ЧЕТВЕРТЫЙ СЕМЕСТР

Содержание лекций четвертого семестра

1. **Функции ограниченной вариации и интеграл Стилтьеса**. Определение и некоторые классы функций огрниченной вариации. Необходимые и достаточные условия существования функций ограниченной вариации. Интеграл Стилтьеса, условия его существования и свойства. Абсолютно непрерывные функции.

Теория меры и интеграл Лебега

2. **Теория меры**. Кольца, полукольца и алгебры множеств. Аддитивные функции множества. Мера и ее свойства. Внешняя мера, теоремы о построении внешней меры по мере "m" и обратно. Стандартное распространение меры с полукольца на сигма-алгебру, единственность распространения. Мера Лебега в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Измеримые множества. Измеримые функции. Предельный переход в классе измеримых функций. Сходимость почти всюду и сходимость по мере. Теоремы Егорова, Лузина, Фреше.

3. **Интеграл Лебега**. Интеграл Лебега от ограниченной функции, определение и простейшие свойства. Суммируемые функции. Расширение понятия интеграла Лебега и его свойств. Предельный переход под знаком интеграла, теоремы Лебега, Леви, Фату. Повторные интегралы, теорема Фубини.

Элементы функционального анализа

4. **Метрические пространства**. Определение и примеры. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства. Сепарабельные пространства. Пополнение метрического пространства. Компактные метрические пространства. Относительная компактность, теорема Арцела. Отображения в метрических пространствах. Предел отображения и непрерывность. Непрерывные отображения на компактах. Принцип сжимающих отображений и некоторые его приложения. Линейные нормированные пространства, Банахово пространство. Сходимость в нормированных пространствах.

5. **Линейные операторы**. Норма оператора. Теорема о непрерыных операторах. Пространство линейных непрерывных операторов L(X;Y). Последовательности линейных операторов, сильная и слабая сходимость. Теорема о

полноте пространства L(X;Y). Распространение линейных операторов, теорема. Дифференцируемые отображения в нормированных пространствах. Линейные функционалы. Теорема Банаха - Хана и ее следствия. Сопряженные операторы. Вполне непрерывные операторы и их свойства.

6. **Абстрактные пространства со скалярным произведением**. Гильбертово пространство. Основная теорема Н - пространств. Ортонормированные системы векторов в Н. Ряды Фурье в Н. Уравнение замкнутости ортонормированной системы. Теорема Рисса - Фишера. Полные счетные ортонормированные системы векторов в Н. Изометричность Н пространств. Пространства l_2 , L, L_2 и L_p. Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах, теорема Рисса.

Литература.

1. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. 1973

2. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. 1974

3. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу. 1981

4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. Наука. 1968

5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз. 1959

6. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа.

Вопросы к экзамену четвертого семестра

1. Функции ограниченной вариации, теоремы 1 и 2.
2. Свойства функций ограниченной вариации, теоремы 1 и 2.
3. Необходимые и достаточные условия существования функций ограниченной вариации, теоремы 1 и 2.
4. Непрерывные функции ограниченной вариации, теорема 1 и следствие.
5. Непрерывные функции ограниченной вариации, теорема 2.
6. Интеграл Стилтьеса, условия существования - теоремы 1 и 2.
7. Вычисление интегралов Стилтьеса, теорема 1 и следствие.
8. Оценка интеграла Стилтьеса, теоремы 2 - 4.

9. Абсолютно непрерывные функции, теоремы 1 и 2.

10. Кольца, полукольца и алгебры множеств

11. Аддитивные функции множества, теоремы 1 и 2.

12. Мера и ее свойства.

13. Внешняя мера. Теорема 1 (о построении внешней меры).

14. Стандартное распространение меры с полукольца на σ - алгебру, теорема 1.

15. Мера Лебега в $\mathbf{R}^n$, измеримые множества. Теоремы 1 и 2.

16. Измеримые множества, теорема 5 и следствие 2.

17. Измеримые функции, определение и теорема 1.

18. Теорема 2, необходимые и достаточные условия непрерывности функции на замкнутом множестве в $\mathbf{R}^n$.

19. Арифметические действия над измеримыми функциями, теорема 1.

20. Эквивалентные функции, теоремы 1 и 2.

21. Сходимость по мере, теорема 1.

22. Сходимость по мере, теорема 2 (А. Лебега).

23. Теорема 3 Рисса для последовательности измеримых функций.

24. Теорема Егорова.

25. Теорема Лузина.

26. Интеграл Лебега, определение и теорема 1.

27. Свойства интеграла Лебега, теоремы 1 и 2.

28. Свойства интеграла Лебега, теоремы 4 - 7.

29. Суммируемые функции, определения 1 - 4.

30. Предельный переход под знаком интеграла, теорема 1 (Лебега).

31. Метрические пространства, определение и примеры.

32. Сходимость в метрических пространствах, теоремы 1 - 3 и примеры.

33. Полные метрические пространства, теоремы 1 - 2 и примеры.

34. Сепарабельные пространства, определения и примеры.

35. Пополнение метрического пространства, теорема 1.

36. Пополнение метрического пространства, теорема 2.

37. Компактные метрические пространства, леммы 1 - 3.

38. Теорема Хаусдорфа об условиях компактности.

39. Относительная компактность, теоремы 1 и 2.

40. Непрерывные отображения в метрическом пространстве, определения и теоремы 1 и 2.

41. Принцип сжимающих отображений, теорема 1.

42. Линейные нормированные пространства, определения и примеры.

43. Банахово пространство, теорема 1.

44. Линейные операторы, норма оператора, теорема 1.

45. Последовательности линейных операторов, сильная и слабая сходимости, лемма 1 и теорема 1.

46. Распространение линейных операторов, теорема 1.

47. Дифференцируемые отображения в нормированных пространствах: определения и теоремы 1-3.

48. Линейные функционалы, теорема Банаха - Хана и следствия.

49. Слабая сходимость в нормированном пространстве, теоремы 1 - 3.

50. Сопряженные операторы, теорема 1.

51. Вполне непрерывные операторы, теоремы 1 и 2.

52. Пространства со скалярным произведением, примеры.

53. Гильбертово пространство, основная теорема.

54. Теорема 1 об ортогонализации линейно независимых векторов.

55. Ряды Фурье в H, теоремы 1 и 2.

56. Ряды Фурье в H, теорема 3 (Рисса - Фишера).

57. Изометричность H - пространств, теоремы 1 и 2.

58. Пространства суммируемых функций L, L_2, L_p.

59. Общий вид линейных функционалов в некоторых пространствах: $\mathbf{R}^n$, $C[a,b]$, H.

ГЛАВА 25. ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ. ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА

Монотонные функции образуют важный класс, но он не замкнут относительно алгебраических операций, то есть сумма, разность, произведение и частное монотонных функций не обязательно будут монотонными функциями. Например, функция $f(x) = x - x^2$ не будет монотонной на отрезке $[0, 1]$. Более широкий класс функций, тесно связанных с монотонными функциями, образуют функции ограниченной вариации. Алгебраические операции не выводят функции из этого класса, эти функции играют важную роль в математике.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Возьмем разбиение Q отрезка $[a, b]$ на части точками x_i, $i = \overline{0, n}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, и составим сумму

$$V = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \tag{1}$$

Определение 1. Верхняя грань множества $\{V\}$, отвечающая всевозможным разбиениям Q отрезка $[a, b]$, называется полной вариацией функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\bigvee\limits_a^b f(x)$ или $V(f, [a, b])$.

Если верхняя грань

$$\bigvee_a^b f(x) := \sup_Q \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \tag{2}$$

конечна, то функция $f(x)$ называется функцией ограниченной вариации на $[a, b]$ (или функцией конечного изменения). Если конечная верхняя грань не существует, то есть равна $+\infty$, говорят, что функция $f(x)$ имеет неограниченную вариацию на $[a, b]$.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a, +\infty)$ и на любом отрезке $[a, A]$ функция имеет ограниченную вариацию, тогда вариацию функции $f(x)$ на полубесконечном промежутке определяют как

$$\bigvee_a^\infty f(x) := \sup_{A>a} \bigvee_a^A f(x).$$

Аналогично для промежутка $(-\infty, b]$ вариацию функции $f(x)$ определяют как

$$\bigvee_{-\infty}^b f(x) := \sup_{B<b} \bigvee_B^b f(x),$$

если для любого $B < b$ существует $\bigvee\limits_{B}^{b} f(x)$.

