или с противоположным. Если нормаль сохраняет свое направление при полном обходе контура L, поверхность называется двусторонней. Если нормаль изменит свое направление при обходе контура, поверхность называется односторонней. Примером односторонней поверхности является лист Мебиуса. Для его получения возьмем прямоугольный кусок бумаги и, перевернув его один раз, склеим противоположные стороны. В результате получится перекрученное кольцо. Если начать красить эту поверхность в какой-либо цвет, то, не переходя границу, мы покрасим всю поверхность.

На двусторонней поверхности S выбор направления нормали $\mathbf{n} \perp S$ в одной точке однозначно определяет ее направление во всех точках поверхности. Возьмем любые две точки M_1 и M_2 на поверхности S. Пусть мы переходим из точки M_1 в точку M_2 двумя различными путями M_1AM_2 и M_1BM_2. Если мы придем в M_2 с различными направлениями нормали $\mathbf{n}$, то замкнутый путь $M_1AM_2BM_1$ приводит в точку M_1 с направлением нормали, отличным от исходного. А это противоречит условию, что поверхность S – двусторонняя.

Множество всех точек поверхности S с выбранными направлениями нормалей в них по указанному правилу называется определенной стороной поверхности S.

Простейшим и наиболее важным примером двусторонней поверхности является поверхность, заданная явным уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, в предположении, что функция f непрерывна вместе с частными производными в области D. В этом случае направляющие косинусы нормали $\mathbf{n} \perp \mathbf{S}$ выражаются формулами

$$\cos\alpha = \pm\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = \pm\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \pm\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad (9)$$

где $p = f'_x$, $q = f'_y$. Так как направляющие косинусы будут непрерывными функциями координат точки, то и выбранное направление нормали будет непрерывно зависеть от точки. Выбрав знак перед радикалами, мы, тем самым, устанавливаем во всех точках поверхности направление нормали, то есть выбираем сторону поверхности. Если взять знак "минус" , то во всех точках поверхности $\cos\gamma \geq 0$, то есть угол между нормалью $\overrightarrow{n}$ и осью z будет острым. Таким образом, выбранная сторона поверхности оказывается верхней. Напротив, выбор знака "плюс"в формулах (9) означает нижнюю сторону поверхности, угол γ между нормалью $\overrightarrow{n}$ и осью z будет тупым.

Ориентация поверхности

Пусть S – простая гладкая поверхность в $\mathbf{R^3}$, ограниченная простым гладким контуром ∂S. Выберем сторону поверхности, то есть направление нормали $\overrightarrow{n} \perp S$. Положительным направлением обхода контура ∂S называется направление, при котором область S остается слева от наблюдателя со стороны нормали $\overrightarrow{n}$ или иначе, наблюдателю обход должен казаться против часовой стрелки. По этому же правилу одновременно устанавливается положительное направление обхода любого замкнутого контура, лежащего на поверхности S. Направление обхода, обратное положительному называется отрицательным. В совокупности, все это составляет понятие ориентации поверхности.

21.2. Площадь поверхности

Площадь поверхности, заданной явным уравнением

Пусть поверхность $S \subset \mathbf{R^n}$ задана уравнением $z = f(x, y)$, где функция f определена в ограниченной области D плоскости xy и имеет непрерывные частные производные $p = z'_x$, $q = z'_y$. Разобьем область D на n частей $\{\Delta D_i\}$, $i = \overline{1, n}$. На границе каждой части ΔD_i построим цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси z. Эти поверхности разделяют поверхность S на части $\{\Delta S_i\}$, $i = \overline{1,n}$. В пределах каждой части ΔS_i возьмем точку (x_i, y_i, z_i) и проведем в этой точке касательную плоскость к поверхности S. Если цилиндрическую поверхность продолжить до пересечения с касательной поверхностью, то она вырежет из плоскости участок $\Delta\sigma_i$. Основная идея дальнейших построений заключается в том, что при малых размеров всех площадок, площадь $\Delta\sigma_i$ приближенно равна площади ΔS_i, а сумма $\sum \Delta\sigma_i$ дает приближенное значение площади всей поверхности S. Потому, если существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_i \Delta\sigma_i$, где $\lambda = \max\limits_i\{d(\Delta\sigma_i)\}$, не зависящий от способа разбиения области D на части и от выбора точки области ΔS_i, то этот предел называется площадью поверхности S. Докажем, что

$$S = \iint\limits_D \frac{1}{|\cos\gamma|}\,dxdy, \tag{1}$$

где γ – угол между нормалью $\overrightarrow{n} \perp S$ и осью z. Действительно, если γ_i – значение γ в точке M_i поверхности ΔS_i, то для площадей плоских фигур $\Delta\sigma_i$ и ΔD_i выполняется соотношение $\Delta D_i = \Delta\sigma_i|\cos\gamma_i|$, так как ΔD_i является проекцией $\Delta\sigma_i$ на плоскость xy. Отсюда следует

$$\sigma = \sum_i \Delta\sigma_i = \sum_i \frac{\Delta D_i}{|\cos\gamma_i|}. \tag{2}$$

Эта сумма является интегральной для функции $1/|\cos\gamma|$ и ее пределом при $\lambda \to 0$ будет интеграл (1). Так как

$$\cos\gamma = \pm\frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

то формулу (1) можно переписать в виде

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy, \tag{3}$$

Замечание. Площадь плоской фигуры мы определили как предел площадей вписанных многоугольников при стремлении к нулю длин сторон. В случае кривой поверхности естественно было бы рассматривать вписанную в нее многогранную поверхность и определять площадь кривой поверхности как предел площадей многогранников при условии, что диаметры всех граней стремятся к нулю. В конце XIX столетия была обнаружена непригодность этого определения. Пример, придуманный Шварцем, показал, что упомянутый предел не существует даже для простого случая цилиндрической поверхности.

Площадь поверхности, заданной параметрически

Рассмотрим простую гладкую поверхность S, заданную уравнениями

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \tag{4}$$

где $(u,v) \in \Gamma$ на плоскости uv. Поверхность называется гладкой, если функции (4) непрерывны вместе с частными производными в области Γ и на поверхности нет особых точек. Пусть хотя бы один из определителей функциональной матрицы отображения (4), например, $C \neq 0$ в точке $M \in S$. Тогда некоторая окрестность ΔS точки M на поверхности S может быть представлена явным уравнением $z = f(x,y)$, и в соответствующей части $\Delta\Gamma$ области Γ в плоскости uv определитель $C \neq 0$. Предположим, что вся поверхность S разлагается на конечное число окрестностей точки указанного типа ΔS. Используя известные результаты, получим

$$\Delta S = \iint\limits_{\Delta D} \frac{1}{|\cos\gamma|}\, dxdy, \tag{5}$$

где ΔD – область в плоскости xy, связанная с областью $\Delta\Gamma$ плоскости uv взаимно-однозначным соответствием $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$. Если выполнены и другие требования на отображения, то можно перейти в (5) к переменным u и v. Учитывая, что

$$C = \frac{D(x,v)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}, \quad |\cos\gamma| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

получим

$$\Delta S = \iint\limits_{\Delta\Gamma} \sqrt{A^2+B^2+C^2}\, dudv \tag{6}$$

Это выражение оказалось симметричным относительно определителей A, B, C и на нем не отразилось, что мы предположили $C \neq 0$ и поверхность ΔS представляется уравнением $z = f(x,y)$. Тот же результат получится и при других возможных предположениях.

Определим теперь площадь всей поверхности S как сумму площадей ее частей ΔS. Складывая все равенства (6), придем к формуле

$$S = \iint\limits_{\Gamma} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du dv, \tag{7}$$

которая не зависит от того, на какие части разлагается поверхность S. Формула (7) может быть переписана в форме

$$S = \iint\limits_{\Gamma} \sqrt{EG - F^2}\, du dv, \tag{8}$$

где величины

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2, \quad F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v', \quad G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$$

представляют коэффициенты первой квадратичной формы поверхности

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du dv + G\, dv^2,$$

где ds – элемент длины дуги на поверхности S. Параметры E, F, G называют также гауссовыми коэффициентами поверхности. Выражение

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du dv = \sqrt{EG - F^2}\, du dv$$

называют элементом площади в криволинейных координатах.

Мы ограничились случаем простой гладкой поверхности. Если поверхность не подходит под этот случай, но разлагается на конечное число таких кусков, то ее площадь находится как сумма площадей кусков.

21.3. Поверхностные интегралы I-го типа

Поверхностные интегралы первого типа представляют собой такое же обобщение двойных интегралов, каким криволинейные интегралы первого типа являются по отношению к простым определенным интегралам.

Пусть в точке некоторой двусторонней гладкой или кусочно-гладкой поверхности S, ограниченной кусочно-гладкой кривой, определена функция $f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S с помощью сети кривых на части ΔS_i, $i = \overline{1, n}$. Возьмем в каждой части ΔS_i точку (x_i, y_i, z_i) и вычислим в ней значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$. Далее составим сумму, которую назовем интегральной

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i. \tag{1}$$

Конечный предел этой суммы при стремлении к нулю диаметров всех частей ΔS_i называется поверхностным интегралом первого типа от функции $f(x,y,z)$ по поверхности S и обозначается

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta S_i. \tag{2}$$

Вычисление поверхностного интеграла I-го типа

Ограничимся рассмотрением простой гладкой поверхности S, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v), \tag{3}$$

где $(u,v)\in\Gamma\subset\mathbf{R}^2$. Мы докажем, что для любой непрерывной функции f интеграл (2) существует и выражается через двойной интеграл следующим образом

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_\Gamma f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{4}$$

Таким образом, для сведения поверхностного интеграла первого типа к двойному нужно заменить переменные x, y, z их выражениями (3) через параметры u, v, а элемент площади dS его выражением в криволинейных координатах.

Теорема 1. Пусть $S\subset\mathbf{R}^3$ – простая гладкая поверхность, заданная параметрическими уравнениями (3). Функция $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности S. Тогда поверхностный интеграл первого типа от функции f по поверхности S существует и выражается через двойной интеграл по формуле (4).

► Разложим область Γ на части $\Delta\Gamma_i$, $i=\overline{1,n}$, с помощью сети кривых. Это приводит к разложению поверхности S на части ΔS_i, $i=\overline{1,n}$. В каждой ΔS_i выберем точку (x_i,y_i,z_i), а в части $\Delta\Gamma_i$ точку (u_i,v_i) так, чтобы (x_i,y_i,z_i) вычислялась по (u_i,v_i) по формулам (3).

Составим интегральную сумму (1) для первого интеграла в (4). Согласно формуле (8) п. 21.2 в этой сумме будет

$$\Delta S_i = \iint\limits_{\Delta\Gamma_i}\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$$

Применим здесь теорему о среднем

$$\Delta S_i = (\sqrt{EG-F^2})(\overline{u}_i,\overline{v}_i)\Delta\Gamma_i,$$

где $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$ – некоторая точка области $\Delta\Gamma_i$. Используя это выражение, интегральную сумму σ можно переписать

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))(\sqrt{EG - F^2})(\overline{u}_i, \overline{v}_i)\Delta\Gamma_i.$$

В этом виде она близка к интегральной сумме для второго интеграла (4), который существует, так как подынтегральная функция непрерывна. Однако, между σ и упомянутой суммой Римана существует отличие, заключающееся в несовпадении точек (u_i, v_i) с точками $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$. Это отличие нельзя устранить, используя произвольные точки (u_i, v_i) и отождествив их с точками $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$, так как тогда не будет доказано существование интеграла (4) при любом выборе точек (u_i, v_i). Рассмотрим разность интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\big[(\sqrt{EG - F^2})(\overline{u}_i, \overline{v}_i) - (\sqrt{EG - F^2})(u_i, v_i)\big]\Delta\Gamma_i.$$

В силу равномерной непрерывности функции $\sqrt{EG - F^2}$ на Γ при достаточно малых диаметрах областей $\Delta\Gamma_i$ будет

$$\big|(\sqrt{EG - F^2})(\overline{u}_i, \overline{v}_i) - (\sqrt{EG - F^2})(u_i, v_i)\big| < \varepsilon.$$

Учитывая ограничение непрерывной функции $f : |f| \leq M$, получим

$$\sum_{i=1}^{n} f(x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i))\big[(\sqrt{EG - F^2})(\overline{u}_i, \overline{v}_i) - (\sqrt{EG - F^2})(u_i, v_i)\big]\Delta\Gamma_i < \varepsilon M\Gamma.$$

Отсюда ясно, что обе интегральные суммы имеют одинаковый предел при $\lambda = \max\limits_i\{d(\Delta\Gamma_i)\} \to 0$. Тем самым доказано существование интеграла и равенство (4). ◄

Если поверхность S задана явным уравнением $z = z(x, y)$, то формула (4) принимает вид

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy, \tag{5}$$

где D – проекция поверхности S на плоскость xy. Так как $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = 1/|\cos\gamma|$, где γ – угол между $\overrightarrow{n} \perp S$ и осью z, то формулу (5) можно написать и так

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y))\frac{dxdy}{|\cos\gamma|}. \tag{6}$$

Эти результаты переносятся на случай поверхности, состоящей из конечного числа простых и гладких поверхностей.

21.4. Поверхностные интегралы II-го типа

Это новое понятие строится по образцу криволинейного интеграла второго типа. Там мы исходили из ориентированной кривой, разложив ее на части, проектировали на оси координат. Проекции получались тоже направленные, и мы брали их длину со знаком "плюс"или "минус"в зависимости от совпадения направления с осью.

Рассмотрим двустороннюю поверхность $S \subset \mathbf{R}^3$, гладкую или кусочно-гладкую, и фиксируем одну из двух ее сторон, это равносильно выбору на поверхности S определенной ориентации. Предположим, что поверхность S задана явным уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ плоскости xy. Тогда выбор возможен между верхней и нижней сторонами поверхности S. В первом случае замкнутой кривой на поверхности приписывается направление против часовой стрелки, во втором – обратное направление.

Пусть в точке поверхности S определена некоторая функция $f(x, y, z)$. Разложим поверхность S сетью кривых на части $\{\Delta S_i\}$, $i = \overline{1, n}$, и в пределах каждой части ΔS_i выберем точку (x_i, y_i, z_i). Вычислим значение функции $f(x_i, y_i, z_i)$ в этой точке и умножим его на площадь ΔD_i – проекции на плоскость xy элемента поверхности ΔS_i, взятую с определенным знаком по следующему правилу: если выбрана верхняя сторона поверхности S (нормаль $\overrightarrow{n} \perp S$ составляет острый угол с осью z) площадь ΔD_i берется со знаком "плюс" , если выбрана нижняя сторона поверхности S (нормаль $\overrightarrow{n}$ образует с осью z тупой угол), площадь ΔD_i берется со знаком "минус".

Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta D_i. \qquad (1)$$

Конечный предел сумм (1) при стремлении к нулю диаметров всех частей ΔS_i, если он существует, называется поверхностным интегралом второго типа от функции $f(x, y, z)$ по выбранной стороне поверхности S и обозначается

$$\int\limits_S\int f(x, y, z)\, dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta D_i. \qquad (2)$$

В этом символе нет указаний на то, какая сторона поверхности S взята, так что указание приходится делать каждый раз особо. Из определения (2) следует, что изменение рассматриваемой стороны поверхности S меняет знак поверхностного интеграла.

Может оказаться, что одни части поверхности ΔS_i лежат вверху поверхности S, а другие внизу, тогда их проекции ΔD_i на плоскость xy будут иметь разные знаки. Меняя роли осей координат (соответственно чему изменяя и требования к стороне поверхности), можно проектировать элементы поверхности ΔS_i не на плоскость xy, а на плоскость yz или zx. Так получаются другие два интеграла второго типа

$$\int\limits_S\int f(x,y,z)\,dydz, \quad \int\limits_S\int f(x,y,z)\,dzdx. \tag{3}$$

В приложениях встречаются соединения интегралов всех трех типов

$$\int\limits_S\int P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy, \tag{4}$$

где P, Q, R – функции от $(x,\ y,\ z)$, определенные на поверхности S.

Во всех случаях поверхность S предполагается двусторонней, и интеграл распространяется на определенную сторону.

Сведение к двойному интегралу

Будем предполагать, что функция $f(x,y,z)$ непрерывна в точках поверхности S.

1. Рассмотрим основной случай, когда поверхность S задана уравнением $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$ плоскости xy, причем функция z непрерывна вместе с частными производными $p = z'_x$ и $q = z'_y$. Если интеграл (2) берется по внешней стороне поверхности S, то в интегральной сумме (1) все ΔD_i положительны.

Подставляя в эту сумму значение $z_i = z(x_i,y_i)$, приведем ее к виду

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z(x_i,y_i))\Delta D_i.$$

Это интегральная сумма Римана для обыкновенного двойного интеграла

$$\int\limits_D\int f(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max\limits_i \{d(\Delta D_i)\} \to 0$, установим существование интеграла (2) и равенство

$$\int\!\!\int\limits_S f(x,y,z)\,dxdy = \int\!\!\int\limits_D f(x,y,z(x,y))\,dxdy. \tag{5}$$

Если распространить интеграл на нижнюю сторону поверхности S, то будем иметь

$$\int\!\!\int\limits_S f(x,y,z)\,dxdy = -\int\!\!\int\limits_D f(x,y,z(x,y))\,dxdy.$$

Теперь легко установить связь между поверхностными интегралами обоих типов. Пусть рассматривается верхняя сторона поверхности S. Если в формуле (6) п. 21.3, считая угол γ острым, заменить функцию $f(x,y,z)$ на $f(x,y,z)\cos\gamma$, то можно записать

$$\int\!\!\int\limits_D f(x,y,z(x,y))\,dxdy = \int\!\!\int\limits_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS.$$

Отсюда, с учетом (5), получается искомая формула

$$\int\!\!\int\limits_S f(x,y,z)\,dxdy = \int\!\!\int\limits_S f(x,y,z)\cos\gamma\,dS. \tag{6}$$

Заменяя верхнюю сторону поверхности нижней, мы тем самым меняем знак левой части равенства (6). Если одновременно под γ понимать тупой угол нормали $\overrightarrow{n} \perp S$ с осью z, то $\cos\gamma$ также изменяет знак и равенство (6) сохраняется.

2. Если S – цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси z, то все элементы поверхности ΔS_i имеют нулевую проекцию на плоскость xy и в этом случае

$$\int\!\!\int\limits_S f(x,y,z)\,dxdy = 0.$$

Очевидно, формула (6) имеет место и здесь, так как $\cos\gamma = 0$, то и правая часть будем нулем.

3. Если поверхность S состоит из кусков, рассматриваемых в п. 1 и 2, то, складывая формулы вида (6), относящихся к отдельным кускам, убедимся в том, что формула (6) справедлива и в этом случае.

4. Аналогичные формулы могут быть получены и для поверхностных интегралов (3). Складывая все три формулы, написанные соответственно для произвольных непрерывных функций P, Q, R, придем к общей формуле, связывающей поверхностные интегралы второго и первого типов

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS. \qquad (7)$$

Подчеркнем, что справа здесь фигурируют направляющие косинусы нормали $\overrightarrow{n} \perp S$, соответствующие той стороне поверхности, по которой взят интеграл слева.

5. Если поверхность S задана параметрическими уравнениями, то можно свести интеграл в правой части формулы (7), а с ним и интеграл в левой части, к обыкновенному двойному интегралу, распространив на область Γ изменения параметров $(u,\, v)$. Поверхность S предполагается простой и гладкой, ограниченной кусочно-гладким контуром ∂S.

Выберем определенную сторону поверхности S и, тем самым, установим на ней определенную ориентацию. Если положительному обходу контура $\partial\Gamma$ области Γ отвечает положительный обход контура ∂S, то направляющие косинусы нормали $\overrightarrow{n} \perp S$ определяются формулами

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

С другой стороны, при переходе к двойному интегралу по параметрам $(u,\, v)$, элемент площади dS надлежит заменить выражением $\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$. Окончательно получим равенство

$$\iint\limits_S P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iint\limits_\Gamma (AP + BQ + CR)dudv. \qquad (8)$$

Справа в функции P, Q, R вместо x, y, z нужно подставить их выражения через u и v.

21.5. Формула Гаусса - Остроградского

Формула Гаусса - Остроградского является аналогом формулы Грина теории двойных интегралов. Она связывает тройной интеграл по пространственной области V с поверхностным интегралом по границе области $S = \partial V$.

Теорема 1. Пусть $V \subset \mathbf{R}^3$ – замкнутая область в пространстве $\mathbf{R}^3$ с правой декартовой системой координат $(x,\, y,\, z)$, ограниченная кусочно-гладкой поверхностью $S = \partial V$. Функции $P,\, Q,\, R$ непрерывно дифференцируемы в области V. Тогда имеет место соотношение

$$\iiint\limits_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\, dxdydz = \iint\limits_S P\, dydz + Q\, dzdx + R\, dxdy, \tag{1}$$

где интеграл справа взят по внешней стороне поверхности.

► Рассмотрим область $V \subset \mathbf{R}^3$, ограниченную снизу и сверху поверхностями S_1 и S_2, которые заданы уравнениями $z = h_1(x,y)$ и $z = h_2(x,y)$, где $h_1 \le h_2$ – непрерывные функции x и y, заданные в области D плоскости xy. Боковая поверхность области V является цилиндрической поверхностью S_3 с образующей, параллельной оси z. Область D является проекцией тела V на плоскость xy. Пусть в области V определена функция $R(x,y,z)$, непрерывная вместе с производными $\partial R/\partial z$ во всей области V, включая границу $S = \partial V$. Тогда имеет место формула

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_S R\, dxdy, \tag{2}$$

причем $S = \partial V$ есть граница области V, интеграл справа распространяется на ее внешнюю сторону. Действительно, по формуле сведения тройного интеграла к повторному получим

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{h_2(x,y)}^{h_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$

$$= \iint\limits_D R(x,y,h_2(x,y))\, dxdy - \iint\limits_D R(x,y,h_1(x,y))\, dxdy.$$

Заменим здесь двойные интегралы поверхностными по формуле (5) п. 21.4

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\, dxdy + \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\, dxdy.$$

Первый интеграл справа берется по верхней стороне поверхности S_2, а второй – по нижней стороне поверхности S_1, отсюда смена знака. Это равенство не нарушится, если к правой части прибавить поверхностный интеграл по поверхности S_3. Так как $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3$, то получим формулу (2), которая представляет собой частный случай формулы Гаусса - Остроградского (1).

Аналогично формуле (2), справедливы формулы

$$\int\int_V\int \frac{\partial P}{\partial x}\,dxdydz = \int_S\int P\,dydz, \tag{3}$$

$$\int\int_V\int \frac{\partial Q}{\partial y}\,dxdydz = \int_S\int Q\,dzdx, \tag{4}$$

где P и Q – непрерывные в области V функции вместе со своими частными производными P'_x и Q'_y. Сложив три формулы (2), (3), (4), мы придем к общей формуле Гаусса - Остроградского. ◄

Формула Гаусса - Остроградского (1) верна и для более широкого класса областей, которые могут быть разложены на части рассматриваемого вида. Можно доказать также, что формула (1) справедлива вообще для областей, ограниченных произвольными кусочно-гладкими поверхностями.

Если привлечь поверхностный интеграл первого типа, то получим другой вид формулы Гаусса - Остроградского:

$$\int\int_V\int (P'_x + Q'_y + R'_z)\,dV = \int_S\int (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS, \tag{5}$$

где α, β, γ – углы между внешней нормалью $\overrightarrow{n} \perp S$ и координатными осями.

В качестве одного из применений формулы Гаусса - Остроградского рассмотрим задачу о вычислении объема тела с помощью поверхностного интеграла. В формуле (1) можно различным способом подобрать функции P, Q, R так, чтобы подынтегральное выражение в тройном интеграле оказалось равным единице, и тогда этот интеграл дает объем тела.

Полагая поочередно $P = x$, $Q = R = 0$; $Q = y$, $P = R = 0$; $R = z$, $P = Q = 0$, придем к формулам

$$V = \int_S\int x\,dydz = \int_S\int y\,dzdx = \int_S\int z\,dxdy.$$

Полагая $P = x/3$, $Q = y/3$, $R = z/3$, получим формулу

$$V = \frac{1}{3}\int\!\!\int\limits_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy.$$

Если перейти к поверхностным интегралам первого типа, то

$$V = \frac{1}{3}\int\!\!\int\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS = \frac{1}{3}\int\!\!\int\limits_S (\overrightarrow{r}\cdot\overrightarrow{n})\,dS,$$

где $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} + z\overrightarrow{e_3}$ – вектор точки, принадлежащей $S = \partial V$, $\overrightarrow{n} \perp S$ нормаль к поверхности $S = \partial V$, $\overrightarrow{n} = \cos\alpha\overrightarrow{e_1} + \cos\beta\overrightarrow{e_2} + \cos\gamma\overrightarrow{e_3}$.

21.6. Формула Стокса

Выведем формулу, связывающую поверхностный интеграл второго типа с криволинейным, которая является обобщением формулы Грина.

Теорема 1. Пусть $S \subset \mathbf{R^3}$ – гладкая поверхность в пространстве $\mathbf{R^3}$ с правой системой координат $(x,\ y,\ z)$, ограниченная кусочно-гладким контуром ∂S. Функции P, Q, R непрерывны вместе с частными производными в некоторой пространственной области, содержащей поверхность S. Тогда справедливо соотношение, называемое формулой Стокса

$$\int\!\!\int\limits_S (Q'_x - P'_y)\,dxdy + (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx = \int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz, \quad (1)$$

где положительному направлению обхода контура ∂S соответствует выбранная сторона поверхности S.

► Рассмотрим поверхность S, заданную явным уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ плоскости xy, функция f непрерывно дифференцируема в области D. Выберем сторону поверхности S, например, верхнюю, и установим положительное направление обхода контура ∂S. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ – параметрические уравнения контура ∂D области D, $\alpha \le t \le \beta$, изменению параметра t от α до β соответствует положительное направление обхода контура ∂D. Тогда уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где $z = f(x,y)$, $\alpha \le t \le \beta$, будут параметрическими уравнениями контура ∂S с положительным направлением обхода при изменении t от α до β. Применяя формулу, выражающую криволинейный интеграл через определенный, получим

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(t)x'_t + Q(t)y'_t + R(t)z'_t\big]\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big[P(t)x'_t + Q(t)y'_t + R(t)(f'_x x'_t + f'_y y'_t)\big]\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big(\big[P(x(t),y(t),f(x(t),y(t))) + pR(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))\big]x'_t +$$

$$+\big[Q(x(t),y(t),f(x(t),y(t))) + qR(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))\big]y'_t\Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\partial D} \big[P(x,y,f(x,y)) + pR(x,y,f(x,y))\big]dx + \big[Q(x,y,f(x,y)) + qR(x,y,f(x,y))\big]dy,$$

где $p = f'_x$, $q = f'_y$. По формуле Грина криволинейный интеграл по контуру ∂D может быть заменен двойным

$$\iint\limits_{D} \Big(\big[Q(x,y,f(x,y)) + qR(x,y,f(x,y))\big]'_x - \big[P(x,y,f(x,y)) + pR(x,y,f(x,y))\big]'_y\Big)\,dxdy.$$

Так как

$$\big[Q(x,y,f(x,y)) + qR(x,y,f(x,y))\big]'_x = Q'_x + p\,Q'_z + q'_x R + qR'_x + p\,qR'_z,$$

$$\big[P(x,y,f(x,y)) + pR(x,y,f(x,y))\big]'_y = P'_y + qP'_z + p'_y R + pR'_y + p\,qR'_z,$$

то находим

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{D} \big[(Q'_x - P'_y) - p\,(R'_y - Q'_z) - q(P'_z - R'_x)\big]\,dxdy. \quad (2)$$

Интеграл в правой части равен поверхностному интегралу по верхней стороне поверхности S:

$$\iint\limits_{D} \big[(Q'_x - P'_y) - p\,(R'_y - Q'_z) - q(P'_z - R'_x)\big]\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} (Q'_x - P'_y)\,dxdy + (R'_y - Q'_z)\,dydz + (P'_z - R'_x)\,dzdx, \quad (3)$$

ибо последний равен

$$\iint\limits_{S} \big[(R'_y - Q'_z)\cos\alpha + (P'_z - R'_x)\cos\beta + (Q'_x - P'_y)\cos\gamma\big]\,dS,$$

и, с учетом

$$\cos\alpha = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

равен интегралу (2). Из (2), (3) следует (1). ◄

При доказательстве формулы Стокса предполагалось, что $p'_y = z''_{yx}$ и $q'_x = z''_{xy}$ существуют и равны.

Замечание. Если переменить сторону поверхности S и соответственно изменить направление обхода контура ∂S, то оба интеграла в соотношении (2) изменят знак. Отсюда следует, что (2) справедливо и в том случае, когда поверхностный интеграл берется по нижней стороне поверхности S, а криволинейный интеграл по контуру ∂S в положительном направлении для нижней стороны поверхности.

Формула (1) остается справедливой и в случае поверхности, разлагающейся на конечное число частей, каждая из которых задается уравнением вида $z = f(x, y)$. Формула будет справедлива и для поверхности, обладающей указанными свойствами относительно других координатных плоскостей.

Для облегчения запоминания формулы Стокса заметим, что первое слагаемое в интеграле справа такое же, что и в формуле Грина, а остальные получаются из него круговой перестановкой букв x, y, z и P, Q, R.

ГЛАВА 22. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

22.1. Скалярные и векторные поля

Если с каждой точкой области $V \subset \mathbf{R}^3$ связано некоторое число или вектор, то говорят, что в области V задано скалярное или векторное поле, соответственно. Примерами скалярного поля являются поля температур или давления, примером векторного поля – поле скоростей, гравитационное или магнитное поля. Задание скалярного поля равносильно заданию функции $u(x, y, z) : V \to \mathbf{R}$. Мы будем предполагать, что функция u непрерывно дифференцируема в области V. Если частные производные не обращаются одновременно в нуль, то уравнение $u(x, y, z) = const$ определяет некоторую поверхность, на которой функция u сохраняет постоянное значение, такая поверхность называется поверхностью уровня. Вся рассматриваемая область V заполнена этими поверхностями, через каждую точку, принадлежащую V, проходит только одна поверхность уровня. Поверхности уровня между собой не пересекаются.

Задание векторного поля $\overrightarrow{a}(x, y, z)$ может быть осуществлено путем задания проекций вектора на оси декартовых координат $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$ как функций координат точки $(x, y, z) \in V$. Эти функции будем предполагать непрерывно дифференцируемыми в области V.

Векторной линией называется кривая, направление касательной которой в каждой точке совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{a}$ в этой точке. Так как направляющие косинусы касательной к кривой пропорциональны дифференциалам dx, dy, dz, то векторная линия характеризуется равенствами

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Если $\overrightarrow{a} \neq 0$, можно доказать, это делается в теории дифференциальных уравнений, что вся область V заполнена векторными линиями, которые между собой не пересекаются.

Можно рассматривать поверхности, составленные из векторных линий, их называют векторными поверхностями. Векторная поверхность характеризуется тем, что в любой ее точке соответствующий вектор $\overrightarrow{a}$ лежит в касательной плоскости к поверхности в данной точке или тем, что проекция вектора $\overrightarrow{a}$ на нормаль $\overrightarrow{n}$ к поверхности равна нулю во всех точках поверхности.

Если взять в рассматриваемой области $V \subset \mathbf{R}^3$ какую-то линию, отличную от векторной, и через каждую ее точку провести векторную линию, то множество этих линий и дает векторную поверхность. Если направляющая линия является замкнутой, то получится трубкообразная векторная поверхность, которая называется векторной трубкой.

Пусть задана функция $u(x, y, z)$ в области $V \subset \mathbf{R}^3$. Градиентом функции $u(x, y, z)$ называется вектор

$$\mathbf{grad}\, u = u'_x \overrightarrow{e_1} + u'_y \overrightarrow{e_2} + u'_z \overrightarrow{e_3},$$

где $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ – ортонормированный базис декартовых координат. Таким образом, из скалярного поля u мы получили векторное поле $\mathbf{grad}\, u$. Ранее мы ввели понятие производной по направлению, ее направление не связано с конкретной системой координат. Производную по направлению вектора $\overrightarrow{n}$ можно записать в виде

$$u'_n = \overrightarrow{n} \cdot \mathbf{grad}\, u = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma,$$

где $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_1} \cos\alpha + \overrightarrow{e_2} \cos\beta + \overrightarrow{e_3} \cos\gamma$. Отсюда видно, что наибольшего значения производная u'_n достигает в случае, когда направление вектора $\overrightarrow{n}$ совпадает с $\mathbf{grad}\, u$. Поэтому можно дать другое определение градиента: градиентом скалярной функции называется вектор, который характеризует по величине и направлению наибольшую скорость изменения функции u. Здесь координатная система не упоминается, что показывает независимость понятия градиента функции от системы координат.

Легко видеть, что направление градиента совпадает с направлением нормали $\overrightarrow{n}$ к поверхности уровня функции $u(x, y, z) = const$.

$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = \mathbf{grad}\, u \cdot d\overrightarrow{r} = 0,$$

где $d\overrightarrow{r} = dx\overrightarrow{e_1} + dy\overrightarrow{e_2} + dz\overrightarrow{e_3}$ – касательный вектор к поверхности уровня.

Гамильтон ввел в рассмотрение символический вектор

$$\overrightarrow{\nabla} = \overrightarrow{e_1}\frac{\partial}{\partial x} + \overrightarrow{e_2}\frac{\partial}{\partial y} + \overrightarrow{e_3}\frac{\partial}{\partial z},$$

"проекциями"которого являются производные по координатам. С помощью вектора $\overrightarrow{\nabla}$ удобно записывать различные операции векторного поля. Так, градиент функции можно записать в виде $\mathbf{grad}\, u = \overrightarrow{\nabla} u$.

Вопрос о том, может ли данное векторное поле быть рассмотрено как поле градиентов некоторой скалярной функции имеет важное значение.

22.2. Дивергенция вектора

Пусть в некоторой области $V \subset \mathbf{R}^3$ задано векторное поле $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{e_1} + a_y\overrightarrow{e_2} + a_z\overrightarrow{e_3}$. Возьмем поверхность S в этой области и выберем определенную ее сторону. Направляющие косинусы нормали $\overrightarrow{n} \perp S$ обозначим $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Поверхностный интеграл первого типа

$$\int\!\!\int_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\, dS = \int\!\!\int_S (\overrightarrow{a}, \overrightarrow{n})\, dS = \int\!\!\int_S a_n\, dS$$

называется потоком вектора $\overrightarrow{a}$ через поверхность S в указанную сторону. Правая часть равенства показывает независимость потока от системы координат. Понятие потока связано с задачами механики жидкости и физики.

Рассмотрим замкнутую область $V \subset \mathbf{R}^3$, ограниченную поверхностью $S = \partial V$. Через $\overrightarrow{n}$ обозначим внешнюю нормаль к поверхности $S\,(\overrightarrow{n} \perp S)$. Если в формуле Гаусса - Остроградского положить $P = a_x$, $Q = a_y$, $R = a_z$, то поток вектора через поверхность S можно записать через тройной интеграл по объему V

$$\int\!\!\int_S a_n\, dS = \int\!\!\int_V\!\!\int \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV.$$

Стоящее под знаком тройного интеграла выражение называется дивергенцией вектора $\overrightarrow{a}$ и обозначается

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{a}. \tag{1}$$

Формула Гаусса - Остроградского обычно записывается в виде

$$\int\!\!\int_V\!\!\int \mathrm{div}\,\overrightarrow{a}\, dV = \int\!\!\int_S (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a})\, dS, \tag{2}$$

где $\overrightarrow{n} \perp S$ – внешняя нормаль.

Дивергенция вектора есть скалярная величина и не должна зависеть от системы координат, но формальное ее определение равенством (1) связано с выбором системы координат. Чтобы показать независимость дивергенции от системы координат поступим следующим образом. Применим к левой части равенства (2) теорему о среднем, тогда

$$\iint\limits_S (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a})\, dS = \operatorname{div} \overrightarrow{a}\, (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) V, \quad (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in V.$$

Поделим равенство на объем V и перейдем к пределу, стягивая объем в точку $(x,\, y,\, z)$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{a} = \frac{\lim\limits_{V \to 0} \left(\iint\limits_S (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a})\, dS \right)}{V}. \tag{3}$$

Это равенство может служить определением дивергенции, причем в этой форме определение уже не зависит от системы координат.

Пример. Вычислим количество жидкости, протекающей через поверхность S за промежуток времени dt. Через элемент поверхности dS с нормалью $\overrightarrow{n}$ протечет жидкость массой $\rho\, (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v})\, dSdt$, ρ – плотность. Для всей поверхности S получим количество жидкости

$$\iint\limits_S \rho v_n \, dSdt, \quad v_n = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v}.$$

Количество протекшей жидкости Q, отнесенное к единице времени

$$Q = \iint\limits_S \rho v_n \, dS.$$

Это и есть поток вектора $\rho \overrightarrow{v}$ через поверхность S.

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости при наличии источников и стоков внутри объема V, ограниченного поверхностью S. Производительностью источников, заключенных внутри замкнутой поверхности S, называется количество вытекающей (или втекающей) через S жидкости, отнесенное к единице времени, то есть поток вектора скорости $\overrightarrow{v}$: $\iint\limits_S v_n \, dS$ (здесь нас интересует объем жидкости, а не масса, поэтому ρ отсутствует).

Если источники распределены непрерывно по области V, то вводится понятие плотности источников, то есть количество вытекающей жидкости, отнесенное к единице объема,

$$\frac{\lim\limits_{V\to 0}\left(\iint\limits_{S} v_n\,dS\right)}{V}.$$

Мы видели, что этот предел равен $\operatorname{div}\overrightarrow{v}$, таким образом $\operatorname{div}\overrightarrow{v}$ есть плотность источников в рассматриваемой области V, ограниченной поверхностью S.

22.3. Ротор вектора

Наряду с операциями градиента и дивергенции существует еще одна операция векторного поля, широко использующаяся в приложениях. Пусть в некоторой области $V \subset \mathbf{R}^3$ задано векторное поле $\overrightarrow{a}$. Интеграл

$$\int\limits_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int\limits_L (\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r}) = \int\limits_L (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{t})\,ds = \int\limits_L a_t\,ds, \tag{1}$$

взятый по некоторой кривой $L \subset V$, называется линейным интегралом от вектора $\overrightarrow{a}$ вдоль кривой L. В формуле (1) $d\overrightarrow{r} = \overrightarrow{t}\,ds$, $\overrightarrow{t}$ – вектор касательной к кривой, ds – элемент длины дуги. В случае замкнутой кривой L этот интеграл называется циркуляцией вектора $\overrightarrow{a}$ вдоль кривой L.