25.1. Классы функций ограниченной вариации

Теорема 1. Монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию.

► Достаточно доказать теорему для монотонно возрастающей функции. Если функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то все разности $f(x_i) - f(x_{i-1})$ не отрицательны на $[a, b]$ и потому

$$V = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = f(b) - f(a).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. ◄

Из этой теоремы ясно, что функция, имеющая ограниченную вариацию, не обязана быть непрерывной. Другим примером функции с ограниченной вариацией является функция, удовлетворяющая условию Липшица: функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица, если $\exists\ const\ L > 0$, что для любых двух точек x и $y \in [a, b] :\ |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

Теорема 2. Функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица на отрезке $[a, b]$, имеет ограниченную вариацию.

► Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$, то

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L(x_i - x_{i-1}).$$

Отсюда следует $V \leq L(b - a)$ и тогда $f(x)$ – функция ограниченной вариации на $[a, b]$. ◄

Следствие 1. Если функция $f(x)$ в каждой точке отрезка $[a, b]$ имеет ограниченную производную $f'(x)$, то она имеет ограниченную вариацию.

► Из формулы Лагранжа следует $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$, $x < \xi < y$, так как $|f'(\xi)| \leq M$, то $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ и функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$ и потому имеет ограниченную вариацию. ◄

Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция не обязательно имеет ограниченную вариацию.

Примером непрерывной функции, не имеющей ограниченной вариации на отрезке, может служить следующая функция

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Если за точки деления отрезка $[0,1]$ взять

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1,$$

то легко проверить, что $V = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, откуда следует $\bigvee\limits_0^1 f(x) = +\infty$, так как гармонический ряд расходится при $n \to \infty$.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ имеет конечную вариацию на каждом из отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$, где $a < c < b$, то она имеет конечную вариацию на $[a,b]$.

▶ Разобьем отрезок $[a,b]$ точками x_i, $i = \overline{0,n}$, чтобы точка c входила в число точек деления. Если $x_k = c$, тогда сумма V представима в виде

$$V = \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|, \tag{1}$$

или, короче, $V = V_1 + V_2$, где V_1 и V_2 – суммы, отвечающие отрезкам $[a,c]$ и $[c,b]$. Отсюда

$$V \le \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \tag{2}$$

Это неравенство установлено в случае, когда точка c входит в число точек деления разбиения Q. Но, так как добавление точки деления не увеличивает сумму в (1), то неравенство (2) верно для любых разбиений отрезка $[a,b]$. Поэтому множество $\{V\}$ ограничено и существует конечная верхняя грань.◀

Следствие 2. Если отрезок $[a,b]$ можно разложить на конечное число частей, на каждой из которых функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию, то она имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. В частности, если функция $f(x)$ кусочно-монотонна на $[a,b]$, и таких частей конечное число, то она имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ – некоторая абсолютно интегрируемая на $[a,b]$ функция, то $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$.

► Преобразуем сумму

$$V = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} \left| \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(t)\,dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |\,\varphi(t)|\,dt = \int\limits_{a}^{b} |\,\varphi(t)|\,dt.$$

Отсюда следует существование верхней грани для $\{V\}$. ◄

Замечание. Интеграл может быть несобственным, но сходиться. Если $\varphi(t)$ – интегрируема на $[a,b]$, но не абсолютно, то $f(x)$ может не иметь ограниченную вариацию.

25.2. Свойства функций ограниченной вариации

Теорема 1. Если $f(x)$ – функция ограниченной вариации на $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$.

► В самом деле, при фиксированном x из $[a,b]$ имеем

$$V = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \bigvee_{a}^{b} f(x).$$

Отсюда

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \bigvee_{a}^{b} f(x). \quad ◄$$

Теорема 2. Сумма, разность, произведение и частное двух функций ограниченной вариации есть функция ограниченной вариации.

► а) Пусть $f(x) = g(x) + h(x)$, где функции g и h имеют ограниченную вариацию на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |\,g(x_i) - g(x_{i-1}) + h(x_i) - h(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq V(g) + V(h) \leq \bigvee_{a}^{b} g(x) + \bigvee_{a}^{b} h(x).$$

Отсюда следует, что функция f имеет ограниченную вариацию.

б) Пусть $f(x) = g(x) \cdot h(x)$. Тогда

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n} |\,g(x_i)h(x_i) - g(x_{i-1})h(x_{i-1})| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\, g(x_i)h(x_i) - g(x_i)h(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |\, g(x_i)h(x_{i-1}) - g(x_{i-1})h(x_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |\, g(x_i)||h(x_i) - h(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |h(x_{i-1})||\, g(x_i) - g(x_{i-1})| =$$

$$\leq A \sum_{i=1}^{n} |h(x_i) - h(x_{i-1})| + B \sum_{i=1}^{n} |\, g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq A \bigvee_a^b h(x) + B \bigvee_a^b g(x),$$

где A, B – постоянные: $|\, g(x)| \leq A$, $|\, h(x)| \leq B$.

в) $f(x) = g(x)/h(x)$, где g и h – функции ограниченной вариации и, сверх того, $|\, h(x)| \geq \alpha > 0$. Достаточно доказать, что функция $\varphi(x) = 1/h(x)$ имеет ограниченную вариацию.

$$V(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{h(x_i)} - \frac{1}{h(x_{i-1})} \right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|\, h(x_i) - h(x_{i-1})|}{|\, h(x_i)||\, h(x_{i-1})|} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^{n} |\, h(x_i) - h(x_{i-1})| = \frac{1}{\alpha^2} V(h) \leq \frac{1}{\alpha^2} \bigvee_a^b h(x).$$

По доказанному в пункте б) функция f ограниченной вариации. ◀

Теорема 3. Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$ и точка $c \in [a, b]$, $a < c < b$, то функция f имеет ограниченную вариацию на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, причем

$$\bigvee_a^b f(x) = \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x). \tag{1}$$

▶ Разделим на части каждый из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$. Тогда весь отрезок $[a, b]$ разделится на части. Сумму для всего отрезка обозначим V, суммы для отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ – V_1, V_2. Очевидно, для данного разбиения $V = V_1 + V_2$. Отсюда следует, что $V_1 + V_2 \leq \bigvee_a^b f(x)$, а значит и $\bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \leq \bigvee_a^b f(x)$.

Докажем противоположное неравенство. Разделим отрезок $[a, b]$ на части, включив точку c в число точек деления. Раньше мы установили (теорема 3, п. 25.1), что

$$V \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x) \quad \Longrightarrow \quad \bigvee_a^b f(x) \leq \bigvee_a^c f(x) + \bigvee_c^b f(x).$$

Из двух противоположных неравенств получим равенство (1). ◀

Следствие. Если $f(x)$ есть функция ограниченной вариации на $[a,b]$, то функция $F(x) = \bigvee\limits_a^x f(t)$, где $a \le t \le x$, является монотонно возрастающей функцией от x на $[a,b]$.

► Возьмем $x' < x''$ и вычислим разность

$$\Delta F = F(x'') - F(x') = \bigvee_a^{x''} f(t) - \bigvee_a^{x'} f(t) = \bigvee_a^{x'} f(t) + \bigvee_{x'}^{x''} f(t) - \bigvee_a^{x'} f(t) = \bigvee_{x'}^{x''} f(t) \ge 0.$$

◄

25.3. Необходимые и достаточные условия существования функции ограниченной вариации

Теорема 1. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела ограниченную вариацию на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала возрастающая функция $F(x)$ такая, что для любых $x' < x'' \in [a,b]$ выполнялось неравенство $|f(x'') - f(x')| \le F(x'') - F(x')$.