Рассмотрим некоторую поверхность S, ограниченную контуром ∂S. По формуле Стокса циркуляция вектора $\overrightarrow{a}$ вдоль контура ∂S может быть выражена через поверхностный интеграл

$$\int\limits_{\partial S}\overrightarrow{a}\cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_S\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS. \tag{2}$$

Вектор с проекциями на оси координат вида

$$\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_2}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_3}$$

называется ротором или вихрем вектора $\overrightarrow{a}$. Через оператор Гамильтона ротор записывается в форме $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\nabla}\times\overrightarrow{a}$. В векторной форме формула Стокса (2) имеет вид

$$\int\limits_{\partial S} a_t\,ds = \iint\limits_S(\overrightarrow{n}\cdot\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a})\,dS = \iint\limits_S \mathbf{rot}_n\overrightarrow{a}\,dS. \tag{3}$$

Циркуляция вектора $\overrightarrow{a}$ вдоль замкнутого контура равна потоку $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a}$ через поверхность, ограниченную этим контуром. При этом направление обхода контура и сторона поверхности должны быть согласованы друг с другом.

Данное выше определение $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a}$ связано с системой координат, на самом деле это понятие не зависит от выбора системы координат. Возьмем в любой точке области V плоскую площадку S с нормалью $\overrightarrow{n}$ и контуром ∂S. Тогда по формуле Стокса

$$\int\limits_{\partial S} a_t\,ds = \int\!\!\int\limits_{S} (\overrightarrow{n} \cdot \mathbf{rot}\,\overrightarrow{a})\,dS.$$

Применим к правой части теорему о среднем, затем поделим на S обе части и перейдем к пределу при $S \to 0$, стягивая область к рассматриваемой точке, тогда

$$\overrightarrow{n} \cdot \mathbf{rot}\,\overrightarrow{a} = \frac{\lim\limits_{S\to 0} \int\limits_{\partial S} a_t\,ds}{S}.$$

Таким образом удается определить проекцию $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a}$ на любую ось, следовательно, и сам вектор, без использования конкретной системы координат.

В результате применения операции ротора мы получили из одного векторного поля другое векторное поле.

Пример. Рассмотрим движение твердого тела вокруг неподвижной точки O. В кинематике доказано, что для любого момента времени поле скоростей $\overrightarrow{v}$ точек тела определяется формулой $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r}$, где $\overrightarrow{\omega}$ – мгновенная угловая скорость, $\overrightarrow{r}$ – радиус-вектор точки. Проекции вектора скоростей на координатные оси будут

$$\overrightarrow{v} = (\omega_y z - \omega_z y)\overrightarrow{e_1} + (\omega_z x - \omega_x z)\overrightarrow{e_2} + (\omega_x y - \omega_y x)\overrightarrow{e_3}.$$

Если вычислить $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{v}$ используя эту формулу, то окажется $\overrightarrow{\omega} = 0,5\,\mathbf{rot}\,\overrightarrow{v}$. Таким образом, ротор поля скоростей $\overrightarrow{v}$ дает мгновенную угловую скорость вращения, отсюда и само название операции – "ротор".

Рассмотрим некоторые операции теории поля

1. $\mathrm{div}\mathbf{grad}\,u = u''_x + u''_y + u''_z = \triangle u$, $\triangle u$ – оператор Лапласа.

2. $\mathrm{div}\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a} = 0$.

3. $\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,u = 0$.

22.4. Специальные типы векторных полей

Рассмотрим некоторое векторное поле $\overrightarrow{a}(x,y,z)$, определенное в области $V \subset \mathbf{R}^3$. Если существует скалярное поле $u(x,y,z)$, определенное на том же множестве, где функция u непрерывно дифференцируема, и в каждой точке области V $\overrightarrow{a} = \mathbf{grad}\, u$, то векторное поле $\overrightarrow{a}$ называется потенциальным, а функция u – потенциалом векторного поля. Для потенциального поля $\overrightarrow{a}$ выражение $\overrightarrow{a} \cdot d\overrightarrow{r} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$ является полным дифференциалом функции u, ротор этого поля $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a} = 0$. Понятие потенциального поля оказывается совпадает с понятием "безвихревого"поля. В таком поле циркуляция вектора по любому замкнутому контуру равна нулю. Если же брать криволинейный интеграл от вектора $\overrightarrow{a} = \mathbf{grad}\, u$ по кривой, соединяющей любые две точки области V, то его величина не зависит от вида кривой, соединяющей эти точки.

Определение 1. Область $V \subset \mathbf{R}^3$ называется поверхностно-односвязной, если на любой контур этой области можно натянуть поверхность, целиком лежащую в области V.

Если ограничиться предположением, что рассматриваемая область $V \subset \mathbf{R}^3$ поверхностно-односвязная, тогда справедлива теорема

Теорема 1. Для того, чтобы векторное поле $\overrightarrow{a}$ было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы во всей области V выполнялись равенства

$$\frac{\partial a_y}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}, \tag{1}$$

то есть чтобы $\mathbf{rot}\,\overrightarrow{a} = 0$.

► *Необходимость.* Условие (1) легко установить непосредственно. Если $\overrightarrow{a} = \mathbf{grad}\, u$, то $a_x = u'_x$, $a_y = u'_y$, $a_z = u'_z$ и из условия $u''_{xy} = u''_{yx} \Rightarrow \dfrac{\partial a_x}{\partial y} = \dfrac{\partial a_y}{\partial x}$ и т. д.

Достаточность. При выполнении условий (1) выражение $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ является полным дифференциалом некоторой функции u. Эту функцию можно непосредственно построить в виде криволинейного интеграла

$$u(x,y,z) = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} a_x dx + a_y dy + a_z dz. \tag{2}$$

При соблюдении условий (1) интеграл (2) не зависит от пути и однозначно определяется точками $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ и $(x,\, y,\, z)$. Частные производные функции

(2) по x, y, z будут проекциями вектора a_x, a_y, a_z. Это доказывается как и в случае двух переменных. ◀

Векторное поле $\overrightarrow{a}$ называется соленоидальным или трубчатым, если $\operatorname{div}\overrightarrow{a} = 0$. Это условие, в предположении что занимаемая телом область пространства – односвязна, равносильно требованию, чтобы поток вектора $\overrightarrow{a}$ через произвольную замкнутую и ограничивающую тело поверхность вовне был равен нулю.

Теорема 2. Пусть область $V \subset \mathbf{R}^3$ поверхностно-односвязная. Для того, чтобы векторное поле $\overrightarrow{a}$ было соленоидальным необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint\limits_S (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{a})\, dS = 0. \tag{3}$$

► *Необходимость.* Это утверждение сразу следует из формулы Гаусса - Остроградского.

Достаточность. Пусть в некоторой области $V \subset \mathbf{R}^3$ выполнено условие (3). Возьмем любую точку, принадлежащую V, и содержащую ее окрестность V_ε. Напишем формулу Гаусса - Остроградского

$$\iint\limits_{\partial V_\varepsilon} a_n\, dS = \iiint\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{div}\overrightarrow{a}\, dV_\varepsilon = 0.$$

Ввиду произвольности точки и области V_ε отсюда следует $\operatorname{div}\overrightarrow{a} = 0$ в области V. ◀

Пример 1. Рассмотрим векторную трубку между двумя ее сечениями S_1 и S_2, поверхность трубки обозначим S_3. Для соленоидального поля $\overrightarrow{a}$ по доказанному

$$\left(\iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \iint\limits_{S_3}\right) a_n\, dS = 0,$$

Нормаль $\overrightarrow{n} \perp S$ во всех случаях внешняя. На поверхности S_3 очевидно $a_n = 0$ (вектор $\overrightarrow{a}$ лежит в касательной плоскости к S_3) и интеграл по S_3 равен нулю. Изменим направление нормали $\overrightarrow{n} \perp S_1$ на противоположное, тогда

$$\iint\limits_{S_1} a_n\, dS = \iint\limits_{S_2} a_n\, dS.$$

В соленоидальном поле поток вектора через поперечное сечение векторной трубки сохраняет постоянную величину, его называют интенсивностью векторной трубки. Если обратиться к гидромеханической интерпретации векторного поля, то в случае несжимаемой жидкости и при отсутствии источников ($\operatorname{div}\overrightarrow{a} = 0$) расход жидкости через поперечное сечение векторной трубки один и тот же для всех сечений.

Пример 2. Рассмотрим поле тяготения, создаваемое телом V с массовой плотностью ρ. Возьмем точку $A(\xi, \eta, \zeta)$ вне тела и вычислим силу, с которой притягивается единичная масса в точке A телом V. По закону Ньютона сила притяжения, создаваемая элементом массы тела $dm = \rho\, dV$ в точке $M(x, y, z)$, имеет проекции на оси координат (коэффициент пропорциональности равен единице)

$$dF_x = \frac{x-\xi}{r^3}\,\rho\, dV, \quad dF_y = \frac{y-\eta}{r^3}\,\rho\, dV, \quad dF_z = \frac{z-\zeta}{r^3}\,\rho\, dV,$$

где $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ – расстояние между точками A и M. Суммируя все эти силы по объему тела, получим

$$F_x = \iiint\limits_V \frac{x-\xi}{r^3}\,\rho\, dV, \quad F_y = \iiint\limits_V \frac{y-\eta}{r^3}\,\rho\, dV, \quad F_z = \iiint\limits_V \frac{z-\zeta}{r^3}\rho\, dV.$$

Силы притяжения имеют потенциал

$$W = \iiint\limits_V \frac{\rho\, dV}{r}.$$

Если точка A лежит вне тела V, то все интегралы собственные, дифференцируя по переменным ξ, η, ζ, получим

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad F_y = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad F_z = \frac{\partial W}{\partial \zeta}.$$

Если точка A находится внутри тела V, то интегралы будут несобственными (в этой точке $r = 0$), однако эти интегралы сходятся и формулы для сил F_x, F_y, F_z через функцию W имеют место.

ГЛАВА 23. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную в промежутке $P = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, a \le x \le b,\, c \le y \le d\}$, где возможно $b = +\infty$. Пусть при каждом $y \in [c,d]$ функция $f(x,y)$ интегрируема по x в промежутке $[a,b]$ в собственном или несобственном смысле. Выражение

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$$

называется интегралом, зависящим от параметра, а число y называется параметром. По отношению к функции $I(y)$ возникает ряд вопросов: непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость по параметру y.

23.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Определение 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена на множестве $X \times Y$, где $x \in X \subset \mathbf{R}$, $y \in Y \subset \mathbf{R}$. Если при $y \to y_0$, где y_0 – предельная точка множества Y, существует конечная предельная функция $\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = \varphi(x)$, $x \in X$ и для $\forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, \delta(\varepsilon){>}0$ такое, что при $|y - y_0| < \delta$ будет $|f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in X$, то говорят, что $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно $x \in X$.

Можно сформулировать определение для случая, когда $y_0 = \pm\infty$. В этом случае неравенство $|y - y_0| < \delta$ заменяется неравенством $|y| > M$. Мы уже встречались с понятием равномерной сходимости, когда рассматривали функциональные последовательности $f_n(x)$, где параметром служило число $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим некоторые обобщения утверждений, доказанных для функциональной последовательности.

1. Принцип равномерной сходимости.

Для того, чтобы при $y \to y_0$ функция $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно $x \in X$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, \delta(\varepsilon){>}0$ такое, что для любых y_1, $y_2 \in Y$, где $|y_1 - y_0| < \delta$, $|y_2 - y_0| < \delta$, выполнялось неравенство

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon, \quad \text{для} \quad \forall x \in X. \tag{1}$$

► *Необходимость.* Пусть $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$. Тогда для $\forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, \delta(\varepsilon){>}0$ такое, что при любых y_1, $y_2 \in Y$: $|y_1 - y_0| < \delta$, $|y_2 - y_0| < \delta$ будут выполняться неравенства

$$|f(x,y_1) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f(x,y_2) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует неравенство (1).

Достаточность. Если условие (1) выполнено, то ясно, что существует предельная функция $\varphi(x)$ (критерий Коши). Переходя к пределу в неравенстве (1) при $y_2 \to y_0$, причем y_1 фиксировано так, что $|y_1 - y_0| < \delta$, получим $|f(x, y_1) - \varphi(x)| < \varepsilon$, здесь можно заменить $y_1 = y$. Этим и устанавливается равномерная сходимость $f(x, y)$ к функции $\varphi(x)$. ◄

2. Непрерывность предельной функции.

Если функция $f(x, y)$ при любом $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a, b]$ и при $y \to y_0$ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, тогда и $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

► Возьмем любую последовательность $\{y_n\}$ из Y, $y_n \to y_0$, чтобы соответствующая последовательность функций $f(x, y_n) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a, b]$ при $y_n \to y_0$. При конечном y_0 неравенство $|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$ будет выполняться для $\forall x \in [a, b]$, если n таково, что $|y_n - y_0| < \delta$. На основании теоремы для функциональных последовательностей функция $\varphi(x)$ будет непрерывной. ◄

3. Обобщенная теорема Дини.

Теорема Дини. Пусть функция $f(x, y)$ при любом $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a, b]$ и при $y \uparrow y_0 :\ f(x, y) \uparrow \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Тогда при $y \uparrow y_0$ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно $x \in [a, b]$.

► Выделим из Y последовательность $y_n \uparrow y_0$ и рассмотрим соответствующую последовательность функций $f(x, y_n) \uparrow \varphi(x)$. По теореме Дини $f(x, y_n) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно $x \in [a, b]$. Следовательно, для $\forall\, \varepsilon{>}0\ \exists\, n_\varepsilon$: для любого x и $\forall n{>}n_\varepsilon$ будет $|f(x, y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Ввиду монотонности функции f будет $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для $\forall y > y_n$, $n > n_\varepsilon$. Теорема доказана. ◄

23.2. Предельный переход под знаком интеграла

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ при любом $y \in Y$ непрерывна по $x \in [a, b]$ и при $y \to y_0$ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно x. Тогда имеет место равенство

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x, y)\, dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\, dx. \tag{1}$$

► Непрерывность предельной функции $\varphi(x)$ доказана выше. Поэтому функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$. Возьмем $\forall\, \varepsilon{>}0$ и такое $\delta(\varepsilon){>}0$, чтобы при $|y - y_0| < \delta$

было $|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$ для любого $x\in[a,b]$. Тогда при этих y

$$\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx-\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\right|=\left|\int\limits_a^b [f(x,y)-\varphi(x)]\,dx\right|\le\int\limits_a^b \big|f(x,y)-\varphi(x)\big|\,dx<\varepsilon(b-a),$$

что и доказывает формулу (1). ◀

При выполнении равенства (1) говорят, что допустим предельный переход по параметру под знаком интеграла.

Следствие 1. Если функция $f(x,y)$ при фиксированном y непрерывна по $x\in[a,b]$ и при $y\uparrow y_0$ $f(x,y)\uparrow\varphi(x)$, то имеет место формула (1).

▶ Предположим, все $y<y_0$, результат получим на основании обобщенной теоремы Дини. ◀

Рассмотрим вопрос о непрерывности интеграла $I(y)$ по параметру.

Теорема 2. Если функция $f(x,y)$ определена и непрерывна по двум переменным x и y в промежутке $P=[a,b;c,d]$, то интеграл $I(y)=\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ будет непрерывной функцией y на промежутке $[c,d]$.

▶ Ввиду равномерной непрерывности функции $f(x,y)$ на P по $\forall\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta(\varepsilon){>}0$ что из неравенств $|x_2-x_1|<\delta$, $|y_2-y_1|<\delta\ \ \Rightarrow\ \ |f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)|<\varepsilon$. Положим, в частности, $x_1=x_2=x$, $y_1=y_0$, $y_2=y$, тогда при $|y-y_0|<\delta$ для любого $x\in[a,b]$ будем иметь $|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon$. Таким образом, $f(x,y)\rightrightarrows f(x,y_0)$ при $y\to y_0$. В таком случае по теореме 1 выполняется равенство (1) или $\lim\limits_{y\to y_0} I(y)=I(y_0)$. ◀

23.3. Дифференцирование и интегрирование по параметру

Если производная от интеграла $I(y)$ может быть найдена по формуле

$$I'(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)\,dx, \tag{1}$$

то говорят, что интеграл $I(y)$ можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла. Вычисление производной по формуле (1) называется правилом Лейбница. Следующая теорема устанавливает достаточное условие для применения этого правила.

Теорема 1. Пусть функция $f(x,y)$ определена в промежутке $P=[a,b;c,d]$ и непрерывна по x в $[a,b]$ при любом фиксированном $y\in[c,d]$. Предположим, что существует частная производная $f'_y(x,y)$, непрерывная в промежутке P по x и y. Тогда при любом $y \in [c,d]$ имеет место формула (1).

► Непрерывность функции $f(x,y)$ по x обеспечивает существование интеграла $I(y)$. Фиксируем любое значение y и дадим ему приращение $\Delta y = h$. Тогда

$$\frac{I(y+h)-I(y)}{h} = \int\limits_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx. \tag{2}$$

Нужно доказать, что в интеграле справа допустим предельный переход при $h \to 0$, этим будет доказано и существование производной $I'(y)$ и наличие равенства (1). Имеем

$$\begin{gathered} I'(y) = \lim_{h\to 0}\int\limits_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx = \\ = \lim_{h\to 0}\int\limits_a^b f'_y(x,y+\theta h)\,dx, \quad (0<\theta<1). \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь мы использовали формулу конечных приращений Лагранжа. Ввиду равномерной непрерывности функции $f'_y(x,y)$, по $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta(\varepsilon){>}0$ такое, что при $|x_2-x_1|<\delta$ и $|y_2-y_1|<\delta$ будет выполняться неравенство

$$|f'_y(x_2,y_2)-f'_y(x_1,y_1)|<\varepsilon.$$

Пологая здесь $x_1=x_2=x$, $y_1=y$, $y_2=y+\theta h$ и считая $|\,h|<\delta$, получим, что для любого x будет

$$|f'_y(x,y+\theta h)-f'_y(x,y)|<\varepsilon.$$

Отсюда ясно, что подынтегральная функция в (3) при $h\to 0$ стремится к предельной функции $f'_y(x,y)$ равномерно относительно x. По теореме 1 п. 23.2 оправдан предельный переход под знаком интеграла в формуле (3). ◄

Рассмотрим вопрос о существовании интеграла по y от функции $I(y)$ в промежутке $[c,d]$. Нас особо будет интересовать случай, когда этот интеграл выразится формулой

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy. \tag{4}$$

При наличии формулы (4) говорят, что функцию $I(y)$ можно интегрировать по параметру y под знаком интеграла. Достаточные условия интегрируемости дает следующая теорема.

Теорема 2. Если функция $f(x,y)$ непрерывна по x и y в промежутке $P = [a,b;c,d]$, то функция $I(y)$ интегрируема по y в промежутке $[c,d]$, и имеет место формула (4).

► Из непрерывности функции $f(x,y)$ по двум переменным и теоремы 2 п. 23.2 следует непрерывность функции $I(y)$, поэтому эта функция интегрируема по y в промежутке $[c,d]$ и, следовательно, существует двойной интеграл от функции $f(x,y)$. Для двойного интеграла выполнены все условия теоремы о сведении его к повторному, поэтому справедливо равенство (4). ◄

Перейдем к рассмотрению более общего случая зависимости интеграла от переменных, когда не только подынтегральная функция $f(x,y)$ содержит параметр, но и сами пределы интеграла зависят от него

$$I(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,dx. \tag{5}$$

Ограничимся вопросом о непрерывности и дифференцируемости по параметру y интеграла (5).

Теорема 3. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна в промежутке $P = [a,b;c,d]$, а кривые $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$, $(c \le y \le d)$, непрерывны и не выходят за пределы промежутка P, тогда интеграл (5) является непрерывной функцией y на промежутке $[c,d]$. Если, сверх сказанного, функция $f(x,y)$ имеет в промежутке P непрерывную производную $f'_y(x,y)$ и существуют производные $\alpha'(y)$, $\beta'(y)$ на $[c,d]$, то интеграл (5) имеет производную по параметру y, которая выражается формулой

$$I'(y) = \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)\,dx + \beta'(y)f(\beta(y),y) - \alpha'(y)f(\alpha(y),y). \tag{6}$$

► Интеграл (5) получается из интеграла

$$I(y,u,v) = \int\limits_{u}^{v} f(x,y)\,dx,$$

зависящего от трех переменных y, u, v, подстановкой $u = \alpha(y)$, $v = \beta(y)$. Применяя общие теоремы о непрерывности и дифференцируемости сложной функции $I(y, u(y), v(y))$, получим требуемый результат. В частности, формула (6) есть следствие равенства

$$\frac{dI}{dy} = I'_y + I'_u u'_y + I'_v v'_y. \quad ◀$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I(a,b) = \int\limits_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx, \quad 0 < a \leq b.$$

Подынтегральную функцию можно записать в виде $\dfrac{x^a - x^b}{\ln x} = \int\limits_a^b x^y\, dy$. Тогда

$$I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_a^b x^y\, dy = \int\limits_a^b dy \int\limits_0^1 x^y\, dx = \int\limits_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

Можно сделать по другому. Продифференцируем интеграл по параметру b $I'_b = \int\limits_0^1 x^b\, dx = \dfrac{1}{b+1}$. Следовательно, $I = \ln(b+1) + C$. Но при $a = b$ интеграл $I = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \ln(a+1) + C,\; C = -\ln(a+1)$. Отсюда $I = \ln\dfrac{b+1}{a+1}$.

В рассматриваемом примере выполнены условия теорем о дифференцировании и интегрировании функции $I(a,b)$ по параметру. При нарушении этих условий заключение теорем может оказаться неверным.

23.4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

При распространении изложенной теории интегралов, зависящих от параметра, на случай несобственных интегралов особую роль играет понятие равномерной сходимости интегралов.

Пусть функция $f(x,y)$ определена для любых $x \geq a$ и $y \in Y$. Если при каждом y в этой области существует конечный или нет предел

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\, dx = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A f(x,y)\, dx, \tag{1}$$

он называется несобственным интегралом первого рода, зависящем от параметра. Если предел $I(y)$ конечный, то интеграл называется сходящимся. Если стремление к $I(y)$ происходит равномерно относительно y в области Y, то интеграл $I(y)$ называется равномерно сходящимся относительно $y \in Y$. Это означает, что для $\forall\,\varepsilon{>}0$ существует число $A_0 \geq a$, не зависящее от y, что для любых $A > A_0$ неравенство

$$\Bigl|\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_A^{\infty} f(x,y)\,dx\Bigr| < \varepsilon$$

будет выполняться одновременно для $\forall\,y \in Y$.

Сформулируем критерий Коши равномерной сходимости интеграла (1).

Критерий Коши. Для того, чтобы несобственный интеграл (1) сходился равномерно относительно $y \in Y$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,A_0 \geq a$, не зависящее от y, чтобы при любых $A_2 > A_1 > A_0$ неравенство

$$\Bigl|\int\limits_a^{A_2} f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{A_1} f(x,y)\,dx\Bigr| = \Bigl|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\Bigr| < \varepsilon \qquad (2)$$

выполнялось для $\forall\,y \in Y$.

► Введем функцию

$$F(A,y) = \int\limits_a^{A} f(x,y)\,dx,$$

тогда неравенство $|F(A_2,y) - F(A_1,y)| < \varepsilon$ является следствием определения и критерия Коши равномерной сходимости функции $F(A,y)$ при $A \to \infty$ к функции $I(y)$. ◄

Признак Вейерштрасса. Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна по x при $x \geq a$ для любого фиксированного $y \in Y$. Если существует функция $\varphi(x) \geq 0$, интегрируемая на промежутке $[a,+\infty)$, и при $\forall\,y \in Y$ $|f(x,y)| \leq \varphi(x)$, то интеграл (1) сходится равномерно относительно y.

► Это утверждение непосредственно следует из неравенства

$$\Bigl|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\Bigr| \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x,y)|\,dx \leq \int\limits_{A_1}^{A_2} \varphi(x)\,dx,$$

если воспользоваться критерием Коши. ◄

Признак сходимости Дирихле - Абеля. Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ при каждом $y \in Y$ интегрируемы по x на любом отрезке $[a,A] \subset [a,b)$. Для равномерной сходимости интеграла

$$\int_a^b f(x,y)g(x,y)\,dx \tag{3}$$

на множестве Y достаточно, чтобы была выполнена любая из следующих пар условий:

a_1) существует константа M такая, что при любом $A \in [a,b)$ и $\forall\, y \in Y$ выполнено неравенство $\left|\int\limits_a^A f(x,y)\,dx\right| < M$

a_2) при каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x на промежутке $[a,b)$ и $g(x,y) \rightrightarrows 0$ на Y при $x \to b$, $x \in [a,b)$

b_1) интеграл $\int\limits_a^b f(x,y)\,dx$ сходится равномерно на множестве Y

b_2) при каждом $y \in Y$ функция $g(x,y)$ монотонна по x на промежутке $[a,b)$, и существует константа M, что при любом $x \in [a,b)$ и любом $y \in Y$ выполняется неравенство $|g(x,y)| < M$.

► Так как функции f и g интегрируемы по x, а функция g монотонна, то применим вторую теорему о среднем для интеграла в критерии Коши

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,dx = g(A_1,y)\int\limits_{A_1}^{\xi} f(x,y)\,dx + g(A_2,y)\int\limits_{\xi}^{A_2} f(x,y)\,dx,$$

где $\xi \in [A_1, A_2]$. Если A_1 и A_2 брать в достаточно малой окрестности точки b, то правую часть равенства можно сделать по модулю меньше $\forall\,\varepsilon>0$, причем сразу для любых $y \in Y$. В случае условий a_1), a_2) это очевидно. В случае условий b_1), b_2) это становится очевидным, если воспользоваться критерием Коши равномерной сходимости интеграла. Таким образом, вновь ссылаясь на критерий Коши, заключаем, что интеграл (3) действительно сходится равномерно на множестве Y. ◄

Замечание 1. Доказательство признака по существу совпадает с доказательством аналогичного признака для рядов, так как, ввиду независимости постоянной M от y, оценка интеграла $\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)g(x,y)\,dx$ получается независимо от y, чем обеспечивается равномерная сходимость.

Несобственные интегралы второго рода

Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную для $x \in [a,b)$ и $y \in Y$. В точке $x = b$ функция $f(x,y)$ неограничена. Если при любом фиксированном $y \in Y$ существует конечный или нет предел

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx = \lim_{\xi\to 0}\int_a^{b-\xi} f(x,y)\,dx, \tag{4}$$

то он называется несобственным интегралом второго рода, зависящем от параметра. Если предел $I(y)$ конечный, то интеграл называется сходящимся.

Если стремление происходит равномерно относительно $y \in Y$, то говорят, что интеграл (4) равномерно сходится относительно y в указанной области.

Это значит, что для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta(\varepsilon){>}0$ такое, что при $\forall\,\xi \le \delta$ неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x,y)\,dx - \int\limits_a^{b-\xi} f(x,y)\,dx\right| = \left|\int\limits_{b-\xi}^b f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon$$

будет выполняться одновременно для любых $y \in Y$.

Нетрудно сформулировать здесь необходимое и достаточное условие равномерной сходимости, а также перенести на рассматриваемый случай достаточные признаки сходимости.

Если особой точкой является не $x = b$, а $x = a$, тогда вместо (4) рассматривается интеграл $\int\limits_{a+\xi}^b f(x,y)\,dx$ при $\xi \to 0$ и все сказанное переносится на этот случай.

23.5. Использование равномерной сходимости интегралов. Предельный переход под знаком интеграла

Рассмотрим интеграл с бесконечным пределом

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx, \tag{1}$$

который зависит от параметра $y \in Y$, и докажем для него ряд теорем, сходных с теоремами для собственных интегралов.

Теорема 1. (о предельном переходе). Пусть функция $f(x,y)$, определенная для $x \ge a$, $y \in Y$, удовлетворяет условиям: 1) непрерывна по x при фиксированном y; 2) при $y \to y_0$ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно x в каждом конечном промежутке $[a, A]$; 3) интеграл (1) равномерно сходится относительно $y \in Y$, тогда

$$\lim_{y\to y_0} \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx. \tag{2}$$

► Прежде всего отметим, что в условиях теоремы 1), 2) функция $\varphi(x)$ будет непрерывна при $x \in [a, A]$. Равномерная сходимость интеграла (1) означает, что для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\, A_0 > a$, что

$$\Bigl|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x,y)\,dx\Bigr| < \varepsilon$$

для $\forall\, y \in Y$ и $A_2 > A_1 > A_0$. Переходя здесь к пределу при $y \to y_0$ под знаком интеграла, получим

$$\Bigl|\int\limits_{A_1}^{A_2} \varphi(x)\,dx\Bigr| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что функция $\varphi(x)$ интегрируема в промежутке $[a, \infty)$. При любом $A > a$ имеем

$$\Bigl|\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx - \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx\Bigr| \le \Bigl|\int\limits_a^A f(x,y)\,dx - \int\limits_a^A \varphi(x)\,dx\Bigr| + \Bigl|\int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx\Bigr| + \Bigl|\int\limits_A^\infty \varphi(x)\,dx\Bigr|.$$

Если взять $\forall\,\varepsilon{>}0$, то можно сначала фиксировать A так, что второе и третье слагаемые станут меньше $\varepsilon/3$ независимо от y (в силу равномерной сходимости интегралов), а затем настолько приблизить y к y_0 (используя теорему о предельном переходе), чтобы сделать и первое слагаемое меньше $\varepsilon/3$. Тогда для указанных A и y будет

$$\Bigl|\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx - \int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx\Bigr| < \varepsilon,$$

что и приводит к равенству (2). ◄

Следствие 1. Пусть неотрицательная функция $f(x, y)$ непрерывна по x для $x \ge a$ и при $y \uparrow y_0$ $f(x, y) \uparrow \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ также непрерывна при $x \ge a$. Тогда из существования интеграла $\int\limits_a^\infty \varphi(x)\,dx$ вытекает как существование интеграла (1) при любом $y \in Y$, так и наличие формулы (2).

► По теореме Дини при указанных условиях $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$ относительно x в любом конечном промежутке. В силу неравенства $f(x, y) \le \varphi(x)$ существует интеграл (1). Функция $\varphi(x)$ одновременно играет и роль мажоранты, обеспечивающей равномерную относительно y сходимость интеграла (1). Таким образом, соблюдены все условия для применения теоремы 1. ◄

Теорема 2. (о непрерывности интеграла). Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна при $x \geq a$ и $y \in [c, d]$. Если интеграл (1) сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то он представляет собой непрерывную функцию от параметра y в этом промежутке.

► Для конечного промежутка $x \in [a, A]$ при $y \to y_0$ $f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0)$ относительно x (теорема 2 п.23.2). А тогда по теореме 1 в интеграле (1) можно перейти к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} f(x, y_0)\, dx = I(y_0),$$

что и доказывает наше утверждение. ◄

Докажем для несобственных интегралов аналог теоремы Дини о равномерной сходимости положительных рядов.

Теорема 3. Если непрерывная функция $f(x, y)$ неотрицательна при $x \geq a$, $y \in [c, d]$, то из непрерывности интеграла (1) как функции параметра y вытекает равномерная его сходимость.

► В этом случае непрерывная по теореме 2 п.23.2 функция от y $\int_a^A f(x, y)\, dx$ при возрастании A возрастает и, следовательно, по обобщенной теореме Дини п.23.1, стремится к своему пределу (1) равномерно относительно y. ◄

23.6. Интегрирование и дифференцирование по параметру

Теорема 1. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна при $x \geq a$, $y \in [c, d]$. Если интеграл $I(y)$ сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то имеет место формула

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^{\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{\infty} dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{1}$$

► Функция $I(y)$ непрерывна и потому интегрируема. При $\forall\, A > a$ имеем

$$\int_c^d I(y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)\, dx + \int_c^d dy \int_A^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

По теореме 2 § 3

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^A f(x,y)\,dx = \int\limits_a^A dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Рассмотрим разность

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy - \int\limits_a^A dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx.$$

Для $\forall\,\varepsilon{>}0$ возьмем $A > a$ таким, чтобы

$$\left|\int\limits_A^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \quad \text{для} \quad \forall\, y \in [c,d].$$

Тогда

$$\left|\int\limits_c^d I(y)\,dy - \int\limits_a^A dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right| < (d-c)\varepsilon.$$

В таком случае

$$\int\limits_c^d I(y)\,dy = \lim_{A\to\infty} \int\limits_a^A dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy,$$

что равносильно равенству (1). ◄

Если воспользоваться теоремой 3 п.23.5, то легко вывести отсюда такое следствие.

Следствие 1. В случае неотрицательной функции $f(x,y)$ одна непрерывность интеграла $I(y)$ по y влечет за собой формулу (1).

Таким образом, при определенных условиях, мы установили право переставлять два интеграла, из которых один берется по бесконечному промежутке, а другой – по конечному. Во многих случаях приходится переставлять интегралы, взятые оба в бесконечных промежутках, по формуле

$$\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy. \qquad (2)$$

Оправдать такую перестановку часто является делом сложным. Лишь для узкого класса случаев удается обосновать формулу (2) общими методами.

Теорема 2. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна для $x \geq a$, $y \geq c$. Если оба интеграла

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy \qquad (3)$$

являются непрерывными функциями (первый по y, второй – по x), тогда из существования одного из интегралов

$$\int\limits_c^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx, \quad \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy \tag{4}$$

следует существование другого, и имеет место равенство (2).

► Допустим, что существует второй из интегралов (4). По следствию 1, для любого конечного $c_1 > c$ будет

$$\int\limits_c^{c_1} dy \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^{c_1} f(x,y)\,dy. \tag{5}$$

Подынтегральная функция $\int\limits_c^{c_1} f(x,y)\,dy$ как функция x и c_1 непрерывна по x (теорема 2 п.23.2) и при $c_1 \to \infty$ возрастая стремится к функции $\int\limits_c^\infty f(x,y)\,dy$, по предположению непрерывной и интегрируемой по x в промежутке $[a,\infty)$. Применив к интегралу в правой части формулы (5) следствие 1 из п.23.2, перейдем к пределу при $c_1 \to \infty$ под знаком интеграла. В таком случае существует и предел интеграла в левой части равенства (5), то есть первый из интегралов (4), и оба повторных интеграла оказываются равными. ◄

Перейдем к вопросу дифференцирования интеграла по параметру. Соответствующую теорему мы выведем из теоремы 1 подобно тому, как мы делали для функциональных рядов.

Теорема 3. Пусть функция $f(x,y)$ определена и непрерывна по x для $x \geq a$, $y \in [c,d]$ и имеет для указанных значений непрерывную по x и y производную $f'_y(x,y)$. Предположим далее, что интеграл $I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx$ существует при любом $y \in [c,d]$, а интеграл $\int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$ существует и равномерно сходится относительно y. Тогда при любом $y \in [c,d]$ имеет место формула

$$I'(y) = \int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx.$$

► Применив к функции $f'_y(x,y)$ теорему 1, заменив d на $\forall\, y \in [c,d]$, будем иметь

$$\int\limits_c^y dy \int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^y f'_y(x,y)\,dy = \int\limits_a^\infty f(x,y)\,dx - \int\limits_a^\infty f(x,c)\,dx. \qquad (6)$$

Так как подынтегральная функция интеграла слева, то есть интеграл $\int\limits_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$, есть непрерывная функция от y (по теореме 2 п.23.5), то интеграл слева будет иметь именно ее своей производной по y. Следовательно, ту же производную будет иметь и интеграл $I(y)$, входящий в правую часть равенства (6) и отличающийся от интеграла слева лишь на постоянную. Теорема доказана. ◄

Замечание. Мы подробно рассмотрели несобственные интегралы первого рода, зависящие от параметра, для которых единственное особое значение $x = \infty$. Подобная же теория может быть развита и для несобственных интегралов второго рода, когда особая точка функции f будет конечной, например, $x = b$. Во всех доказанных утверждениях можно роль $x = \infty$ отвести числу $x = b$, заменив повсюду равномерную сходимость при $x = \infty$ равномерной сходимостью при $x = b$.

23.7. Кратные интегралы, зависящие от параметра.

Собственные кратные интегралы

Пусть функция $f(x,y)$ определена в области $X \times Y$, где $X \subset \mathbf{R}^n$, $Y \subset \mathbf{R}^m$, $x = (x_1, ..., x_n) \in X$, $y = (y_1, ..., y_m) \in Y$. Причем при фиксированном $y \in Y$ функция f интегрируема по x в области X. Тогда выражение

$$I(y) = \int\limits_X f(x,y)\,dx, \qquad (1)$$

определенное в области Y, называется кратным интегралом, зависящим от параметра y. Так как y – точка m - мерного пространства, то интеграл (1) зависит от m числовых параметров.

В полной аналогии с ранее рассмотренными теоремами для одномерного интеграла, зависящего от параметра, могут быть доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 (о непрерывности по параметру). Если функция $f(x,y)$ непрерывна по совокупности аргументов в замкнутой области $\overline{X} \times \overline{Y}$, то интеграл $I(y)$ представляет собой непрерывную функцию параметра y в $\overline{Y}$.

Теорема 2. (об интегрировании по параметру). Если функция $f(x,y)$ непрерывна по x и y в замкнутой области $\overline{X} \times \overline{Y}$, то функцию $I(y)$ можно интегрировать по параметру y под знаком интеграла, и справедливо равенство

$$\int\limits_Y I(y)\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy. \tag{2}$$

Теорема 3 (о дифференцировании по параметру). Если функция $f(x,y)$ и ее частная производная $\partial f/\partial y_k$, $k = \overline{1,m}$, непрерывны в области $\overline{X} \times \overline{Y}$, то интеграл $I(y)$ имеет в области Y непрерывную частную производную $\partial I/\partial y_k$, причем справедливо равенство

$$\frac{\partial I}{\partial y_k} = \int\limits_X \frac{\partial f(x,y)}{\partial y_k}\,dx. \tag{3}$$

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Если в интеграле (1) неограничены множество $X \subset \mathbf{R}^n$ или функция $f(x,y)$, то он понимается как несобственный кратный интеграл, то есть как предел собственных интегралов, взятых по множествам соответствующих исчерпаний множества X. При исследовании кратных несобственных интегралов, как правило интересуются специальными исчерпаниями, подобными тем, которые мы рассматривали раньше. Из области интегрирования X удаляют ε - окрестность множества особых точек или окрестность бесконечности, находят интеграл по оставшейся части X_ε множества X и затем находят предел значений интегралов по области X_ε при $\varepsilon \to 0$. Если указанный предельный переход является равномерным относительно $y \in Y$, то говорят, что несобственный интеграл сходится равномерно на Y.

Важным и часто встречающимся является случай, когда множество особых точек одномерного или кратного интеграла зависит от параметра. Однако мы этот вопрос рассматривать не будем.