► *Необходимость*. Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда по следствию $F(x) = \bigvee\limits_a^x f(t)$ – монотонно возрастающая функция на $[a,b]$. По определению вариации функции имеем для $\forall\, x', x'' \in [a,b]$, $x' < x''$,

$$|f(x'') - f(x')| \le \bigvee_{x'}^{x''} f = \bigvee_a^{x''} f - \bigvee_a^{x'} f = F(x'') - F(x').$$

Достаточность. Пусть выполнено условие $|f(x'') - f(x')| \le F(x'') - F(x')$, где $F(x)$ монотонно возрастает на $[a,b]$, тогда

$$V = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) = M.$$

То есть, для любого разбиения $V \le M$, значит функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$.◄

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела ограниченную вариацию на $[a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы она представлялась в форме разности двух монотонно возрастающих функций на $[a,b]$.

► *Достаточность*. Достаточность условия следует из доказанных теорем: монотонно возрастающие функции на $[a,b]$ имеют ограниченную вариацию, а разность таких функций есть функция ограниченной вариации.

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда функция $h(x) = \bigvee\limits_a^x f(t)$ монотонно возрастает. Рассмотрим функцию $g(x) = h(x) - f(x)$ и покажем, что она монотонно возрастает на $[a,b]$. Для $\forall\, x' < x'' \in [a,b]:$

$$g(x'') - g(x') = \bigvee_a^{x''} f - f(x'') - \bigvee_a^{x'} f + f(x') = \bigvee_{x'}^{x''} f - [f(x'') - f(x')] \geq 0,$$

так как из определения полной вариации ясно, что $f(x'') - f(x') \leq \bigvee\limits_{x'}^{x''} f$. Значит, $g(x)$ монотонно возрастает, но $f(x) = h(x) - g(x)$. ◀

25.4. Непрерывные функции ограниченной вариации

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет там ограниченную вариацию, то функция $F(x) = \bigvee\limits_a^x f(t)$ также непрерывна на $[a,b]$.

▶ Нужно доказать, что для любой точки $x_0 \in [a,b]$ выполнены равенства

$$\lim_{x \to x_0+0} F(x) = \lim_{x \to x_0-0} F(x) = F(x_0).$$

Покажем, что функция $F(x)$ непрерывна справа в точке x_0. Функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, следовательно, она имеет ограниченную вариацию и на $[x_0,b]:$ $\bigvee\limits_{x_0}^b f$. Для $\forall\,\varepsilon{>}0$ возьмем разбиение отрезка $[x_0,b]$, чтобы

$$V = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \bigvee_{x_0}^{b} f - \varepsilon. \tag{1}$$

Преобразуем сумму V

$$V = |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{i=2}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(x_1) - f(x_0)| + \bigvee_{x_1}^{b} f.$$

Отсюда и из неравенства (1) имеем

$$\bigvee_{x_0}^{b} f - \varepsilon < V \leq |f(x_1) - f(x_0)| + \bigvee_{x_1}^{b} f, \quad \bigvee_{x_0}^{b} f - \bigvee_{x_1}^{b} f < \varepsilon + |f(x_1) - f(x_0)|.$$

Ввиду непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 для данного $\varepsilon{>}0$, $\exists\,\delta{>}0$, что при $x_1 - x_0 < \delta$ будет $|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$. Таким образом, $\bigvee\limits_{x_0}^{x_1} f < 2\varepsilon$ и, следовательно, $F(x_1) - F(x_0) < 2\varepsilon$ при $x_1 - x_0 < \delta$. Ввиду произвольности ε, это означает непрерывность функции $F(x)$ в точке x_0 справа. Аналогично доказывается, что эта функция непрерывна в точке x_0 слева. ◀

Следствие. Непрерывная функция ограниченной вариации представима в виде разности двух непрерывных монотонно возрастающих функций.

▶ Функция $f(x)$ представима в виде $f(x) = h(x) - g(x)$, где h и g – две монотонные возрастающие функции. Но $h(x) = \bigvee\limits_a^x f$, следовательно, по теореме 1 она непрерывна, а функция $g(x) = h(x) - f(x)$ – непрерывна как разность двух непрерывных функций. ◀

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Возьмем разбиение отрезка на части точками x_i, $i = \overline{0, n}$, с параметром разбиения $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Составим суммы

$$V = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \quad \text{и} \quad \Omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(x_{i-1}, x_i),$$

где ω_i – колебание функции $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то каждая из сумм V и Ω стремится при $\lambda \to 0$ к полной вариации функции $f(x)$ на $[a, b]$. В частности,

$$\lim_{\lambda \to 0} V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \bigvee_a^b f(x). \tag{2}$$

▶ Выполнение равенства (2) означает, что для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon)$ такое, что для любых разбиений Q с $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $\left| V - \bigvee\limits_a^b f(x) \right| < \varepsilon$.

По определению вариации функции $\bigvee\limits_a^b f(x) := \sup\limits_Q \{V\}$. Следовательно, для $\forall \varepsilon > 0 \; \exists Q^*$, что $V^* > \bigvee\limits_a^b f(x) - \varepsilon = A$. Объединим разбиения Q и Q^* и получим разбиение Q^0, которое отвечает сумме V^0. Так как при измельчении разбиения сумма может лишь увеличиться, то $V^0 \geq V^* > A$. Если новая точка деления x_i^* попадает в промежуток $[x_{i-1}, x_i]$, то слагаемое $|f(x_i) - f(x_{i-1})|$ заменяется на $|f(x_i) - f(x_i^*)| + |f(x_i^*) - f(x_{i-1})|$ и увеличение суммы V при добавлении этой точки деления не превосходит удвоенного колебание функции $f(x)$ на $[x_{i-1}, x_i]$, то есть величины $2\omega_i(x_{i-1}, x_i)$. В силу непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$, а, следовательно, и равномерной непрерывности, колебание функции на любом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ может быть сделано сколь угодно малым, например, меньше ε^*.

Пусть разбиение Q^* имеет m точек деления. То есть в Q^0 к разбиению Q может быть добавлено не более m точек. Тогда $V^0 - V < 2m\varepsilon^*$. Возьмем $\varepsilon^* = \dfrac{V^* - A}{4m}$, тогда $V^0 - V < \dfrac{V^* - A}{2}$. Отсюда

$$V > V^0 - \frac{V^* - A}{2} > V^* - \frac{V^* - A}{2} = \frac{V^* + A}{2} > A.$$

Это неравенство выполняется при $\lambda < \delta$, где δ мы выбираем, чтобы сделать колебания функции меньше ε^*. Из неравенств $V > \bigvee\limits_a^b f(x) - \varepsilon$, $\bigvee\limits_a^b f(x) + \varepsilon > V$ следует $\left|V - \bigvee\limits_a^b f(x)\right| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{\lambda\to 0} V = \bigvee\limits_a^b f(x)$. Теперь докажем утверждение для сумм Ω. Ясно, что $\Omega \geq V$. Если мы найдем Ω, отвечающую разбиению Q, а затем добавим новые точки деления, в которых функция $f(x)$ принимает значения

$$m_i = \min_x\{f(x)\}, \quad M_i = \max_x\{f(x)\}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

то новая сумма V^*, отвечающая этому разбиению, $V^* \geq \Omega$. Из двух неравенств следует $\lim\limits_{\lambda\to 0}\Omega = \bigvee\limits_a^b f(x)$. ◀

25.5. Интеграл Стилтьеса

Здесь мы рассмотрим весьма важное обобщение понятия интеграла Римана – интеграл Стилтьеса.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы две ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разложим отрезок $[a, b]$ на части точками x_i, $i = \overline{0, n}$. В пределах каждого частичного сегмента $[x_{i-1}, x_i]$ выберем по точке ξ_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta g(x_i),$$

которая называется интегральной суммой Стилтьеса.

Определение 1. Если при $\lambda = \max\limits_i \Delta x_i \to 0$ интегральная сумма σ стремится к конечному пределу I, не зависящему от способа разбиения отрезка и выбора точек ξ_i, то этот предел называется интегралом Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) \quad \text{или} \quad (S)\int\limits_a^b f(x)\,dg(x).$$

Точный смысл определения таков: число I есть интеграл Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$, если для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\,\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех разбиений, у которых $\lambda < \delta$, будет $|\,\sigma - I| < \varepsilon$ при любом выборе точек ξ_i.

Очевидно, что интеграл Римана является частным случаем интеграла Стилтьеса при $g(x) = x$.

Если функция $g(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, то интеграл Стилтьеса превращается в интеграл Римана. Поскольку

$$\Delta g(x_i) = g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(x_i)\Delta x_i + o(\Delta x_i).$$

При переходе к пределу интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$ величина $f(\xi_i)\ o(\Delta x_i)$ обращается в нуль

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

(для обоснования можно было воспользоваться формулой Лагранжа $\Delta g(x_i) = g'(\overline{x}_i)\Delta x_i$, $x_{i-1} < \overline{x}_i < x_i$).

Суммы Дарбу - Стилтьеса

Пусть функция $g(x)$ монотонно возрастает на $[a,b]$. Для фиксированного разбиения Q отрезка $[a,b]$ обозначим $m_i = \inf\limits_x f(x)$, $M_i = \sup\limits_x f(x)$ где $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Образуем суммы

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta g(x_i), \quad S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta g(x_i).$$

Здесь, очевидно, $\Delta g(x_i) \geq 0$. Для данных нижней и верхней сумм Дарбу - Стилтьеса выполняются все свойства сумм Дарбу - Римана.

1. Для любого фиксированного разбиения Q с отмеченными точками ξ_i $s \leq \sigma \leq S$.

По определению нижней и верхней граней: $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, умножая эти равенства на $\Delta g(x_i) \geq 0$ и суммируя по i от 1 до n получим требуемый результат.

2. При измельчении разбиения Q нижняя сумма s может лишь увеличиться, а верхняя S лишь уменьшиться. Если s и S – суммы, отвечающие разбиению Q, а s^* и S^* – разбиения Q^*, полученные измельчением Q, то $s \leq s^* \leq S^* \leq S$.

3. Каждая нижняя сумма s не превосходит каждой верхней суммы S, хотя бы они отвечали разным Q.

Теорема (необходимое и достаточное условие существование интеграла Стилтьеса). Для того, чтобы функция $f(x)$ была интегрируема по функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\,\varepsilon{>}0$ существовало разбиение Q такое, что $S - s < \varepsilon$.

► Доказывается аналогично случаю интеграла Римана. ◄

Обозначим $\omega_i = M_i - m_i$ – колебание функции $f(x)$ на частичном промежутке. Тогда будем иметь

$$S - s = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta g(x_i) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta g(x_i),$$

и условие теоремы запишется в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta g(x_i) < \varepsilon.$$

Рассмотрим множества нижних и верхних сумм Дарбу - Стилтьеса $\{s\}$ и $\{S\}$, отвечающих различным разбиениям Q. Так как $\{s\}$ ограничено сверху $\forall\, S$, то существует $J_* = \sup\limits_{Q}\{s\}$, аналогично, множество $\{S\}$ ограничено снизу $\forall\, s$ и существует $J^* = \inf\limits_{Q}\{S\}$. Величины J_* и J^* называются нижним и верхним интегралами Стилтьеса - Дарбу. Эти величины всегда существуют, но не всегда равны. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x)$ по функции $g(x)$ состоит в том, что $J_* = J^*$.

25.6. Условия существования интеграла Стилтьеса

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ имеет там конечную вариацию, то интеграл Стилтьеса от функции $f(x)$ по функции $g(x)$ существует.

► Будем считать, что функция $g(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$, так как каждая функция ограниченной вариации равна разности двух монотонно возрастающих функций.

В условии существования интеграла $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i \Delta g(x_i) < \varepsilon$ для $\forall\,\varepsilon{>}0$ приращение $\Delta g(x_i) \geq 0$, а колебание функции $f(x)$ в силу ее равномерной непрерывности на $[a, b]$ может быть сделано сколь угодно малым на частичных отрезках. Пусть $\omega_i < \dfrac{\varepsilon}{g(b) - g(a)}$ при всех i, тогда

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i \Delta g(x_i) < \varepsilon \sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{g(b) - g(a)} = \varepsilon.$$

Если у нас $g(b) = g(a)$, то, ввиду монотонности функции $g(x)$, будет $g(x) = const$ и, согласно определению, интеграл Стилтьеса равен нулю.

Пусть $g(x)$ – произвольная функция ограниченной вариации. Тогда $g(x) = h(x) - \varphi(x)$, где $h(x)$ и $\varphi(x)$ – монотонно возрастающие функции на $[a, b]$. Функция $f(x)$ интегрируема по $h(x)$ и по функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$, следовательно,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta g(x_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta h(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta \varphi(x_i) = \varepsilon. \quad ◀$$

Теорема 2. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$.

▶ Так как функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то для любых точек $x', x'' \in [a, b]$:

$$|g(x'') - g(x')| \leq L|\, x'' - x'|. \tag{1}$$

1. Пусть функция $g(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$, тогда $\Delta g(x_i) \leq L\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. За счет выбора разбиения отрезка $[a, b]$ можно получить неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta g(x_i) \leq L \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

которое является следствием интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$.

2. Пусть функция $g(x)$ не является монотонной. Так как $g(x)$ имеет ограниченную вариацию, она представима в виде разности двух монотонно возрастающих функций $g(x) = h(x) - \varphi(x)$. Возьмем $h(x) = Lx$, $\varphi(x) = Lx - g(x)$ и покажем их монотонное возрастание:

а) $h(x'') - h(x') = L(x'' - x') > 0$, если $x'' > x'$;

б) $\varphi(x'') - \varphi(x') = L(x'' - x') - [g(x'') - g(x')] \geq 0$ ввиду неравенства (1).

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема по $h(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$, а потому и по функции $g(x)$. ◀

Теорема 3. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x) = C + \int\limits_a^x \varphi(t)\, dt$, где $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема по Риману в собственном или несобственном смысле, тогда функция $f(x)$ интегрируема по $g(x)$ на $[a, b]$.

▶ Если функция $\varphi(t)$ интегрируема по Риману в собственном смысле, то она ограничена на $[a,b]:\ |\varphi(t)| \le K = const$. Следовательно,

$$|g(x'') - g(x')| = \left| \int\limits_{x'}^{x''} \varphi(t)\,dt \right| \le K|\,x'' - x'|$$

для $\forall\, x', x'' \in [a,b]$. Таким образом, функция $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда на основании теоремы 2 функция $f(x)$ интегрируема по функции $g(x)$ на $[a,b]$.

Это доказательство применимо, когда интеграл $\int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$ – собственный. ◀

25.7. Свойства интеграла Стилтьеса

1. Линейность относительно функций $f(x)$ и $g(x)$

$$\int\limits_a^b [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\,dg(x) = c_1 \int\limits_a^b f_1(x)\,dg(x) + c_2 \int\limits_a^b f_2(x)\,dg(x),$$

$$\int\limits_a^b f(x)\,d(c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)) = c_1 \int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x) + c_2 \int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

Из существования интегралов в правой части следует существование интегралов в левой части, доказывается исходя из определения.

2. Аддитивность

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^c f(x)\,dg(x) + \int\limits_c^b f(x)\,dg(x),$$

где $a < c < b$. Чтобы доказать это свойство, нужно включить точку c в число точек деления отрезка. Из существования интеграла в левой части следует существование интегралов в правой части. Обратное утверждение не верно.

Пример. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на отрезке $[-1,1]$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \le x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 < x \le 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \le x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют отличие в нуле, функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[-1,0)$ и $[0,1]$. Существует интеграл $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dg(x) = 0$, так как $f(x) = 0$; существует интеграл $\int\limits_0^1 f(x)\,dg(x) = 0$, так как $dg(x) = 0$. Однако интеграл на $[-1, 1]$ не существует.

Возьмем разбиение отрезка $[-1, 1]$ на части, чтобы точка 0 не попала в число точек деления. Легко понять, что в сумме σ останется только одно слагаемое, отвечающее промежутку, содержащему точку $0: \ x_{i-1} < 0 < x_i$. Значит, $\sigma = f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$. В зависимости от того, будет ли $\xi_i \leq 0$ или $\xi_i > 0$, сумма σ будет равна 0 или 1 и, значит, не имеет предела.