23.8. Вычисление некоторых несобственных интегралов

1. Для вычисления несобственного интеграла $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ введем в рассмотрение более общий интеграл, содержащий параметр

$$I(a) = \int\limits_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\,dx, \quad a \geq 0,$$

из которого рассматриваемый интеграл получается при $a = 0$. Интеграл $I(a)$ сходится равномерно относительно a при $a \geq 0$ по признаку Дирихле - Абеля. Здесь функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ интегрируема в промежутке $[0, \infty)$, а функция $g(x, a) = e^{-ax}$ монотонно убывает при $x \to \infty$ и ограничена единицей. Следовательно, по теореме 2 п.23.5 интеграл $I(a)$ представляет собой непрерывную функция параметра a. Найдем производную

$$I'(a) = -\int_0^\infty e^{-ax} \sin x \, dx = -\frac{1}{1+a^2}.$$

Последний интеграл сходится равномерно для $a \geq a_0 > 0$, ибо мажорируется интегралом $\int\limits_0^\infty e^{-a_0 x} \, dx$, который сходится. Поэтому дифференцирование интеграла $I(a)$ по параметру оправдано для указанных значений a. Но для $\forall\, a > 0$ всегда можно выбрать $a_0 > 0$, чтобы $a \geq a_0 > 0$. Значит полученный результат верен для $\forall\, a > 0$. Имеем $I(a) = C - \operatorname{arctg} \mathrm{a}$. Для определения константы C используем соотношение $I(a) \to 0$ при $a \to \infty$, которое очевидно из неравенства

$$|I(a)| \leq \int_0^\infty e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}.$$

Тогда $C = \pi/2$ и

$$I(0) = \lim_{a \to 0} I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Интеграл Эйлера первого рода (функция Бета)

Интеграл вида

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx \tag{1}$$

называется интегралом Эйлера первого рода или Бета-функцией. В этом интеграле p и q являются параметрами. При $p\,, q \geq 1$ интеграл будет собственным. При $p < 1$ или $q < 1$ интеграл будет несобственным, особыми точками будут $x = 0$, если $p < 1$ и $x = 1$, если $q < 1$. Докажем, что для положительных значений параметров $p\,, q > 0$ интеграл (1) сходится. Для этого разобьем его на два

$$B(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} \, dx. \tag{2}$$

Очевидно, каждый из интегралов имеет лишь одну особую точку. Для первого интеграла особой точкой будет $x = 0$. На отрезке $[0, 1/2]$ функция $(1-x)^{q-1}$ непрерывна, а потому ограничена: $(1-x)^{q-1} \leq M$. Функция Mx^{p-1} будет мажорантой для подынтегральной функции первого интеграла, поэтому он сходится при $0 < p < 1$ и $\forall\, q$.

Аналогично получим, что второй интеграл в (2) сходится при $0 < q < 1$ и $\forall\, p$.

Таким образом, функция $B(p,q)$ определена при любых $p\,, q > 0$. Докажем, что она непрерывна при $p\,, q > 0$. Для этого достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла (1) относительно параметров p и q при $p \geq p_0 > 0$ и $q \geq q_0 > 0$ для любых фиксированных p_0, $q_0 > 0$. Так как $p_0 - 1 \leq p - 1$, $q_0 - 1 \leq q - 1$, то при $0 < x < 1$ справедливо неравенство

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1} \leq x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}.$$

Отсюда и из сходимости интеграла $\int\limits_0^1 x^{p_0-1}(1-x)^{q_0-1}\,dx$ вытекает, в силу признака Вейерштрасса, равномерная сходимость интеграла (1). Тем самым непрерывность Бета-функции при $p\,, q > 0$ доказана.

Рассмотрим некоторые свойства функции $B(p,q)$.

1) С помощью замены переменной $1 - x = t$ в интеграле (1) можно легко доказать свойство симметрии функции Бета относительно параметров p и q: $B(p,q) = B(q,p)$.

2) Установим для функции $B(p,q)$ формулы приведения. Для этого к функции $B(p, q+1)$, где $p\,, q > 0$, применим формулу интегрирования по частям

$$B(p,q+1) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx = \left[\frac{x^p}{p}(1-x)^q\right]\Bigg|_0^1 + \frac{q}{p}\int\limits_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx =$$

$$= \frac{q}{p}\int\limits_0^1 [x^{p-1} - x^{p-1}(1-x)](1-x)^{q-1}\,dx = \frac{q}{p}B(p,q) - \frac{q}{p}B(p,q+1).$$

Из этих соотношений получим формулу

$$B(p,q+1) = \frac{q}{p+q}B(p,q). \tag{3}$$

Совершенно аналогично выводится при $p\,,q>0$ формула

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q). \tag{4}$$

Формулы (3), (4) называются формулами приведения для функции $B(p,q)$. Последовательное применение этих формул сводит вычисление функции $B(p,q)$ для любых $p\,,q>0$ к случаю $0<p\,,q\le 1$. Если $p=m$, $q=n$ – натуральные числа, то

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

3. Интеграл Эйлера второго рода (функция Гамма)

Интеграл вида

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx \tag{5}$$

называется интегралом Эйлера второго рода или Гамма-функцией. В этом интеграле два типа особенностей: если $p<1$, то точка $x=0$ является особой точкой подынтегральной функции, вторая особая точка $x=\infty$. Докажем,что интеграл (5) сходится при $p>0$. Чтобы разделить две особенности, разобьем интеграл на два

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^1 e^{-x}x^{p-1}\,dx+\int\limits_1^\infty e^{-x}x^{p-1}\,dx. \tag{6}$$

Так как $|\,e^{-x}x^{p-1}|\le x^{p-1}$ при $x>0$ то, согласно признаку сравнения, первый интеграл в (6) сходится при $p>0$. Второй интеграл также сходится при $p>0$, по признаку сравнения в предельной форме $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}x^{p-1}):\dfrac{1}{x^\alpha}=0$ при $\forall\,p\;-1+\alpha$. Таким образом, функция $\Gamma(p)$ определена при любых $p>0$.

Докажем, что функция $\Gamma(p)$ непрерывна при $p>0$. Для этого достаточно установить равномерную сходимость интеграла (5) относительно параметра p при $0<p_0\le p\le p_1$ для любых фиксированных p_0 и p_1. Так как для указанных значений $p\,,p_0$, p_1 и при $x>0$ справедливо равенство

$$e^{-x}x^{p-1}\le e^{-x}[x^{p_0-1}+x^{p_1-1}]$$

(здесь нужны оба слагаемых, так как x может быть меньше или больше единицы), то из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}[x^{p_0-1}+x^{p_1-1}]\,dx$$

следует, в силу признака Вейерштрасса, равномерная сходимость интеграла (5) для $p > 0$. Таким образом непрерывность функции $\Gamma(p)$ доказана.

Некоторые свойства функции $\Gamma(p)$.

1) Дифференцирование по параметру. У функции $\Gamma(p)$ существуют производные любого порядка. Продифференцируем функцию по параметру p под знаком интеграла, получим

$$\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\ln x\,dx. \tag{7}$$

Этот интеграл сходится равномерно по параметру p на любом промежутке $0 < p_0 \le p \le p_1$. В самом деле, при $x > 0$ имеет место неравенство

$$|x^{p-1}e^{-x}\ln x| < e^{-x}|\ln x|(x^{p_0-1} + x^{p_1-1}).$$

Из сходимости интеграла от функции в правой части неравенства следует, согласно признаку Вейерштрасса, равномерная сходимость интеграла (7). Ввиду непрерывности подынтегральной функции и равномерной сходимости интеграла (7) при $0 < x < \infty$, $0 < p < \infty$ функцию $\Gamma(p)$ можно дифференцировать по параметру. Рассуждая аналогично, убедимся, что функция $\Gamma(p)$ имеет производные любого порядка, которые можно найти путем дифференцирования выражения (5) под знаком интеграла.

2) Формула приведения для функции $\Gamma(p)$. Интегрируя по частям функцию $\Gamma(p+1)$ при $p > 0$ получим

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^\infty x^p e^{-x}\,dx = (-x^p e^{-x})\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\,\Gamma(p).$$

Итак,

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p). \tag{8}$$

Последовательно применяя эту формулу, можно свести функцию $\Gamma(p)$ к функции от аргумента $0 < p < 1$. Так как $\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$, то для $p = n$ из (8) получим

$$\Gamma(n+1) = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Связь между эйлеровыми интегралами первого и второго рода дается формулой

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

ГЛАВА 24. РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

В этой главе мы изучим важнейший класс функциональных рядов – тригонометрические ряды Фурье. Наряду со степенными рядами тригонометрические ряды находят широкое применение в математике и ее приложениях.

24.1. Ортогональные системы функций

В векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ можно выбрать некоторый базис из n векторов так, что любой вектор пространства раскладывается по этому базису единственным образом. Дальше нам потребуется понятие бесконечномерного линейного пространства и базиса бесконечной размерности.

Определение 1. Множество E называется линейным пространством, если в нем определены операции сложения двух элементов и умножения элемента на число: $\forall\, x, y \in E \Rightarrow x + y = z \in E$; $\forall\, x \in E \Rightarrow \lambda x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$.

Эти операции обладают рядом свойств, которые известны из алгебры.

Определение 2. Говорят, что линейное пространство является бесконечномерным, если в этом пространстве найдется любое число линейно независимых элементов.

Определение 3. Линейное пространство E называется евклидовым, если выполнены условия:

1) любым двум элементам f и g пространства E ставится в соответствие число, называемое скалярным произведением этих элементов и обозначаемое символом (f, g);

2) указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам

1^0. $(f, g) = (g, f)$ – симметрия,

2^0. $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$,

3^0. $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$ для $\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$,

4^0. $(f, f) > 0$, если $f \neq \emptyset$; $(f, f) = 0 \iff f = \emptyset$, где $\emptyset$ – нулевой элемент рассматриваемого пространства.

Примером бесконечномерного евклидова пространства является пространство всех кусочно-непрерывных функций, заданных на некотором отрезке $[a, b]$.

Под кусочно-непрерывной функцией f понимаем функцию $f(x)$, которая непрерывна на $[a, b]$, кроме конечного числа точек x_i, $i = \overline{1, n}$, в которых она имеет разрыв первого рода. Причем в точке разрыва значение функции f определяется формулой

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\left[f(x_i - 0) + f(x_i + 0)\right]. \tag{1}$$

В точках непрерывности функции $f(x)$ это условие очевидно выполняется. Скалярное произведение двух любых элементов $f(x)$ и $g(x)$ пространства всех кусочно-непрерывных функций на $[a, b]$ определяется следующим образом

$$(f, g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2}$$

Ввиду кусочной непрерывности функций f и g интеграл существует. Легко проверить выполнение аксиом $1^0 - 4^0$. Аксиомы $1^0 - 3^0$ очевидны ввиду линейности интеграла. Докажем аксиому 4^0. Поскольку всегда

$$(f, f) = \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \geq 0,$$

то достаточно доказать, что из равенства $(f, f) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$. Отрезок $[a, b]$ состоит из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, на которых функция f непрерывна. Равенство $(f, f) = 0$ выполнено на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Отсюда следует, что $f(x) \equiv 0$ на любом отрезке. Ввиду равенства (1) $f(x) = 0$ и в точке x_i. Таким образом, $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Мы доказали, что пространство кусочно-непрерывных функций на $[a, b]$ является евклидовым пространством со скалярным произведением (2).

Теорема 1. Для любых двух элементов евклидова пространства справедливо неравенство

$$(f, g)^2 \leq (f, f) \cdot (g, g), \tag{3}$$

называемое неравенством Коши - Буняковского.

► Для $\forall\,\lambda \in \mathbf{R}$ будет $(\lambda f - g, \lambda f - g) \geq 0$. В силу аксиом $1^0 - 4^0$ неравенство перепишем в виде

$$\lambda^2(f, f) - 2\lambda(f, g) + (g, g) \geq 0.$$

Необходимым и достаточным условием неотрицательности этого выражения является неположительность дискриминанта, то есть неравенство

$$(f,g)^2 - (f,f)\cdot(g,g) \le 0,$$

из которого следует неравенство (3). ◄

Введем понятие нормы евклидова пространства.

Определение 4. Линейное пространство E называется нормированным, если выполнены два условия:

1) известно правило, посредством которого каждому элементу f пространства E ставится в соответствие вещественное число, называемое нормой элемента и обозначаемое символом $\|f\|$;

2)указанное правило удовлетворяет следующим аксиомам:

1^0. $\|f\| > 0$, если $f \ne \emptyset$, $\|f\| = 0 \Longleftrightarrow f = \emptyset$,

2^0. $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$ для $\forall\, \lambda \in \mathbf{R}$,

3^0. Для любых f и g:

$$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|. \tag{4}$$

Соотношение (4) называется неравенством треугольника или неравенством Минковского.

Теорема 2. Евклидово пространство E является нормированным, если для любого его элемента норма определяется равенством

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}. \tag{5}$$

► Достаточно показать, что для нормы (5) выполнены аксиомы $1^0 - 3^0$ определения 4. Справедливость аксиомы 1^0 следует из аксиомы 4^0 для скалярного произведения. Аксиома 2^0 следует из аксиом 1^0, 3^0 для скалярного произведения. Остается доказать неравенство треугольника. Неравенство Коши - Буняковского (3) перепишем в виде

$$|\,(f,g)| \le \sqrt{(f,f)}\cdot\sqrt{(g,g)}.$$

С помощью этого неравенства и аксиом скалярного произведения получим

$$\|f+g\| = \sqrt{(f+g,f+g)} = \sqrt{(f,f) + 2(f,g) + (g,g)} \le$$

$$\leq \sqrt{(f,f) + 2\sqrt{(f,f)}\sqrt{(g,g)} + (g,g)} = \|f\| + \|g\|. \quad \blacktriangleleft$$

Замечание. В евклидовом пространстве скалярное произведение и норму можно ввести не единственным образом. Для нас сейчас достаточно, чтобы в рассматриваемом пространстве существовал хотя бы один способ введения скалярного произведения. При этом норму элемента будем определять с помощью равенства (5). В пространстве всех кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций норма определяется равенством

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2}.$$

Неравенство треугольника (4) имеет вид

$$\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\,dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x)\,dx \right)^{1/2}.$$

Определение 5. Два элемента евклидова пространства f и g называются ортогональными, если $(f,g) = 0$.

Определение 6. Последовательность элементов $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, ...$, бесконечномерного евклидова пространства называется ортонормированной системой, если эти элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице, то есть

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Классическим примером ортонормированной системы функций является тригонометрическая система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \; \cdots, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \; \cdots, \tag{6}$$

заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Легко проверить, что все функции попарно ортогональны (в смысле скалярного произведения (2)) и норма каждой из них равна единице.

Другим примером ортогональных функций на отрезке $[-1, 1]$ являются полиномы Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n[(x^2-1)^n]}{dx^n}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Функции

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\, P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

образуют ортонормированную систему на $[-1, 1]$.

24.2. Обобщенные ряды Фурье

Определение 1. Пусть в евклидовом пространстве E задана ортонормированная система элементов $\{\varphi_n\}$, $n = 1, 2, ...$ Обобщенным рядом Фурье элемента $f \in E$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$ называется ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n$, в котором числа $f_n = (f, \varphi_n)$, $n = 1, 2, ...$, называются коэффициентами Фурье.

Обобщенный ряд Фурье, построенный для элемента $f \in E$, связан с этим элементом лишь формально. Эту связь обычно обозначают так

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n, \quad \text{где} \quad f_n = (f, \varphi_n). \tag{1}$$

Сходимость ряда Фурье (1) к элементу f подлежит обоснованию для конкретного пространства E.

Наряду с n-ой частичной суммой ряда Фурье $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \varphi_k$, где $f_k = (f, \varphi_k)$, рассмотрим произвольную линейную комбинацию $s'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$, где c_k, $k = 1, 2, ...$, – некоторые числа. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. (экстремальное свойство коэффициентов Фурье). Среди всех сумм вида $s'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ наименьшее отклонение от элемента $f \in E$ по норме данного евклидова пространства имеет n-ая частичная сумма ряда Фурье элемента f.

► Учитывая ортонормированность системы $\{\varphi_k\}$ и пользуясь аксиомами скалярного произведения, преобразуем отклонение суммы s'_n от f

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f \right\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f, \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f \right) = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k (f, \varphi_k) + (f, f) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k f_k + \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2.$$

Итак, мы получили

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (c_k - f_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + \|f\|^2. \tag{2}$$

Из формулы (2) видно, что отклонение по норме пространства E будет наименьшим при $c_k = f_k$. При этом первая сумма в правой части (2) обращается в нуль, а другие слагаемые от c_k не зависят. ◄

Следствие 1. Для любого элемента $f \in E$ и любой ортонормированной системы $\{\varphi_k\} \subset E$ справедливо неравенство

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k - f \right\|^2, \tag{3}$$

где c_k – произвольные числа.

► Это неравенство следует из (2). ◄

Следствие 2. Для любого элемента $f \in E$ и любой ортонормированной системы $\{\varphi_k\} \subset E$ справедливо равенство, называемое тождеством Бесселя

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} f_k \varphi_k - f \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2. \tag{4}$$

► Для доказательства нужно в (2) положить $c_k = f_k$. ◄

Следствие 3. Для любого элемента $f \in E$ и любой ортонормированной системы $\{\varphi_k\} \subset E$ справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{5}$$

► Из неотрицательности левой части (4) следует, что для $\forall\, n \in N$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f_k^2 \leq \|f\|^2$. Это означает, что ряд из неотрицательных членов $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм и потому сходится. Переходя к пределу в неравенстве при $n \to \infty$ получим (5). ◄

В качестве примера обратимся к пространству всех кусочно-непрерывных функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$, и в этом пространстве к тригонометрической системе функций (6) п. 24.1. Ряд Фурье по этой системе функций принято называть тригонометрическим рядом Фурье. Для любой кусочно-непрерывной функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ указанный ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{6}$$

где коэффициенты Фурье a_0, a_k, b_k определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{7}$$

При такой форме записи ряда Фурье неравенство Бесселя принимает вид

$$\frac{1}{2}\,a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx. \tag{8}$$

Из этого неравенства следует, что коэффициенты Фурье a_k и b_k стремятся к нулю при $k \to \infty$ в силу необходимого условия сходимости ряда в левой части (8).

24.3. Замкнутые и полные ортонормированные системы

Определение 1. Ортонормированная система $\{\varphi_k\} \subset E$ называется замкнутой в бесконечномерном евклидовом пространстве E, если для любого элемента $f \in E$ и $\forall\,\varepsilon{>}0$ найдется такая линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ конечного числа элементов $\{\varphi_k\}$, отклонение которой от f по норме пространства E

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f\| < \varepsilon.$$

Другими словами, система $\{\varphi_k\}$ называется замкнутой, если $\forall\, f \in E$ можно приблизить по норме этого пространства с любой точностью линейными комбинациями конечного числа элементов $\{\varphi_k\}$.

Замечание 1. Мы здесь не рассматриваем вопрос о том, во всяком ли евклидовом пространстве существуют замкнутые ортонормированные системы. Позже мы вернемся к нему.

Теорема 1. Для того, чтобы ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ была замкнутой в евклидовом пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $f \in E$ выполнялось равенство Парсеваля, называемое уравнением замкнутости

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2 \tag{1}$$

(то есть неравенство Бесселя переходит в равенство).

► *Необходимость*. Пусть система $\{\varphi_k\}$ замкнута, тогда для $\forall\,\varepsilon{>}0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$, что

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f\Big\| < \varepsilon.$$

В силу неравенства (3) п. 24.2 получим

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \Big\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f\Big\|^2 < \varepsilon. \qquad (2)$$

При возрастании n левая часть неравенства (2) убывает, так как $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 \le \|f\|^2$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2$ сходится к сумме $\|f\|^2$.