3. Интегрирование по частям

Из существования одного из интегралов

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g(x)\,df(x)$$

вытекает существование другого и равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,df(x). \tag{1}$$

► Пусть существует интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dg(x)$. Составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Ее можно представить в виде

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_{i+1})g(x_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)[f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)] + f(\xi_n)g(b) - f(\xi_1)g(a).$$

Добавим и вычтем в правой части выражение $\big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b$. Тогда

$$\sigma = \big[f(x)g(x)\big]\Big|_a^b - \sum_{i=0}^{n} g(x_i)[f(\xi_{i+1}) - f(\xi_i)].$$

Мы можем взять в качестве точек разбиения отрезка $[a, b]$ точки ξ_i, а в качестве отмеченных точек – точки x_i. Тогда в полученном выражении для σ последнее слагаемое является интегральной суммой от функции $g(x)$ по $f(x)$. Так как предел сумм σ при $\lambda \to 0$ существует, то и предел сумм, стоящих в правой части, также существует. Следовательно, имеет место формула (1).

Из этой формулы получаем, что из интегрирования функции $f(x)$ по функции $g(x)$ следует интегрирование функции $g(x)$ по функции $f(x)$ и наоборот. ◀

Следствие. Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию, а функция $g(x)$ – непрерывна, то интеграл Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ существует.

▶ Результат следует из свойства 3. ◀

25.8. Вычисление интегралов Стилтьеса

Теорема 1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x) = C + \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема по Риману, то интеграл от $f(x)$ по $g(x)$ существует, и имеет место формула

$$(S)\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = (R)\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

▶ Если функция $\varphi(t)$ непрерывна, то $dg(x) = \varphi(x)\,dx$ и формула (1) очевидна.

Существование интеграла Римана в (1) следует из непрерывности функций f и φ. Существование интеграла Стилтьеса следует из теоремы 3 п. 25.6. Имеем равенства

$$(S)\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(t)\,dt,$$

$$(R)\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Чтобы доказать их равенство, достаточно показать, что разность между интегралом Римана и интегральной суммой Стилтьеса можно сделать сколь угодно малой за счет выбора разбиения

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi(t)\,dt - \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\varphi(t)\,dt\right| \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} |f(\xi_i) - f(t)||\varphi(t)|\, dt < \overline{\varepsilon} \int\limits_a^b |\varphi(t)|\, dt = \varepsilon.$$

Здесь использована оценка $|f(\xi_i) - f(t)| < \overline{\varepsilon}$ на частичном интервале $[x_{i-1}, x_i]$, так как функция $f(t)$ равномерно непрерывна на $[a, b]$. ◀

Следствие. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $g(x)$ – непрерывна и имеет производную, кроме конечного числа точек, тогда справедлива формула (1).

▶ Имеем

$$g(x) = g(a) + \int\limits_a^x g'(x)\, dx.$$

В точках, где производная $g'(x)$ не существует, она доопределяется произвольным образом. Полагая $g'(x) = \varphi(x)$, мы получим условия теоремы 1 и формулу (1). ◀

Пример. Рассмотрим функцию Хевисайда

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad x \leq 0, \\ 1 & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Покажем, что для непрерывной функции $f(x)$ интеграл Стилтьеса по функции $h(x)$ существует, причем

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dh(x) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad 0 \notin [a, b], \\ f(0) & \text{если} \quad 0 \in [a, b]. \end{cases}$$

Если точка $0 \notin [a, b]$ то $\Delta h(x) = 0$ и $I = 0$. Если же $0 \in [a, b]$, то в интегральной сумме остается только одно слагаемое $f(\xi_i)\Delta h$ с $\Delta h = 1$ на промежутке $x_{i-1} < 0 < x_i$. Интегральная сумма $\sigma = f(\xi_i)$ при $\lambda \to 0$ имеет предел $I = f(0)$.

Оценка интеграла Стилтьеса

Теорема 2 (о среднем значении). Пусть функция $f(x)$ ограничена, а $g(x)$ монотонно возрастает на $[a, b]$, тогда, если существует интеграл Стилтьеса, то

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \mu[g(b) - g(a)], \tag{2}$$

где $m \leq \mu \leq M,\ m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x),\ M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

► Так как $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$ и функция $g(x)$ монотонно возрастает, то

$$m[g(b)-g(a)] \le \sigma \le M[g(b)-g(a)].$$

Перейдем к пределу в неравенстве при $\lambda \to 0$

$$m[g(b)-g(a)] \le I \le M[g(b)-g(a)].$$

Если $g(b) \ne g(a)$, то разделим неравенство на $g(b)-g(a)$ и обозначим $\mu = I/[g(b)-g(a)]$, тогда $m \le \mu \le M$ и получим (2). Если $g(b)=g(a)$, то $g(x)=const$, так как $g(x)$ – монотонна и формула (2) очевидна (слева и справа нуль). ◄

Следствие. Пусть $f(x)$ непрерывна, а $g(x)$ монотонно возрастает, тогда существует точка $\xi \in [a,b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(\xi)[g(b)-g(a)].$$

Теорема 3. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, а $g(x)$ имеет ограниченную вариацию, то

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x) \le \mu \bigvee_a^b g(x).$$

► Обозначим $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, очевидно $|f(x)| \le M$, тогда

$$|\,\sigma| = \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]\right| \le \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)||g(x_i)-g(x_{i-1})| \le M\bigvee_a^b g(x).$$

Отсюда следует $I \le M \bigvee\limits_a^b g(x)$. ◄

Теорема 4. Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$, то для $\forall\,\varepsilon{>}0$ найдется разбиение $[a,b]$, что $|\,\sigma - I| < \varepsilon \bigvee\limits_a^b g(x)$.

► Рассмотрим разность

$$|\,\sigma - I| = \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta g(x_i) - \sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,dg(t)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\xi_i)-f(t)]\,dg(t)\right| \le \varepsilon \bigvee_a^b g(x).$$

Ввиду непрерывности, а, следовательно, и равномерной непрерывности функции $f(x)$, ее колебания на любом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ можно сделать меньше ε. ◀

25.9. Абсолютно непрерывные функции

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная на $[a,b]$, называется абсолютно непрерывной на $[a,b]$, если для $\forall\,\varepsilon{>}0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для любой системы непересекающихся интервалов $\{(x_i, x_i+h_i)\}$, $i=\overline{1,n}$, расположенной на $[a,b]$ и имеющей сумму длин меньше δ, сумма абсолютных величин приращений функции $f(x)$ на этих интервалах будет меньше ε. То есть из $(x_i, x_i+h_i)\bigcap(x_j, x_j+h_j)=\varnothing$ при $i\neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i<\delta$ следует $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i+h_i)-f(x_i)|<\varepsilon$.

Взяв, в частности, $n=1$, будем иметь, что из $(x, x+h)\in[a,b]$ и $|\,h|<\delta$ следует $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$. Так что абсолютно непрерывная функция непрерывна. Обратное утверждение неверно, так как непрерывная функция $f(x)$ на $[a,b]$ не всегда будет абсолютно непрерывной.

Укажем один класс абсолютно непрерывных функций – это функции, удовлетворяющие условию Липшица на $[a,b]$.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a,b]$, то она абсолютно непрерывна.

▶ Из $|f(x_i+h_i)-f(x_i)|\leq Lh_i$ следует

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i+h_i)-f(x_i)|\leq L\sum_{i=1}^{n} h_i<\varepsilon. \quad ◀$$

Примером функций, удовлетворяющих условию Липшица, служат функции, имеющие ограниченную производную.

Арифметические операции не выводят абсолютно непрерывную на отрезке функцию из этого класса.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны на $[a,b]$, то функции $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$, $g(x)\neq 0$ также являются абсолютно непрерывными на $[a,b]$.

▶ Рассмотрим, например, случай произведения $f(x)\cdot g(x)$. Оценим величину

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i+h_i)g(x_i+h_i)-f(x_i)g(x_i)|=$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i + h_i)g(x_i + h_i) - f(x_i + h_i)g(x_i) + f(x_i + h_i)g(x_i) - f(x_i)g(x_i)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i + h_i)||\, g(x_i + h_i) - g(x_i)| + \sum_{i=1}^{n} |\, g(x_i)||f(x_i + h_i) - f(x_i)| \leq$$

$$\leq F \sum_{i=1}^{n} |\, g(x_i + h_i) - g(x_i)| + G \sum_{i=1}^{n} |f(x_i + h_i) - f(x_i)|.$$

Здесь $F = \max\limits_{[a,b]} |f(x)|,\ G = \max\limits_{[a,b]} |g(x)|$.

Если взять произвольное $\varepsilon > 0$, то, в силу абсолютной непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$, найдутся числа δ_1 и δ_2, что

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i + h_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2F}, \quad \sum_{i=1}^{n} |g(x_i + h_i) - g(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2G}$$

при $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i < \delta_1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i < \delta_2$ соответственно. Возьмем $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда при $\sum\limits_{i=1}^{n} h_i < \delta$ получим

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i + h_i)g(x_i + h_i) - f(x_i)g(x_i)| < \varepsilon$$

и абсолютная непрерывность произведения доказана. Аналогично рассматриваются другие случаи. ◀

Теорема 2. Функция $f(x)$, абсолютно непрерывная на $[a, b]$, имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.

▶ Пусть функция $f(x)$ не имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$. Тогда в любом разбиении отрезка $[a, b]$ найдется хотя бы один отрезок, на котором вариация не ограничена, например, на $[x_{i-1}, x_i]$. Разбив этот отрезок на части, составим сумму $\sum\limits_{j=1}^{m} |f(x_j + h_j) - f(x_j)|$. Так как $f(x)$ не имеет ограниченной вариации, эта сумма будет неограниченной, хотя $\sum\limits_{j=1}^{m} h_j \leq x_i - x_{i-1} < \delta$. Получили противоречие с условием теоремы – функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$. ◀

ГЛАВА 1. МЕРА В АБСТРАКТНЫХ МНОЖЕСТВАХ

Понятие меры в евклидовом пространстве представляет собой естественное обобщение понятий длины промежутка, площади прямоугольника и объема параллелепипеда. Это понятие необходимо для построения интеграла более общего, чем интеграл Римана. В этой главе мы рассмотрим понятие меры в весьма общем виде на произвольных множествах. Частным случаем построения меры в абстрактных множествах будет построение меры Лебега в евклидовом пространстве, осуществляемое в следующей главе.

1.1. Некоторые вспомогательные соотношения.

Напомним принцип двойственности теории множеств. Если B_α — произвольные подмножества множества A, а $C_\alpha := A \setminus B_\alpha$ — их дополнения, то

$$A \setminus \bigcup_\alpha B_\alpha = \bigcap_\alpha C_\alpha; \quad A \setminus \bigcap_\alpha B_\alpha = \bigcup_\alpha C_\alpha. \tag{1}$$

Дополнение к объединению подмножеств равно пересечению их дополнений, а дополнение к пересечению подмножеств равно объединению их дополнений. Доказательство было рассмотрено раньше.

Выведем некоторые соотношения, часто используемые в дальнейшем.

1^o. Если множества $A_i\,(i = 1, 2, ...)$ образуют убывающую последовательность, то есть $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$, и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, то

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \backslash A_{i+1}. \tag{2}$$

При этом очевидно, что множества $A_i \backslash A_{i+1}$ дизъюнктны.

► Ясно, что правая часть (2) включается в A_1. Обратно, если $x \in A_1$, то находим наибольший номер i (пусть это будет $i = n$), при котором $x \in A_i$, тогда $x \in A_n \backslash A_{n+1}$ и тем самым доказано обратное включение. ◄

2^o. Если множества $A_i\,(i = 1, 2, ...)$ дизъюнктны, а $B_n = \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. При этом очевидно, что множества B_n образуют убывающую последовательность.

► Если $x \in B_n$ при некотором n, то $x \in A_k$ при некотором $k > n$. Но тогда $x \notin A_i$ при всяком $i > k$ и потому $x \notin B_n$, если $n \geq k$. Таким образом не существует элемента x, принадлежащего всем множествам B_n. ◀

3^o. Если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, то

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left[A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j \right]. \tag{3}$$

При этом очевидно, что множества $A_i \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j$ дизъюнктны.

▶ Включение правой части равенства (3) в множество A очевидно. Пусть $x \in A$, тогда существует наименьший номер i, пусть это будет n, при котором $x \in A_i$. Если $n = 1$, то $x \in A_1$, если $n > 1$, то $x \in A_n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j$. В обоих случаях x включается в правую часть формулы (3). ◀

Формула (3) упрощается, если множества A_i образуют возрастающую последовательность, то есть $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_i \subset ...$ Тогда $\bigcup\limits_{j=1}^{i-1} A_j = A_{i-1}$ и (3) принимает следующий вид

$$A = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup ... \cup (A_i \setminus A_{i-1}) \cup ... = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i-1}). \tag{4}$$

1.2 Кольца, полукольца и алгебры множеств.

Определение 1. Пусть M – произвольное множество. Непустая совокупность $\mathfrak{M}$ некоторых его подмножеств, называется кольцом, если для $\forall A,\ B \in \mathfrak{M}$

1) $A \cup B \in \mathfrak{M}$, 2) $A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

Ясно, что условие 1) по индукции распространяется на любое конечное число множеств из $\mathfrak{M}$, то есть если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и все $A_i \in \mathfrak{M}$, то и $A \in \mathfrak{M}$.

Таким образом, кольцо может быть охарактеризовано как непустая совокупность подмножеств некоторого множества, замкнутая относительно операций объединения конечного числа множеств и вычитания.

Примерами кольца могут служить совокупность всех подмножеств множества M и совокупность, состоящая из одного пустого множества.

а) Всякое кольцо $\mathfrak{M}$ содержит пустое множество.

Действительно, пусть $A \in \mathfrak{M}$ (такие A существуют, поскольку $\mathfrak{M}$ не пусто). Тогда $A \setminus A = \varnothing$ и $\varnothing \in \mathfrak{M}$.

б) Всякое кольцо $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно операции пересечения конечного числа множеств.

Достаточно проверить это для пересечения двух множеств. Пусть $A,\ B \in \mathfrak{M}$. Тогда из формулы $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ и определения кольца сразу следует, что $A \cap B \in \mathfrak{M}$.

Замечание. Из замкнутости относительно операций вычитания и пересечения некоторого класса множеств не следует замкнутости относительно объединения двух множеств, то есть этот класс не является кольцом. Аналогично дело обстоит и с классом множеств, замкнутых относительно объединения и пересечения множеств.

Определение 2. Непустая совокупность $\mathfrak{M}$ подмножеств множества M называется алгеброй, если

1) из $A,\ B \in \mathfrak{M}$ следует $A \cup B \in \mathfrak{M}$;

2) из $A \in \mathfrak{M}$ следует, что и его дополнение $C := M \setminus A \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1. Для того, чтобы совокупность $\mathfrak{M}$ подмножеств множества M была алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она была кольцом и чтобы $M \in \mathfrak{M}$.

► *Необходимость*. Пусть $\mathfrak{M}$ – алгебра, тогда для $\forall A \in \mathfrak{M}$ имеем $M = A \cup (M \setminus A)$ и потому $M \in \mathfrak{M}$. Остается проверить, что $\mathfrak{M}$ замкнуто относительно вычитания. Пусть $A,\ B \in \mathfrak{M}$, имеем $A \setminus B = A \cap (M \setminus B) = M \setminus [(M \setminus A) \cup B]$. Последнее равенство следует из принципа двойственности: дополнение к объединению подмножеств равно пересечению их дополнений. Так как $M \setminus A$ и $B \in \mathfrak{M}$, то и $A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{M}$ – кольцо и $M \in \mathfrak{M}$. Тогда для $\forall A \in \mathfrak{M}$ его дополнение $M \setminus A \in \mathfrak{M}$ и потому $\mathfrak{M}$ – алгебра. ◄

Замечание. В условии 1) определения алгебры объединение множеств $A \cup B \in \mathfrak{M}$ можно заменить их пересечением $A \cap B \in \mathfrak{M}$. Действительно, если $\forall A$ и $B \in \mathfrak{M}$ и $A \cap B \in \mathfrak{M}$, то и $A \cup B = M \setminus [(M \setminus A) \cap (M \setminus B)] \in \mathfrak{M}$. Здесь также использован принцип двойственности: дополнение к пересечению подмножеств равно объединению их дополнений.