Достаточность. Если выполняется равенство (1), то для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\, n_\varepsilon$, что для $\forall\, n > n_\varepsilon$ будет

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon.$$

Взяв в линейной комбинации $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k$ коэффициенты $c_k = f_k = (f,\varphi_k)$ из тождества Бесселя (4) § 2 получим

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k - f\Big\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 < \varepsilon.$$

Это и означает замкнутость системы $\{\varphi_k\}$ в пространстве E. ◄

Теорема 2. Чтобы ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ была замкнутой в евклидовом пространстве E, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $f \in E$ ряд Фурье этого элемента сходился к нему по норме пространства E, то есть

$$\Big\|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k - f\Big\| = 0. \qquad (3)$$

► Утверждение теоремы следует из равенства Бесселя (4) п. 24.2,

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} f_k\varphi_k - f\Big\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2$$

и теоремы 1. ◄

Определение 2. Ортонормированная система $\{\varphi_k\} \subset E$ называется полной в евклидовом пространстве E, если не существует никакого элемента $f \in E$, кроме нулевого, который был бы ортогональным ко всем элементам системы $\{\varphi_k\}$, $k = 1, 2, ...$

Теорема 3. Всякая замкнутая ортонормированная система $\{\varphi_k\} \subset E$ является полной в E.

► Пусть система $\{\varphi_k\}$ замкнута в E и $f \in E$ ортогонален ко всем элементам φ_k. Тогда все коэффициенты Фурье f_k элемента f по системе $\{\varphi_k\}$ равны нулю. В силу равенства Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$ и $\|f\| = 0$. Последнее равенство означает, в силу аксиомы 1^0 для нормы, что $f = \emptyset$. ◄

Замечание 2. Мы доказали, что в евклидовом пространстве из замкнутости ортонормированной системы следует ее полнота. Из полноты ортонормированной системы, вообще говоря, не вытекает ее замкнутость.

Теорема 4. Для всякой полной системы $\{\varphi_k\} \subset E$ два различных элемента $f, g \in E$ не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

► Если все коэффициенты Фурье элементов f и g совпадают, то все коэффициенты Фурье разности $f - g$ равны нулю, то есть разность $f - g$ ортогональна ко всем элементам φ_k системы $\{\varphi_k\}$, которая является полной. Это означает, что разность $f - g$ является нулевым элементом множества E, то есть f и g совпадают. ◄

На этом мы заканчиваем рассмотрение общих рядов Фурье по произвольной ортонормированной системе функций в любом евклидовом пространстве, и наша дальнейшая цель состоит в более детальном изучении тригонометрических рядов Фурье.

24.4. Теорема Вейерштрасса. Замкнутость тригонометрической системы

В этом параграфе мы установим замкнутость, следовательно, и полноту тригонометрической системы функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ . \ . \ ., \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \ . \ . \ . \tag{1}$$

в пространстве всех кусочно-непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Прежде чем перейти к доказательству замкнутости тригонометрической системы (1), мы установим важную теорему о равномерном приближении непрерывных функций тригонометрическими многочленами.

Тригонометрическим многочленом называется линейная комбинация конечного числа элементов системы (1), то есть выражение

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\,c_0 + \sum_{k=1}^{n}(c_k \cos kx + d_k \sin kx), \tag{2}$$

где c_0, c_k, d_k – постоянные числа.

В теории тригонометрических рядов Фурье важную роль играет понятие периодической функции. Функция $f(x)$ называется периодической функцией с периодом ω, если она определена для $\forall\, x \in \mathbf{R}$ и для $\forall\, x \in \mathbf{R}$ справедливо равенство $f(x+\omega) = f(x)$. Тригонометрическая система (1) является периодической с периодом 2π.

В теории степенных рядов было сказано, что не всякая непрерывная функция $f(x)$ может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по степеням x. Там же была доказана теорема Вейерштрасса о разложении непрерывной функции в равномерно сходящийся ряд из многочленов. Аналогичная ситуация имеет место и в теории тригонометрических рядов. Не всякая непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция может быть представлена равномерно сходящимся рядом из функций (1). Однако, здесь также имеет место следующая теорема.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Для того, чтобы функцию $f(x)$ можно было равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ приблизить тригонометрическими многочленами, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $f(-\pi) = f(\pi)$.

► *Необходимость.* Пусть последовательность тригонометрических многочленов $\{T_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Так как каждая функция $T_n(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то и функция $f(x)$ будет непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Для $\forall\,\varepsilon{>}0$ существует многочлен $T_n(x)$ такой, что $|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon/2$ для $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$. Тогда $|f(-\pi) - T_n(-\pi)| < \varepsilon/2$, $|f(\pi) - T_n(\pi)| < \varepsilon/2$. Из этих условий и периодичности функции $T_n(x)\,:\; T_n(-\pi) = T_n(\pi)$ заключаем, что $|f(-\pi) - f(\pi)| < \varepsilon/2$, отсюда в силу произвольности ε следует $f(-\pi) = f(\pi)$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Докажем, что для $\forall\,\varepsilon{>}0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ для $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$. Сначала докажем утверждение для четной функции $f(x)$, то есть когда $f(-x) = f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$. Используя первую теорему Вейерштрасса, построим алгебраический многочлен $P(t)$ такой, что $|f(\arccos t) - P(t)| < \varepsilon$ сразу для любого $t \in [-1, 1]$. Полагая здесь $t = \cos x$ получим, что $|f(x) - P(\cos x)| < \varepsilon$ для $\forall\, x \in [0, \pi]$. Так как обе функции $f(x)$ и $P(\cos x)$ являются четными, то неравенство справедливо и для любого $x \in [-\pi, \pi]$ (в силу периодичности и на $(-\infty, \infty)$). Поскольку функция $P(\cos x)$ является тригонометрическим многочленом, теорема для четной функции $f(x)$ доказана.

Обратимся к общему случаю – произвольной непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$. Для четных функций

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) + f(-x)], \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) - f(-x)]\sin x,$$

по доказанному, существуют такие тригонометрические многочлены $T_1(x)$ и $T_2(x)$, что

$$|f_1(x) - T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2(x) - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Отсюда следует

$$|f_1(x)\sin^2 x - T_1(x)\sin^2 x| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |f_2(x)\sin x - T_2(x)\sin x| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Сложим эти равенства

$$|f(x)\sin^2 x - T_3(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3}$$

где $T_3(x) = T_1 \sin^2 x + T_2 \sin x$ – тригонометрический многочлен.

В проведенных рассуждениях вместо функции $f(x)$ можно взять функцию $f(x + \pi/2)$, ибо эта функция удовлетворяет тем же условиям, что и полученная после продолжения функция $f(x)$. Для функции $f(x + \pi/2)$ найдется тригонометрический многочлен $T_4(x)$ такой, что

$$\left| f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x - T_4(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заменяя здесь x на $x - \pi/2$ и обозначая через $T_5(x) = T_4(x - \pi/2)$, мы получим, что на всей прямой справедливо неравенство

$$|f(x)\cos^2 x - T_5(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Складывая почленно неравенства (3) и (4) и обозначая через $T(x) = T_4(x) + T_5(x)$, мы получим, что на бесконечной прямой $|f(x) - T(x)| < \varepsilon$ для $\forall\, x$. ◄

Замечание 1. Теорема может быть сформулирована в терминах рядов: для того, чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в равномерно сходящийся ряд тригонометрических многочленов, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяла условию $f(-\pi) = f(\pi)$.

Опираясь на теорему Вейерштрасса, докажем теорему о замкнутости тригонометрической системы функций (1).

Теорема 2. Тригонометрическая система (1) является замкнутой (значит и полной) на отрезке $[-\pi, \pi]$, то есть для любой кусочно-непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ и $\forall\, \varepsilon{>}0$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$, что

$$\|f(x) - T(x)\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2\, dx \right)^{1/2} < \varepsilon. \tag{5}$$

► Для любой кусочно-непрерывной функции $f(x)$ и $\forall\, \varepsilon{>}0$ найдется непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция $F(x)$, удовлетворяющая условию $F(-\pi) = F(\pi)$ и такая, что

$$\|f(x) - F(x)\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F(x)]^2\, dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Достаточно взять функцию $F(x)$, совпадающую с функцией $f(x)$ всюду, кроме малых окрестностей точек разрыва и точки $x = \pi$; а в указанных окрестностях взять функцию $F(x)$ линейной так, чтобы она была непрерывной и удовлетворяла условию $F(-\pi) = F(\pi)$.

По теореме Вейерштрасса для функции $F(x)$ найдется тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$|F(x) - T(x)| \le \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}. \tag{7}$$

Из (7) получим

$$\|F(x) - T(x)\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} [F(x) - T(x)]^2\, dx \right)^{1/2} \le \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Из (6), (8) и неравенства треугольника для норм следует

$$\|f(x) - T(x)\| \le \|f(x) - F(x)\| + \|F(x) - T(x)\| < \varepsilon. \quad ◄$$

Следствия замкнутости тригонометрической системы

Следствие 1. Для любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ справедливо равенство Парсеваля (уравнение замкнутости)

$$\frac{1}{2}\, a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx. \tag{9}$$

► Это следует из замкнутости тригонометрической системы функций и теоремы 1 п. 24.3. ◄

Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx = 0.$$

Следствие 2. Тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции по норме пространства, а значит и в среднем.

► Следует из замкнутости тригонометрической системы и теоремы 2 п. 24.3. ◄

24.5. Интеграл Дирихле, принцип локализации

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$, функция является периодической с периодом 2π. Составим тригонометрический ряд Фурье этой функции

$$f(x) \sim \frac{1}{2}\, a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{1}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{2}$$

Замечание 1. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в любом конечном промежутке и имеет период 2π, то есть $f(x+2\pi) = f(x)$, то величина интеграла $\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\,dx$ не зависит от числа a.

► Ограничиваясь случаем непрерывной функции $f(x)$, имеем

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_a^{0} f(x)\,dx + \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx + \int\limits_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx.$$

Сделаем в последнем интеграле подстановку $x = t + 2\pi$

$$\int\limits_{2\pi}^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_0^{a} f(t+2\pi)\,dt = \int\limits_0^{a} f(t)\,dt.$$

Первый и последний интегралы отличаются только знаком. Тогда

$$\int\limits_a^{a+2\pi} f(x)\,dx = \int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx. \quad ◄$$

В частности, в формулах (2) для коэффициентов Фурье интегралы могут быть взяты по любому промежутку длины 2π. Например, можно написать

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{3}$$

Чтобы исследовать поведение ряда Фурье в какой-нибудь точке $x = x_0$, рассмотрим частичную сумму

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0). \tag{4}$$

Вместо коэффициентов Фурье a_k и b_k подставим их выражения (2)

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)[\cos kx\cos kx_0 + \sin kx\sin kx_0)]\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right]\,dx.$$

Преобразуем сумму в квадратных скобках

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}\left\{\sin\frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right]\right\} =$$

$$= \frac{\sin{(2n+1)\dfrac{t}{2}}}{2\sin\dfrac{t}{2}}.$$

С помощью этого соотношения частичная сумма приводится к виду

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin{(2n+1)\frac{x-x_0}{2}}}{2\sin\frac{x-x_0}{2}}\,dx. \tag{5}$$

Этот интеграл для частичной суммы ряда называется интегралом Дирихле, хотя у Фурье он встречается гораздо раньше. Так как функция $f(x)$ имеет период 2π, то промежуток интегрирования в (5) можно заменить промежутком $[x_0-\pi, x_0+\pi]$, после этого подстановкой $t = x - x_0$ выражение (5) преобразуем к виду

$$s_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin\Bigl(n+\dfrac{1}{2}\Bigr)t}{2\sin\dfrac{1}{2}\,t}\,dt.$$

Выражение

$$D_n(t) = \frac{\sin\Bigl(n+\dfrac{1}{2}\Bigr)t}{2\sin\dfrac{1}{2}\,t}$$

называется ядром Дирихле. Разобьем интеграл на два

$$\int\limits_{-\pi}^{0} f(x_0+t)\frac{\sin\Bigl(n+\dfrac{1}{2}\Bigr)t}{2\sin\dfrac{1}{2}\,t}\,dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+t)\frac{\sin\Bigl(n+\dfrac{1}{2}\Bigr)t}{2\sin\dfrac{1}{2}\,t}\,dt$$

и приведем первый интеграл к промежутку $[0,\pi]$ путем изменения знака переменной t. В результате придем к такому выражению

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,dt. \tag{6}$$

Таким образом, исследование поведения ряда Фурье сводится к исследованию суммы (6), содержащей параметр n. Однако в этом случае не может быть использован предельный переход по параметру под знаком интеграла. В данном случае подынтегральная функция вообще не имеет предела.

Если взять $f(x) \equiv 1$, тогда $s_n(x) \equiv 1$ и в формуле (6) получим

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1.$$

Лемма Римана. Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\sin kt\,dt = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\int\limits_a^b f(t)\cos kt\,dt = 0.$$

► Рассмотрим первый интеграл, предполагая функцию $f(t)$ непрерывной на $[a, b]$. Заметим предварительно, что для любого промежутка $[\alpha, \beta]$ имеем следующую оценку

$$\left|\int\limits_\alpha^\beta \sin kt\,dt\right| = \left|\frac{\cos k\beta - \cos k\alpha}{k}\right| \leq \frac{2}{k}.$$

Разобьем промежуток $[a, b]$ на n частей точками t_i и в соответствии с этим разложим и интеграл

$$\int\limits_a^b f(t)\sin kt\,dt = \sum_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(t)\sin kt\,dt.$$

Обозначим через m_i наименьшее значение функции $f(t)$ на промежутке $[t_{i-1}, t_i]$, тогда интеграл можно записать так

$$\int\limits_a^b f(t)\sin kt\,dt = \sum_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} [f(t) - m_i]\sin kt\,dt + \sum_{i=1}^n m_i \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sin kt\,dt.$$

Если ω_i – колебание функции $f(t)$ на i-м промежутке, то в его пределах $f(t) - m_i \leq \omega_i$. Для интеграла получим оценку

$$\int\limits_a^b f(t)\sin kt\,dt \leq \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta t_i + \frac{2}{k}\sum_{i=1}^n |\,m_i|.$$

Для любого $\forall\,\varepsilon{>}0$ выберем разбиение промежутка $[a, b]$ так, чтобы было $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Это можно сделать ввиду непрерывности функции $f(t)$, тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta t_i < \frac{\varepsilon}{2}$. Теперь, когда все числа m_i уже определены, возьмем $k > \dfrac{4}{\varepsilon}\displaystyle\sum_{i=1}^n |m_i|$ и для этих k получим

$$\left|\int\limits_a^b f(t)\sin kt\,dt\right| < \varepsilon. \quad ◄$$

Следствие 1. Из леммы получим, что коэффициенты Фурье a_k, b_k кусочно-непрерывной функции при $k \to \infty$ стремятся к нулю. Раньше это свойство коэффициентов Фурье было установлено с помощью неравенства Бесселя.

Вторым следствием леммы является так называемый "принцип локализации".

Терема Римана (принцип локализации). Поведение ряда Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$ в некоторой точке $x_0 \in [-\pi, \pi]$ зависит исключительно от значений, принимаемых этой функцией в сколь угодно малой окрестности точки x_0.

► Взяв произвольное положительное число $\delta < \pi$ разобьем интеграл (6) для $s_n(x_0)$ на два

$$\int\limits_0^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,dt = \int\limits_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_\delta^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,dt.$$

Второй из них перепишем в виде

$$\int\limits_\delta^\pi \frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\dfrac{1}{2}t}\sin t\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\,dt$$

Множитель

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\dfrac{1}{2}t}$$

является кусочно-непрерывной функцией от t в промежутке $[\delta, \pi]$, ибо таковой является функция $f(t)$, знаменатель является непрерывной функцией, не обращающейся в нуль. По лемме Римана этот интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Так что существование предела частичных сумм $s_n(x_0)$ и его величина целиком определяются поведением одного интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\delta [f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,dt. \tag{7}$$

В этот интеграл входят лишь значения функции $f(x)$ на промежутке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Этим и доказывается "принцип локализации". ◄

Следствие 2. Таким образом, если взять две функции $f(x)$ и $g(x)$, значения которых в произвольно малой окрестности точки x_0 совпадают, то независимо от значений этих функций вне окрестности точки x_0, ряды Фурье функций ведут себя в точке x_0 одинаково: либо сходятся к одной сумме, либо расходятся. При этом коэффициенты Фурье функций f и g, зависящие от всех их значений, могут оказаться совершенно различны.

24.6. Условия сходимости ряда Фурье

Мы уже установили, что тригонометрический ряд Фурье любой кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится к этой функции на этом отрезке в среднем (следствие 2 § 4).

Из замкнутости тригонометрической системы функций можно вывести еще ряд следствий.

Следствие 1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$, то последовательность сходится к функции $f(x)$ и в среднем на $[a, b]$.

► Возьмем $\forall\, \varepsilon{>}0$. В силу $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ $\exists\, n_\varepsilon$ такой, что

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad \forall\, x \in [a, b] \quad \text{и} \quad \forall\, n > n_\varepsilon.$$

Из этого неравенства получим

$$\int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2\, dx < \varepsilon^2 (b - a),$$

то есть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ на $[a, b]$ в среднем. ◄

Однако, сходимость последовательности на отрезке в среднем не влечет за собой не только равномерной сходимости, но и сходимости хотя бы в одной точке отрезка.

Теорема 1. Если тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ сходится равномерно на некотором отрезке $[\alpha, \beta] \subset [-\pi, \pi]$, то он сходится на этом отрезке именно к функции $f(x)$.

► Пусть $g(x)$ – та функция, к которой сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$ тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$. Докажем, что $g(x) \equiv f(x)$ всюду на $[\alpha, \beta]$. Так как из равномерной сходимости на отрезке вытекает сходимость в среднем, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к функции $g(x)$ в среднем на $[\alpha, \beta]$. Это означает, что для $\forall\, \varepsilon{>}0$ существует номер

n_1, начиная с которого n-ая частичная сумма ряда Фурье $s_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|g(x) - s_n(x)\| = \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} [g(x) - s_n(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, последовательность $\{s_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в среднем на отрезке $[-\pi, \pi]$, значит и на $[\alpha, \beta]$. То есть, начиная с некоторого номера n_2,

$$\|s_n(x) - f(x)\| = \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} [s_n(x) - f(x)]^2 \, dx \right)^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из двух неравенств и неравенства треугольника получим

$$\|g(x) - f(x)\| \leq \|g(x) - s_n(x)\| + \|s_n(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\|g(x) - f(x)\| = 0$, то есть $g(x) - f(x) = 0$ на $[\alpha, \beta]$, и теорема доказана. ◄

Замечание 1. В теореме 1 промежуток $[\alpha, \beta]$ может совпадать с отрезком $[-\pi, \pi]$, то есть из равномерной сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ следует, что этот ряд на указанном отрезке сходится именно к функции $f(x)$.

В разных разделах математики важную роль играет вопрос об условиях на функцию $f(x)$, при которых тригонометрический ряд Фурье сходится к этой функции в данной точке $x \in [-\pi, \pi]$. Еще в XIX веке было известно, что существуют непрерывные на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции, удовлетворяющие условию $f(-\pi) = f(\pi)$, тригонометрические ряды которых расходятся в наперед заданной точке, даже на бесконечном множестве точек отрезка.

Таким образом, одной непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, без дополнительных условий, недостаточно не только для равномерной сходимости ряда Фурье этой функции, но и сходимости ряда в заданной точке. Известна теорема Карлесона, из которой следует, что ряд Фурье не только любой кусочно-непрерывной функции, но и любой интегрируемой в собственном смысле Римана функции $f(x)$ сходится к этой функции почти всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Ниже мы выясним, какие требования следует добавить к непрерывности функции $f(x)$ или ввести вместо непрерывности, для обеспечения сходимости тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ в заданной точке, а также для обеспечения равномерной сходимости этого ряда на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ или его части.

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ кусочно-непрерывную производную, если производная $f'(x)$ существует и непрерывна на отрезке $[a, b]$, за исключением конечного числа точек, в которых функция $f'(x)$ терпит разрыв первого рода.