В определении кольца такую замену сделать нельзя.

Определение 3. Непустая совокупность $\mathfrak{M}$ подмножеств множества M называется σ – кольцом, если

1) из $A_i \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, ...)$ следует, что $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$;

2) из A, $B \in \mathfrak{M}$ следует, что $A \setminus B \in \mathfrak{M}$.

σ – кольцо замкнуто и относительно образования счетного пересечения множеств. Действительно, если $A_i \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, ...)$, а $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, то из равенства

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A_1 \cap A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus (A_1 \cap A_i)) = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)$$

следует, что $A \in \mathfrak{M}$. Здесь применен принцип двойственности.

Аналогично вводится понятие σ – алгебры.

Определение 4. Непустая совокупность $\mathfrak{M}$ подмножеств множества M называется σ – алгеброй, если

1) из $A_i \in \mathfrak{M}$ следует, что $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$;

2) из $A \in \mathfrak{M}$ следует, что $C = M \setminus A \in \mathfrak{M}$.

Дословно повторяя доказательство теоремы 1 можно установить что для того, чтобы совокупность $\mathfrak{M}$ была σ – алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она была σ – кольцом и чтобы $M \in \mathfrak{M}$.

Совокупность всех подмножеств множества M – простой пример σ – алгебры. Совокупность всех счетных подмножеств множества M, а также совокупность, состоящая из одного $\varnothing$ — примеры σ – кольца.

Если дано некоторое множество колец (соответственно алгебр) $\mathfrak{M}_\alpha$, состоящее из подмножеств множества M, то их пересечение $\mathfrak{M} = \bigcap_{\alpha} \mathfrak{M}_\alpha$ также кольцо (соответственно алгебра). Действительно, проверим, например, замкнутость $\mathfrak{M}$ относительно объединения.

Пусть A, $B \in \mathfrak{M}$, тогда A, $B \in \mathfrak{M}_\alpha$ при $\forall\alpha$, следовательно, $A \cup B \in \mathfrak{M}_\alpha$ при $\forall\alpha$, а потому $A \cup B \in \mathfrak{M}$.

Аналогично, если $\mathfrak{M}_\alpha$ — σ – кольца (соответственно σ – алгебры), то их пересечение тоже σ – кольцо (соответственно σ – алгебра).

Если K – произвольная непустая совокупность подмножеств множества M, то всегда существует наименьшее кольцо (соответственно алгебра, σ – кольцо, σ – алгебра) $\mathfrak{M}$, содержащее K $(K \subset \mathfrak{M})$. Действительно, таким $\mathfrak{M}$ будет пересечение всех колец $\mathfrak{M}'$ (соответственно алгебр, σ – колец или σ – алгебр), состоящих из подмножеств множества M и содержащих K (такие $\mathfrak{M}'$ существуют, например, совокупность всех подмножеств множества M). Эта совокупность $\mathfrak{M}$ называется кольцом (соответственно алгеброй, σ – кольцом, σ – алгеброй), порожденным совокупностью K.

Введем еще одно понятие, более общее чем понятие кольца.

Определение 5. Совокупность $\mathfrak{M}$ подмножеств множества M называется полукольцом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\emptyset \in \mathfrak{M}$;

2) если $A,\ B \in \mathfrak{M}$ то $A \cap B \in \mathfrak{M}$;

3) если $A,\ B \in \mathfrak{M}$ и $B \subset A$, то существует конечная или счетная совокупность таких дизъюнктных множеств $C_n \in \mathfrak{M}$, что $A \setminus B = \bigcup\limits_n C_n$.

Всякое кольцо множеств, очевидно, является и полукольцом. Действительно, если $\mathfrak{M}$ – кольцо, то $\varnothing \in \mathfrak{M}$, $A \cap B \in \mathfrak{M}$, $A \setminus B \in \mathfrak{M}$ и согласно п. 3^o .1.1 представимо в виде объединения дизъюнктных множеств. Обратное не всегда верно.

Простым примером полукольца может служить совокупность всех промежутков на прямой (включая и вырожденные — состоящие из одной точки и $\emptyset$). При этом разность двух промежутков представима или в виде промежутка, или в виде объединения двух дизъюнктных промежутков.

Отметим некоторые свойства полукольца.

а) Если $A, A_1, ..., A_p \in \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ – полукольцо), то существует не более чем счетная совокупность таких дизъюнктных множеств $C_n \in \mathfrak{M}$, что

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} A_i = \bigcup_n C_n.$$

Это утверждение, очевидно, представляет усиление условия 3) из определения 5 полукольца.

► Проведем по индукции. Пусть $A,\ A_1 \in \mathfrak{M}$, имеем

$$A \setminus A_1 = A \setminus (A \cap A_1),\ A \cap A_1 \subset A,$$

и так как $A \cap A_1 \in \mathfrak{M}$, то $A \setminus A_1 = \bigcup\limits_k D_k$, где $D_k \in \mathfrak{M}$ и дизъюнктны, совокупность значений k не более чем счетна в силу определения 5. Далее

$$A \setminus (A_1 \cup A_2) = (A \setminus A_1) \setminus A_2 = \bigcup_k (D_k \setminus A_2).$$

По уже доказанному каждое из множеств $D_k \setminus A_2$ представимо в виде конечного или счетного объединения дизъюнктных множеств $E_{kl} \in \mathfrak{M}$ (по индексу l)

$$D_k \setminus A_2 = \bigcup_l E_{kl},$$

а тогда, благодаря дизъюнктности D_k, все множества E_{kl} дизъюнктны (по двум индексам) и притом

$$A \setminus (A_1 \cup A_2) = \bigcup_{k,l} E_{kl}.$$

Это рассуждение может быть продолжено и дальше ◄

б) Если некоторое множество $A = \bigcup\limits_n A_n$ есть не более чем счетное объединение множеств $A_n \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}$ – полукольцо, то A представимо также в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных множеств $B_m \in \mathfrak{M}$, $A = \bigcup_m B_m$, причем каждое B_m содержится по крайней мере в одном из A_n.

► Для доказательства используем п. 3^o из §1 и представим множество A в виде объединения дизъюнктных множеств

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\big).$$

Затем каждое из множеств $A_n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j$ заменим, согласно предложению а), объединением дизъюнктных множеств $D_{nk} \in \mathfrak{M}$. Совокупность всех D_{nk} не более чем счетна. Нумеруя их заново, мы и получим требуемые B_m. ◄

(предложение п. 3^o п. 1.1 справедливо и для конечного объединения).

1.3. Аддитивные функции множества.

Функция, областью задания которой является некоторая совокупность множеств, называется функцией множества.

Пусть вещественная функция f задана для всех A из совокупности $\mathfrak{M}$ некоторых множеств. Не исключено, что $f(A)$ может принимать значения $+\infty$ или $-\infty$, однако для упрощения последующих определений мы предполагаем, что функция f допускает бесконечные значения только одного определенного знака, например, только $+\infty$.

Определение 1. Функция f называется счетно-аддитивной, если для любой конечной или счетной совокупности дизъюнктных множеств $A_i \in \mathfrak{M}$, объединение которых $A = \bigcup\limits_i A_i$ тоже принадлежит $\mathfrak{M}$, имеет место равенство

$$f(A) = \sum_i f(A_i), \tag{1}$$

(если хоть одно из слагаемых равно $+\infty$, то и сумма считается равной $+\infty$).

Если равенство (1) обеспечено лишь в случае, когда A — объединение конечного числа дизъюнктных множеств A_i (A и все A_i из $\mathfrak{M}$), то функция f называется конечно-аддитивной или просто аддитивной.

Пусть теперь область задания $\mathfrak{M}$ — кольцо множеств. Тогда объединение любого конечного числа множеств $A_i \in \mathfrak{M}$ тоже принадлежит $\mathfrak{M}$. Поэтому, если известно,что для любых двух дизъюнктных множеств A_1 и A_2 из $\mathfrak{M}$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) + f(A_2),$$

то отсюда по индукции сразу получится равенство (1) и для любого конечного числа дизъюнктных множеств $A_i \in \mathfrak{M}$. Таким образом, функция f будет конечно-аддитивна.