Функция $f'(x)$ может быть не определена в конечном числе точек отрезка $[a, b]$. В этих точка мы доопределим ее произвольным образом.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$ и имеет на этом отрезке кусочно-непрерывную производную $f'(x)$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$.

► Докажем, что ряд, составленный из модулей членов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$

$$\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k \cos kx| + |b_k \sin kx|) \tag{1}$$

сходится равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, отсюда вытекает как равномерная сходимость на $[-\pi, \pi]$ самого тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, так и его сходимость именно к функции $f(x)$.

В силу признака Вейерштрасса для доказательства равномерной сходимости ряда (1) достаточно доказать сходимость мажорирующего ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|). \tag{2}$$

Обозначим через α_k и β_k коэффициенты тригонометрического ряда Фурье функции $f'(x)$, доопределив эту функцию произвольным образом в конечном числе точек, где производная не существует. Интегрируя по частям выражения для коэффициентов Фурье производной $f'(x)$ и учитывая, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, получим соотношение

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{k}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin kx\,dx = -\frac{k}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = -ka_k.$$

Таким образом $|\,a_k| + |b_k| = \dfrac{1}{k}\big(|\,\alpha_k| + |\beta_k|\big)$ и для доказательства сходимости ряда (2) достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\big(|\,\alpha_k| + |\beta_k|\big). \qquad (3)$$

Сходимость этого ряда вытекает из неравенств

$$\frac{1}{k}|\,\alpha_k| \le \frac{1}{2}\left(\alpha_k^2 + \frac{1}{k^2}\right), \quad \frac{1}{k}|\,\beta_k| \le \frac{1}{2}\left(\beta_k^2 + \frac{1}{k^2}\right)$$

и сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}$, первый из них сходится в силу равенства Парсеваля для функции $f'(x)$, а сходимость второго известна. Теорема доказана. ◄

Замечание 2. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы, продолжить с периодом 2π на всю вещественную ось, то теорема будет утверждать сходимость ряда Фурье к продолжению функции $f(x)$ на вещественную ось.

Выше предполагалось, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$, если это условие заменить более общим, а именно, кусочной непрерывностью, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x = x_0 \in [-\pi, \pi]$ и имеет сумму

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\,[f(x_0+0) + f(x_0-0)].$$

В случае непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, эта сумма, очевидно, равна $f(x_0)$.

► Для каждой функции $f(x)$, удовлетворяющей сформулированным условиям, имеет место формула

$$s_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]D_n(t)\,dt, \tag{4}$$

где $D_n(t)$ – ядро Дирихле. Если $f(x)\equiv 1$, то $s_n(x)\equiv 1$ и

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} D_n(t)\,dt = 1. \tag{5}$$

Умножим равенство (5) на постоянное число $S(x_0)$ и вычтем результат из (4)

$$s_n(x_0)-S(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-f(x_0+0)-f(x_0-0)]D_n(t)\,dt. \tag{6}$$

Нужно доказать, что при $n\to\infty$ интеграл справа стремится к нулю. Представим его в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt,$$

где положено

$$g(t) = \left[\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t}\right]\frac{\frac{1}{2}\,t}{\sin\frac{1}{2}\,t}. \tag{7}$$

Если мы установим, что эта функция кусочно-непрерывна, то из леммы Римана получим, что предел интеграла (6) при $n\to\infty$ равен нулю.

В промежутке $(0,\pi]$ функция $g(t)$ кусочно-непрерывна, ибо такова функция $f(x)$. Остается открытым лишь вопрос о поведении функции $g(t)$ при $t\to+0$. Мы докажем существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+0} g(t)=k$, положив тогда $g(0)=k$, мы получим непрерывность функции $g(t)$ в точке $t=0$, и мы можем применить лемму Римана. Второй множитель в функции $g(t)$ имеет пределом единицу при $t\to 0$. Рассмотрим выражение в квадратных скобках. Если точка x_0 лежит внутри промежутка, где функция $f(x)$ дифференцируема, тогда $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$ и каждое из отношений

$$\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} \quad \text{и} \quad \frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t} \tag{8}$$

стремится к пределу $f'(x_0)$ при $t \to 0$, а выражение в квадратных скобках – к нулю. Если же точка x_0 есть точка разрыва производной, то при этом она может оказаться как точкой непрерывности, так и точкой разрыва функции $f(x)$. В первом случае отношения (8) будут стремиться к разным пределам – производной справа и производной слева. Во втором случае – случае разрыва функции $f(x)$, мы придем к аналогичному результату, но здесь значение функции $f(x_0)$ заменяется значениями $f(x_0 \pm 0)$ тех функций, из которых получена данная функция. Пределами отношений (8) будут односторонние производные упомянутых функций в точке x_0. Итак, наше заключение о кусочной непрерывности функции $S(t)$ справедливо во всех случаях. Тогда по лемме Римана интеграл в формуле (6) стремится к нулю при $n \to \infty$. Теорема доказана. ◄

24.7. Теорема Фейера

Мы уже отмечали, что тригонометрический ряд Фурье непрерывной периодической функции может быть расходящимся. В то же время такая функция может быть представлена равномерно сходящимся рядом из тригонометрических полиномов. Еще один способ разложения непрерывной функции в сходящийся ряд дает следующая теорема.

Теорема Фейера. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, то среднее арифметическое частичных сумм ее тригонометрического ряда Фурье

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n}[s_0(x, f) + s_1(x, f) + ... + s_{n-1}(x, f)] \tag{1}$$

сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ (если функция $f(x)$ с периодом 2π продолжима на всю бесконечную прямую, равномерно на этой прямой).

► Из равенства для частичных сумм, полученного раньше,

$$s_n(x, f) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{1}{2}\, t}\, dt \tag{2}$$

следует

$$\sigma_n(x, f) = \frac{1}{n\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t)}{2 \sin \frac{1}{2}\, t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t \right] dt. \tag{3}$$

Для вычисления суммы воспользуемся тождеством

$$2\sin\frac{1}{2}\,t\left[\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]=1-\cos nt=2\sin^2\frac{1}{2}\,nt.$$

В результате, выражение (3) приводится к виду

$$\sigma_n(x,f)=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin^2\dfrac{1}{2}\,nt}{2\sin^2\dfrac{1}{2}\,t}\,dt. \tag{4}$$

Если здесь положить $f(x)\equiv 1$, то $\sigma_n(x,f)\equiv 1$ и равенство принимает вид

$$1=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\dfrac{1}{2}\,nt}{2\sin^2\dfrac{1}{2}\,t}\,dt. \tag{5}$$

Фиксируем $\forall\,\varepsilon{>}0$. Согласно теореме Вейерштрасса найдется тригонометрический многочлен такой, что

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{для}\quad\forall\,x\in\mathbf{R}. \tag{6}$$

Учитывая (5) и оценку (6), получим

$$\begin{gathered}\big|\sigma_n(x,f)-\sigma_n(x,T)\big|=\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big|f(x+t)-T(x+t)\big|\frac{\sin^2\dfrac{1}{2}\,nt}{2\sin^2\dfrac{1}{2}\,t}\,dt\le\\ \le\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{n\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin^2\dfrac{1}{2}\,nt}{2\sin^2\dfrac{1}{2}\,t}\,dt=\frac{\varepsilon}{3}.\end{gathered} \tag{7}$$

Неравенство (7) справедливо для любого номера n. Заметим, что тригонометрический ряд Фурье многочлена $T(x)$ совпадает с этим многочленом. Отсюда следует, что все частичные суммы $s_n(x,t)$, начиная с некоторого номера n, равны $T(x)$. Это позволяет нам для фиксированного выше $\varepsilon{>}0$ найти номер N такой, что

$$|\,\sigma_n(x,T)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{для}\quad\forall\,n>N\quad\text{и}\quad\forall\,x. \tag{8}$$

Из неравенств (6), (7), (8) заключаем, что

$$|\,\sigma_n(x,f)-f(x)|\le|\,\sigma_n(x,f)-\sigma_n(x,T)|+|\,\sigma_n(x,T)-T(x)|+|\,T(x)-f(x)|<\varepsilon$$

при $\forall\,n>N$ и $\forall\,x\in\mathbf{R}$. Теорема доказана. ◄

24.8. Почленное интегрирование тригонометрического ряда Фурье.

Обобщенное уравнение замкнутости

Пусть даны две функции $f(x)$ и $g(x)$, кусочно-непрерывные в промежутке $[-\pi, \pi]$. Такими же будут и функции $f \pm g$. Обозначим через a_k, b_k и α_k, β_k коэффициенты Фурье функций f и g. Коэффициенты Фурье функций $f \pm g$, очевидно, будут $a_k \pm \alpha_k$, $b_k \pm \beta_k$. Применим уравнение замкнутости к функциям $f + g$ и $f - g$ порознь

$$\frac{1}{2}(a_0 + \alpha_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k + \alpha_k)^2 + (b_k + \beta_k)^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f + g)^2\,dx,$$

$$\frac{1}{2}(a_0 - \alpha_0)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2\right] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f - g)^2\,dx.$$

Вычтем почленно эти равенства одни из другого, принимая во внимание тождество $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$. В результате придем к обобщенному уравнению замкнутости

$$\frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\alpha_k + b_k\beta_k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx. \tag{1}$$

Уравнение замкнутости (9) § 4 получается из (1) при $f = g$.

Почленное интегрирование ряда Фурье

Пусть $f(x)$ – кусочно-непрерывная функция на отрезке $[-\pi, \pi]$, запишем ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{2}$$

Теорема 1. Тригонометрический ряд Фурье кусочно-непрерывной на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ можно почленно интегрировать по любому промежутку, входящему в $[-\pi, \pi]$, при этом сумма полученного ряда равна интегралу от функции $f(x)$ по этому промежутку.

► Рассмотрим другую функцию $g(x)$, тоже кусочно-непрерывную на $[-\pi, \pi]$ и определяемую формулой

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \le x \le x_0, \\ 0, & \text{в прочих точках.} \end{cases}$$

Коэффициенты Фурье функции $g(x)$ равны

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \cos kx\,dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{x_0} \sin kx\,dx, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Применим к функциям $f(x)$ и $g(x)$ обобщенное уравнение замкнутости (1)

$$\int\limits_0^{x_0} \frac{1}{2}\,a_0\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_0^{x_0}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)\,dx = \int\limits_0^{x_0} f(x)\,dx. \tag{3}$$

Теорема доказана. ◄

Почленное интегрирование ряда Фурье оказывается всегда допустимым. Мы установили этот результат даже не делая предположения о сходимости ряда (2) к функции $f(x)$.

Подставим в формулу (1) вместо коэффициентов Фурье α_k и β_k функции $g(x)$ их общие выражения

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos kx\,dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx,$$

тогда формула приводится к виду

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\,a_0 g(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)g(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Это равенство означает, что ряд Фурье (2) функции $f(x)$ можно почленно интегрировать даже после умножения его членов на кусочно-непрерывную функцию $g(x)$, в качестве суммы получится интеграл от произведения функций f и g.

24.9. Почленное дифференцирование ряда Фурье

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ и ее производные до порядка m (m – целое число) непрерывны на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяют условиям

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi), \quad ..., \quad f^m(-\pi) = f^m(\pi). \tag{1}$$

Пусть, кроме того, функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-\pi, \pi]$ кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$. Тогда сходится следующий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m\big(|\,a_k| + |\,b_k|\big), \tag{2}$$

где a_k, b_k – коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

► Доопределим функцию $f^{(m+1)}(x)$ произвольным образом в конечном числе точек, где она терпит разрыв. Обозначим α_k, β_k коэффициенты Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$. Интегрируя выражения для α_k и β_k $m+1$ раз по частям и учитывая непрерывность на отрезке $[-\pi, \pi]$ самой функции $f(x)$ и ее производных до порядка m, а также условия (1), получим следующую зависимость между коэффициентами Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$ и функции $f(x)$:

$$|\,\alpha_k| + |\beta_k| = k^{m+1}\big(|\,a_k| + |\,b_k|\big).$$

Таким образом

$$k^m\big(|\,a_k| + |\,b_k|\big) = \frac{1}{k}\,\big(|\,\alpha_k| + |\beta_k|\big),$$

и сходимость ряда (2) следует из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\,\big(|\,\alpha_k| + |\beta_k|\big)$, которая была установлена раньше. ◄

Следствие. На основании леммы 1 можно оценить порядок малости коэффициентов Фурье функции $f(x)$ при $k \to \infty$. В условиях леммы эти коэффициенты $|\,a_k| + |\,b_k| = \dfrac{1}{k^m}\dfrac{1}{k}\,\big(|\,\alpha_k| + |\beta_k|\big)$ и потому $|\,a_k| + |\,b_k| = o\bigg(\dfrac{1}{k^m}\bigg)$, $k \to \infty$.

Другим следствием леммы является теорема.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 1, причем $m \geq 1$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно m раз почленно дифференцировать на отрезке $[-\pi, \pi]$.

► Пусть s – одно из чисел $1, 2, ..., m$. В результате s-кратного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ получается ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s\Big[a_k \cos\Big(kx - \frac{\pi s}{2}\Big) + b_k \sin\Big(kx - \frac{\pi s}{2}\Big)\Big]. \tag{3}$$

Для любого $\forall\, x \in [-\pi, \pi]$ как исходный ряд Фурье, так и ряд (3) мажорируется числовым рядом (2), который сходится. По признаку Вейерштрасса исходный ряд Фурье и ряд (3) сходятся равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$, а это обеспечивает возможность s-кратного почленного дифференцирования исходного ряда Фурье. ◄

24.10. Разложение функций в ряд Фурье

При рассмотрении вопросов, связанных с разложением функции в тригонометрический ряд Фурье предположим, что функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. В прикладных задачах эти условия на функцию $f(x)$ часто не выполняются. Дальше мы рассмотрим такие случаи и дадим рекомендации.

1. Случай произвольного промежутка.

Предположим, что функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$ произвольной длины $2l$. Будем предполагать функцию кусочно-дифференцируемой на этом промежутке и $f(-l) = f(l)$. Если сделать замену переменной $t = \pi x/l$, то получим функцию $f(t)$, заданную на промежутке $[-\pi, \pi]$, к которой уже применимы рассмотренные результаты. В частности, функцию $f(t)$ можно разложить в ряд Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Вернемся в этих формулах к прежней переменной

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\Big), \tag{1}$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

Все установленные теоремы будут применимы к этому случаю, лишь отрезок $[-\pi, \pi]$ нужно заменить на $[-l, l]$, а период 2π на $2l$.

2. Разложение в ряд Фурье четной и нечетной функций.

Функция называется четной, если $f(x) = f(-x)$ и нечетной, если $f(x) = -f(-x)$. Из формул для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье вытекает, что для четной функции $f(x)$ все коэффициенты $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, а для нечетной все коэффициенты $a_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Таким образом, четная функция раскладывается в тригонометрический ряд только по косинусам

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{3}$$

а нечетная только по синусам

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (4)$$

При этом коэффициенты Фурье можно вычислять по формулам

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \qquad (5)$$

Отметим, что каждая функция $f(x)$, заданная в промежутке $[-l,l]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

Предположим, что функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0,l]$. Желая разложить эту функцию в ряд Фурье мы дополним область определения функции для $x\in[-l,0]$ по произволу, но с сохранением кусочной-непрерывности и дифференцируемости. Произвол в определении функции дает возможность получить различные тригонометрические ряды.

Можно функцию $f(x)$ определить в промежутке $[-l,0]$ так, чтобы получить ряд Фурье только по косинусам или только по синусам. Для этого мы доопределяем функцию $f(x)$ на промежутке $[-l,0]$, полагая $f(x)=f(-x)$ или $f(-x)=-f(x)$. В первом случае мы получаем четную функцию, а во втором нечетную функцию, заданную на отрезке $[-l,l]$. Коэффициенты Фурье разложений можно вычислять по формулам (5), куда входят лишь значения функций $f(x)$ на отрезке $[0,l]$.

Особого исследования требуют точки $x=0$ и $x=l$. Здесь оба разложения ведут себя по-разному. Если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[0,l]$, непрерывна в точке $x=0$ и $x=l$, то при разложении в ряд по косинусам она сохраняет непрерывность в этих точках. Условие $f(-x)=f(x)$ сохраняет непрерывность в точке $x=0$, так что тригонометрический ряд (3) в точке $x=0$ будет сходиться именно к $f(0)$. В точке $x=l$ будет иметь место аналогичное обстоятельство, так как $f(-l+0)=f(l-0)=f(l)$.

Иначе обстоит дело с разложением по синусам. В точке $x=0$ и $x=l$ сумма будет нулем. Поэтому она может дать значения $f(0)$ и $f(l)$ лишь в том случае, если они также равны нулю.

3. Разложение непериодической функции.

Вся построенная теория тригонометрических рядов Фурье исходила из того, что заданная функция является периодической (периода 2π или $2l$). Между тем чаще приходится иметь дело с непериодическими функциями. Чтобы иметь право применять к непериодическим функциям изложенную теорию, введем вспомогательную функцию $\overline{f}(x)$ следующим образом: $\overline{f}(x) = f(x)$ в промежутке $(-l, l]$, затем полагаем $\overline{f}(-l) = \overline{f}(l) = f(l)$, а на остальные вещественные значения $x \in \mathbf{R}$ распространим функцию $\overline{f}(x)$по закону периодичности. К построенной таким образом функции $\overline{f}(x)$ уже можно применять теорему о разложении в ряд Фурье и другие результаты. Если точка $x \in (-l, l]$, то нам достаточно заданной функции $f(x)$, и коэффициенты разложения можно определять по формулам (2), не переходя к функции $\overline{f}(x)$. Особого внимания требуют концы промежутка $x = \pm l$.

При применении к функции $\overline{f}(x)$ теоремы 3 § 6, например, в точке $x = l$, нам приходится рассматривать ее значения слева от точки $x = l$, где они совпадают со значениями функции $f(x)$, и со значениями справа от точки $x = l$, где они совпадают уже со значениями функции $f(x)$ справа от точки $x = -l$.

Поэтому для точки $x = \pm l$ в качестве суммы ряда $S(x)$ следовало бы взять $S(\pm l) = \frac{1}{2}\left[\overline{f}(l+0) + \overline{f}(l-0)\right] = \frac{1}{2}\left[\overline{f}(-l+0) + \overline{f}(l-0)\right] = \frac{1}{2}\left[f(-l+0) + f(l-0)\right]$
Таким образом, если функция $f(x)$ даже непрерывна при $x = \pm l$, но не имеет периода $2l$, так что $f(-l) \neq f(l)$, то при соблюдении требования кусочной дифференцируемости суммой ряда в этих точках будет

$$S(\pm l) = \frac{1}{2}\left[f(-l) + f(l)\right],$$

а не $f(-l)$ и $f(l)$. Для такой функции разложение может иметь место лишь в открытом промежутке $(-l, l)$.

Следующее замечание имеет важное значение. Если тригонометрический ряд сходится к функции $f(x)$, то, ввиду периодичности его членов, он сходится всюду (при всех x) и сумма его оказывается тоже периодической функцией от x с периодом 2π или $2l$. Но эта сумма вне промежутка $[-l, l]$ вообще уже не совпадает с функцией $f(x)$, если она была задана на всей числовой оси. Отметим, что вместо промежутка $[-l, l]$ можно взять любой промежуток $[a, a+2l]$ длины $2l$.

4. Комплексная форма ряда Фурье.

Иногда употребляется комплексная форма записи тригонометрического ряда Фурье. Используя соотношение

$$e^{i\frac{\pi kx}{l}} = \cos\frac{\pi kx}{l} + i\sin\frac{\pi kx}{l}, \quad e^{-i\frac{\pi kx}{l}} = \cos\frac{\pi kx}{l} - i\sin\frac{\pi kx}{l}.$$

Тригонометрический ряд запишем в виде

$$\frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\,(a_k - ib_k)e^{i\frac{\pi kx}{l}} + \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k)e^{-i\frac{\pi kx}{l}}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-i\frac{\pi kx}{l}}$$

где обозначено

$$C_0 = \frac{1}{2}\,a_0, \quad C_{-k} = \frac{1}{2}\,(a_k - ib_k), \quad C_k = \frac{1}{2}\,(a_k + ib_k), \quad k = 1, 2, ...$$

Комплексные коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$C_k = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{\pi kx}{l}}\,dx, \quad k = 0, \pm1, \pm2, ...$$

Примеры.

1. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{2}\,(\pi - x)$ в промежутке $(0, 2\pi)$ в ряд Фурье.

Используя формулы для коэффициентов Фурье, найдем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,(\pi - x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\pi x - \frac{1}{2}\,x^2\Big)\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,(\pi - x)\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\pi - x\Big)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,(\pi - x)\sin nx\,dx = -\frac{1}{2\pi}\Big(\pi - x\Big)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\Big(\pi - 2\pi\Big)\frac{1}{n} + \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{n} = \frac{1}{n}.$$

Таким образом, мы получили следующее разложение

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad 0 < x < 2\pi. \tag{1}$$

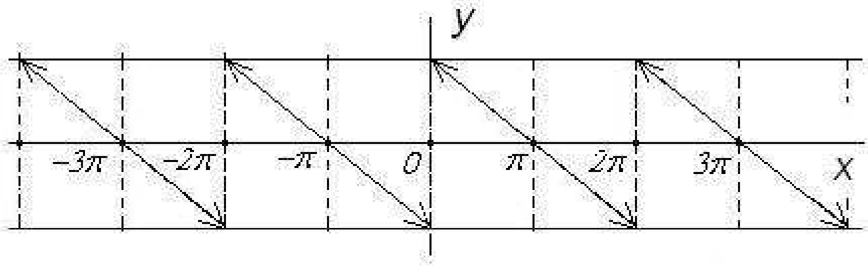

Рис. 2 График суммы тригонометрического ряда

При $x = 0$ и $x = 2\pi$ сумма равна нулю и равенство нарушается. Равенство (1) не имеет места вне промежутка $(0, 2\pi)$. График суммы ряда $S(x)$ состоит из множества параллельных отрезков и отдельных точек на оси $0x$ (Рис. 2).

Из равенства (1) можно получить другие разложения. Заменим x на $2x$ и поделим обе части на 2

$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}, \quad 0 < x < \pi. \tag{2}$$

Вычтем (2) из (1)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}, \quad 0 < x < \pi. \tag{3}$$

При $x = 0$ и $x = \pi$ сумма ряда (3) равна нулю, при $-\pi < x < 0$ сумма равна $-\dfrac{\pi}{4}$. Для других значений $x \in \mathbf{R}$ сумма будет периодической функцией с периодом 2π. На рис. 3 показан график суммы. Если положить в (3) $x = \dfrac{\pi}{2}$, то получим

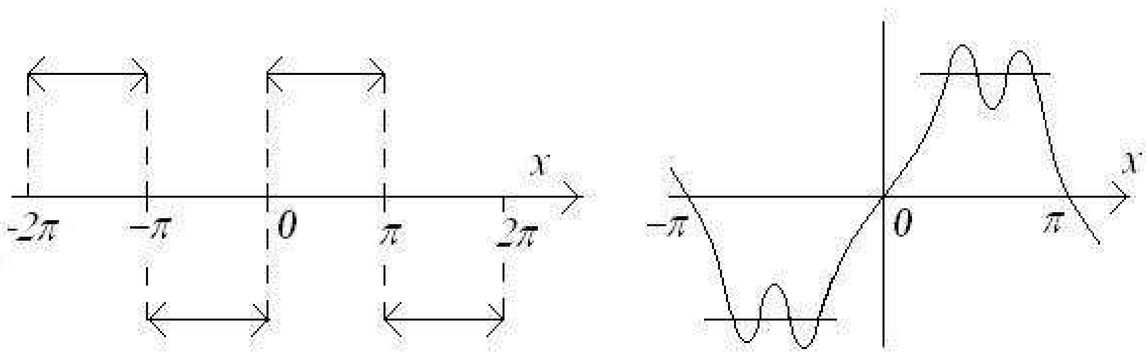

Рис. 3 Графики суммы тригонометрического ряда

ряд Лейбница $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + ...$

Из равенств (2) и (3) получим

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi. \tag{4}$$

Непосредственно мы получаем его для $0 < x < \pi$, но, очевидно, равенство имеет место при $x = 0$ и $-\pi < x < 0$. График суммы ряда показан на рис. 4

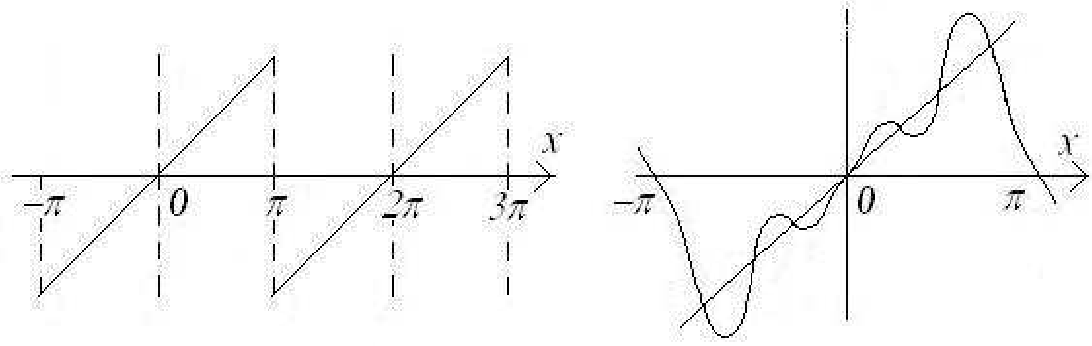

Рис. 4 Графики суммы тригонометрического ряда

2. Разложить четную функцию $f_1(x) = \cos ax$ по косинусам в $[-\pi, \pi]$, а нечетную функцию $f_2(x) = \sin ax$ – по синусам, число a не целое.

а)

$$\frac{1}{2}\,a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos ax\,dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos ax\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}[\cos{(a+n)x} + \cos{(a-n)x}]\,dx =$$

$$= (-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\frac{\sin a\pi}{\pi}.$$

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi}\Big[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a^2}{a^2-n^2}\cos nx\Big], \quad -\pi \le x \le \pi.$$

б)

$$\sin ax = \frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n\sin nx}{a^2-n^2}, \quad -\pi < x < \pi.$$

3. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi x}{2}$ по косинусам в $[0, \pi]$.

$$\frac{1}{2}\,a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2}\Big)\,dx = -\frac{\pi^2}{6},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Big(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\Big)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2}\Big)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}(x-\pi)\sin nx\,dx = \frac{1}{n^2\pi}\,(x-\pi)\cos nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{1}{n^2}$$

Разложение функции

$$\frac{x^2}{4}-\frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}, \quad 0\le x\le \pi. \tag{5}$$

На деле разложение имеет место в промежутке $[0, 2\pi]$, поскольку обе части равенства (5) не меняются при замене x на $2\pi - x$. Если в (5) положить $x = 0$, то получим ряд Эйлера $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

24.11. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ задана на всей вещественной оси и не является периодической ни с каким конечным периодом, эту функцию раскладывают не в тригонометрический ряд Фурье, а представляют интегралом Фурье. К этому новому понятию мы придем, используя известные результаты для тригонометрических рядов.

При определенных условиях функцию $f(x)$, заданную в конечном промежутке $[-l, l]$, можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2}\,a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\Big), \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt, \quad b_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\,dt. \tag{2}$$

Подставим значения коэффициентов (2) в (1)

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi}{l}(t-x)\,dt. \tag{3}$$

Это разложение справедливо для $\forall\,|x| < l$. Пусть теперь функция $f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, \infty)$, переходя в (3) к пределу при $l \to \infty$, установим предельную форму этого соотношения. Если интеграл $\int\limits_{-l}^{l} f(t)\,dt$ сходится при

$l \to \infty$, то первый член ряда (3) стремится к нулю. Обозначим $\omega_k = \dfrac{k\pi}{l}$, $k = 0, 1, ...$, приращение $\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1} = \dfrac{\pi}{l}$. В этих обозначениях ряд (3) перепишется так

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \Delta\omega_k \int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\omega_k(t-x)\,dt.$$

В таком виде этот ряд напоминает интегральную сумму для функции

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l}^{l} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt$$

от ω, где $\omega \in [0, +\infty)$. Переходя к пределу при $\Delta\omega_k \to 0$, то есть при $l \to \infty$, приходим к интегралу Фурье функции $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega(t-x)\,dt. \tag{4}$$

Эту формулу можно записать в другом виде

$$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} [a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]\,d\omega, \tag{5}$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{6}$$

Здесь явно обнаруживается аналогия с разложением функции в тригонометрический ряд Фурье, лишь параметр $\dfrac{k\pi}{l}$ заменен непрерывно меняющимся параметром ω. Коэффициенты $a(\omega)$ и $b(\omega)$ по своей структуре напоминают коэффициенты Фурье (2).

Приведенные рассуждения имеют лишь предварительный характер, условия применимости интеграла Фурье к данной функции $f(x)$ еще подлежат выяснению.

Подобно тому, как мы преобразовали частичную сумму ряда Фурье $s_n(x)$ к интегралу Дирихле, сделаем такое преобразование для конечного интеграла Фурье.

Предположим, что функция $f(x)$ кусочно-непрерывна в каждом конечном промежутке и абсолютно интегрируема в бесконечном промежутке $[-\infty, \infty]$.

Рассмотрим интеграл

$$I(A,x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^A d\omega\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x_0)\,dt, \tag{7}$$

где A – положительное число, x_0 – любое фиксированное число. Этот интеграл является аналогом частичной суммы ряда Фурье. Интеграл (4) получается в пределе при $A\to\infty$.

При любом $B>0$ будем иметь

$$\begin{gathered}\int\limits_0^A d\omega\int\limits_{-B}^{B}f(t)\cos\omega(t-x_0)\,dt=\int\limits_{-B}^{B}f(t)\,dt\int\limits_0^A\cos\omega(t-x_0)\,d\omega=\\ =\int\limits_{-B}^{B}f(t)\frac{\sin A(t-x_0)}{t-x_0}\,dt.\end{gathered} \tag{8}$$

Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на $[-B,B]$, то соответствующую теорему о повторных интегралах нужно применять к каждому промежутку непрерывности функции. Интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega(t-x_0)\,dt \tag{9}$$

мажорируется сходящимся по предположению интегралом $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$ и, следовательно, сходится равномерно относительно ω для любого промежутка его значений. Таким образом интеграл

$$\int\limits_{-B}^{B}f(t)\cos\omega(t-x_0)\,dt$$

при $B\to+\infty$ стремится к своему пределу (9) равномерно. Поэтому, переходя к пределу при $B\to+\infty$ в равенстве (8), в интеграле слева предельный переход можно выполнить под знаком интеграла. Отсюда для $I(A,x_0)$ получим выражение

$$I(A,x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)\frac{\sin A(t-x_0)}{t-x_0}\,dt, \tag{10}$$

напоминающее интеграл Дирихле и играющее ту же роль. Элементарными преобразованиями интеграл (10) приводится к виду

$$I(A,x_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_0+t)\frac{\sin At}{t}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin At}{t}\,dt. \qquad (11)$$

Дальше нам потребуется утверждение, аналогичное лемме Римана.

Лемма. Если функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на любом конечном промежутке из $[a,+\infty]$ и абсолютно интегрируема на всем промежутке, то

$$\lim_{p\to\infty}\int\limits_{a}^{\infty} f(t)\sin p\,t\,dt=0,\quad \lim_{p\to\infty}\int\limits_{a}^{\infty} f(t)\cos p\,t\,dt=0.$$

► Возьмем $\forall\,\varepsilon{>}0$ и выберем A таким, чтобы

$$\int\limits_{A}^{\infty}|f(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{тогда}\quad \left|\int\limits_{A}^{\infty} f(t)\sin p\,t\,dt\right|\le\int\limits_{A}^{\infty}|f(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{2}$$

при любом p. На основании леммы Римана возьмем такое p, чтобы

$$\left|\int\limits_{a}^{A} f(t)\sin p\,t\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В результате получим

$$\left|\int\limits_{a}^{\infty} f(t)\sin p\,t\,dt\right|<\varepsilon.$$

Аналогично оценивается второй интеграл с $\cos p\,t$. ◄

Аналогично теореме 3 § 6 получим следующее достаточное условие представления функции интегралом Фурье.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема в каждом промежутке и абсолютно интегрируема в промежутке $[-\infty,\infty]$. Тогда в каждой точке $x=x_0$ ее интеграл Фурье сходится и

$$I(x_0)=\frac{1}{2}\,[f(x_0+0)+f(x_0-0)] \qquad (12)$$

(если функция f непрерывна в точке x_0, то $I(x_0)=f(x_0)$).

► Умножим обе части равенства

$$1=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin At}{t}\,dt,\quad A>0,$$

на постоянное число $I(x_0)$ и вычтем результат почленно из равенства (11)

$$I(A, x_0) - I(x_0) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty [f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+0) - f(x_0-0)] \frac{\sin At}{t}\, dt.$$

Взяв постоянное число $h > 0$, перепишем интеграл в виде

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^h \left[\frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t} - \frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{-t} \right] \sin At\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_h^\infty \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t)}{t} \sin At\, dt - I(x_0) \frac{2}{\pi} \int\limits_h^\infty \frac{\sin At}{t}\, dt.$$

Стремление к нулю первого интеграла при $A \to +\infty$ устанавливается как и при доказательстве теоремы 3 § 6. Второй интеграл стремится к нулю на основании леммы, так как подынтегральная функция кусочно-непрерывна. Третий интеграл подстановкой $z = At$ приводится к виду

$$-I(x_0) \frac{2}{\pi} \int\limits_{Ah}^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Он также стремится к нулю при $A \to +\infty$. Таким образом $\lim\limits_{A\to\infty} [I(A, x_0) - I(x_0)] = 0$. Интеграл (4) существует и равен $I(x_0)$. ◄

Предполагая выполненными условия применимости теоремы 1, будем считать для простоты, что функций $f(x)$ непрерывна в точке x или, если разрывна, то удовлетворяет условию

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)].$$

Тогда имеем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) \cos \omega(t-x)\, dt. \tag{13}$$

Ввиду того, что подынтегральная функция является четной функцией ω, эту формулу можно записать так

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty d\omega \int\limits_{-\infty}^\infty f(t) \cos \omega(t-x)\, dt.$$

Можно показать, что при сделанных в теореме 1 предположениях относительно функции $f(x)$ существует интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)\,dt, \tag{14}$$

являющийся непрерывной нечетной функцией ω.

Для этой функции от ω уже нельзя ручаться за существование несобственного интеграла от $-\infty$ до $+\infty$. Будем считать, что существует его главное значение. Ввиду нечетности функции (14) по ω будем иметь

$$\int\limits_{-A}^{A} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)\,dt = 0.$$

В пределе при $A \to \infty$ также получится нуль. Итак,

$$V.p. \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega(t-x)\,dt = 0.$$

Умножая это равенство на $\dfrac{i}{2\pi}$ и складывая с (13), получим соотношение

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(t-x)}\,dt, \tag{15}$$

где внешний интеграл понимается в смысле главного значения. Возвращаясь к формуле (13), напишем ее в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega x d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \sin\omega x d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{16}$$

Если функция $f(x)$ есть четная функция, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = 0$ и

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\omega x d\omega \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt. \tag{17}$$

Если функция $f(x)$ – нечетная функция, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt = 0$ и

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \sin\omega x d\omega \int\limits_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt. \tag{18}$$

Пусть функция $f(x)$ задана лишь в промежутке $[0, +\infty)$ и удовлетворяет в этом промежутке условиям теоремы 1. Тогда распространим функцию $f(x)$ на промежуток $(-\infty, 0)$ с помощью равенств $f(-x) = f(x)$ или $f(-x) = -f(x)$, мы получим четную или нечетную функцию в $(-\infty, \infty)$. Таким образом функцию $f(x)$, заданную в промежутке $[0, \infty)$ можно представить в виде (17) или (18). Если в точке $x = 0$ функция f непрерывна, то как четная функция она сохраняет непрерывность и формула (17) применима в этой точке. Формула (18) будет применима в точке $x = 0$ только в случае $f(0) = 0$.

24.12. Преобразование Фурье

При тех же условиях на функцию $f(x)$ на промежутке $(-\infty, \infty)$ интеграл Фурье (15) § 11 можно представить как суперпозицию двух функций

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t}\, dt, \tag{1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega x}\, d\omega. \tag{2}$$

Функция $F(\omega)$, сопоставляемая функции $f(t)$ по формуле (1), называется преобразованием Фурье функции $f(t)$. Функция $f(x)$, сопоставляемая функции $F(\omega)$ по формуле (2), называется обратным преобразованием Фурье функции $F(\omega)$. Несобственный интеграл в (2) понимается в смысле главного значения ($V.p.$).

Функция $F(\omega)$ будет комплексной даже при вещественной функции $f(x)$. Можно рассматривать также комплексную функцию $f(x)$. Равенство (2) можно рассматривать как интегральное уравнение для функции $F(\omega)$, его решением является выражение (1). Очевидно, равенства (1), (2) можно поменять ролями.

Обратимся к формулам (17), (18) § 11. Формулу (17) можно представить как суперпозицию функций

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt, \tag{3}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} F_c(\omega) \cos \omega x\, d\omega. \tag{4}$$

Аналогично формулу (18) запишем в виде

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(t) \sin \omega t \, dt, \tag{5}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega. \tag{6}$$

Функции $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ называются соответственно косинус-преобразованием и синус-преобразованием Фурье функции $f(x)$. Как видим, функция $f(x)$ вычисляется по функциям $F_c(\omega)$ или $F_s(\omega)$ совершенно так же, как и функции $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ по функции f. Равенства (3), (4) или (5), (6) можно рассматривать одно как интегральное уравнение для подынтегральной функции, а другое как его решение.

Сопоставляя функции $F(\omega)$, $F_c(\omega)$ и $F_s(\omega)$ можно сказать следующее. В случае четной функции $f(x)$ имеем $F(\omega) = F_c(\omega)$, на значения $\omega < 0$ функция $F_c(\omega)$ распространяется четным образом. В случае нечетной функции $f(x)$ имеем $F(\omega) = iF_s(\omega)$, на значения $\omega < 0$ функция $F_s(\omega)$ распространяется нечетным образом. В общем случае функция $f(x)$ разлагается на сумму четной и нечетной функций так что можно ограничиться только косинус- и синус-преобразованиями Фурье.

Примеры.

1. $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0,\ x \geq 0)$

$$F_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-at} \cos \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \omega^2},$$

$$F_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-at} \sin \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{a^2 + \omega^2}.$$

Обратные соотношения

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_c(\omega) \cos \omega x \, d\omega = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\cos \omega x}{a^2 + \omega^2} \, d\omega = e^{-ax}, \quad x \geq 0,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty F_s(\omega) \sin \omega x \, d\omega = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{a^2 + \omega^2} \, d\omega = e^{-ax}, \quad x > 0.$$

2.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < a \\ 1/2, & x = a \qquad a > 0 \\ 0, & x > a \end{cases}$$

$$F_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^a \cos \omega t \, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega},$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega} \cos \omega x \, d\omega = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin (a+x)\omega}{\omega} \, d\omega + \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{\sin (a-x)\omega}{\omega} \, d\omega.$$