Свойства счетно-аддитивной функции на кольце.

1^o. Аддитивная функция на кольце обладает следующим свойством: если $A,\, B \in \mathfrak{M},\ B \subset A$ и значение $f(A)$ конечно, то и $f(B)$ конечно.

► Из аддитивности функции f следует, что $f(A) = f(B) + f(A \varnothing B)$ (множество $A \setminus B \in \mathfrak{M}$, так как $\mathfrak{M}$ – кольцо). Если допустить, что $f(B) = +\infty$, то из предыдущего равенства будет следовать, что и $f(A) = +\infty$, вопреки условию. ◄

2^o Пусть $A,\, B \in \mathfrak{M},\ \ B \subset A$ и предположим, что $f(B)$ конечно. Тогда из предыдущей формулы следует, что

$$f(A \setminus B) = f(A) - f(B). \tag{2}$$

Полагая здесь $A = B$, находим $f(\varnothing) = f(A) - f(A) = 0$. Таким образом, равенство $f(\varnothing) = 0$ непременно имеет место, если существует хоть одно множество $A \in \mathfrak{M}$, для которого $f(A)$ – конечно.

Счетно-аддитивные функции с конечными значениями могут быть охарактеризованы с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. Для того, чтобы аддитивная функция f с конечными значениями, заданная на кольце $\mathfrak{M}$, была счетно-аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы для любой убывающей последовательности множеств $A_i \in \mathfrak{M}\,(i = 1, 2, ...)$ с пустым пересечением $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$ было $\lim\limits_{i\to\infty} f(A_i) = 0$.

►*Необходимость.* Пусть f – счетно-аддитивная функция на кольце $\mathfrak{M}$, и $A_i \in \mathfrak{M}$, $(i = 1, 2, ...)$ убывающая последовательность множеств с пустым пересечением. Из п. 1.1 следует $A_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A_i \setminus A_{i+1})$, где множества $A_i \setminus A_{i+1}$ дизъюнктны. Тогда, используя формулу (2), получим

$$f(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i \setminus A_{i+1}) = \sum_{i=1}^{\infty}[f(A_i) - f(A_{i+1})] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1}[f(A_i) - f(A_{i+1})] = f(A_1) - \lim_{n\to\infty} f(A_n).$$

Следовательно, $f(A_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Достаточность. Пусть f — аддитивная функция на кольце $\mathfrak{M}$. Возьмем $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A, $A_i \in \mathfrak{M}$ и множества A_i – дизъюнктны.

Докажем, что $f(A) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(A_i)$. Положим $B_n = \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_i$. Положим $B_n = \bigcup_{i=n+1}^{\infty}$, тогда последовательность множеств $\{B_n\}$ монотонно убывает и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ (пункт 2^0 из 1.1) и $B_n = A \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{M}$. Из конечной аддитивности функции f следует, что

$$f(A) = \sum_{i=1}^{n} f(A_i) + f(B_n).$$

Для убывающей последовательности $\{B_n\}$ по условию теоремы $f(B_n) \to 0, \ n \to \infty$, поэтому

$$f(A) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Таким образом, счетная аддитивность функции f на $\mathfrak{M}$ доказана. ◄

Теорема 2. Пусть f – счетно-аддитивная функция, заданная на кольце $\mathfrak{M}$. Если $A \in \mathfrak{M}$ и $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \in \mathfrak{M}$ и образуют возрастающую последовательность, то

$$f(A)=\lim_{i\to\infty} f(A_i). \tag{3}$$

То же равенство справедливо, если $A=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, где A, $A_i\in\mathfrak{M}$, A_i образуют убывающую последовательность и $f(A_i)$ конечно, начиная с некоторого i.

► Рассмотрим случай возрастающей последовательности $\{A_i\}$ и допустим сначала, что все $f(A_i)$ конечны. Тогда из формулы (4) п.1.1 следует, что

$$f(A)=f\big(A_1\bigcup_{i=2}^{\infty}(A_i\setminus A_{i-1})\big)=f(A_1)+f\big(\bigcup_{i=2}^{\infty}(A_i\setminus A_{i-1})\big)=$$

$$=f(A_1)+\sum_{i=2}^{\infty}\big[f(A_i)-f(A_{i-1})\big],$$

что равносильно (3). Если же $f(A_i)=+\infty$ начиная с некоторого i, то и $f(A)=+\infty$ и равенство (3) выполняется.

В случае убывающей последовательности $\{A_i\}$ можно, не уменьшая общности, считать, что уже $f(A_1)$ конечно. Тогда при исследовании функции f на той части кольца, которая состоит из подмножеств, содержащихся в A_1, можно применить теорему 1. А так как очевидно, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}(A_i\setminus A)=\varnothing$, то по этой теореме $f(A_i\setminus A)\to 0$, что опять равносильно (3). ◄

1.4 Мера и ее свойства.

Следующее определение играет основную роль во всем дальнейшем.

Определение 1. Пусть X – произвольное множество. Мерой в X называется вещественная неотрицательная счетно-аддитивная функция m, заданная на некотором полукольце $\mathfrak{M}$ подмножеств множества X, причем $m\varnothing=0$. (Обозначения: mA – мера множества $A\in\mathfrak{M}$)

Мера m называется конечной, если $mA<+\infty$ для $\forall A\in\mathfrak{M}$. Мера m называется σ – конечной, если для $\forall A\in\mathfrak{M}$ существуют такие $A_n\in\mathfrak{M}$ $(n=1,2,...)$, что $A\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и $mA_n<+\infty$ для каждого n.

Заметим, что для σ – конечной меры условие $m\varnothing=0$ может быть выведено из прочих свойств меры. ($m\varnothing=m(\varnothing\cup\emptyset)=2m\emptyset\ \Rightarrow\ m\varnothing=0$) Однако в общем случае это не так: неотрицательная счетно-аддитивная функция может быть тождественно равна $+\infty$.

Если $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и множества A_i не пересекаются, то $mA = \sum\limits_{i=1}^{\infty} mA_i$. Это следует из счетной аддитивности меры (в определении 1).

Отметим некоторые свойства меры, легко вытекающие из ее определения.

а) Пусть на полукольце $\mathfrak{M}$ задано не более чем счетное множество дизъюнктных множеств $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, ...)$, причем $A_n \subset A \in \mathfrak{M}$ при $\forall n$, тогда $\sum\limits_n mA_n \leq mA$.

► Действительно, если множеств A_n конечное число p, то, согласно свойству а) из п. 1.2, разность $A \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{p} A_n$ можно представить в виде

$$A \setminus \bigcup_{n=1}^{p} A_n = \bigcup_k C_k,$$

где $C_k \in \mathfrak{M}$ и дизъюнктны. Отсюда

$$mA = \sum_{n=1}^{p} mA_n + \sum_k mC_k,$$

следовательно,

$$\sum_{n=1}^{p} mA_n \leq mA.$$

Если же множеств A_n — счетная совокупность, то предыдущее неравенство справедливо при любом p и, переходя в нем к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} mA_n \leq mA. \quad ◄$$

Частным случаем свойства а) является так называемая монотонность меры: если A, $B \in \mathfrak{M}$ и $B \subset A$, то $mB \leq mA$.

б) Если A, $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, ...)$, $A \subset \bigcup\limits_n A_n$ и совокупность множеств A_n конечна или счетна, то

$$mA \leq \sum_n mA_n.$$

► Положим $B_n = A_n \cap A$. Тогда $B_n \in \mathfrak{M}$ и $A = \bigcup\limits_n B_n$ (B_n не обязательно являются дизъюнктными). Далее введем множества

$$D_n = B_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k,$$

D_n не обязательно $\in \mathfrak{M}$.

Согласно утверждению 3^o из п. 1.1 $A = \bigcup_n D_n$ и при этом D_n – дизъюнктны. Каждое D_n можно представить в виде

$$D_n = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i = \bigcup_k C_{nk},$$

где $C_{nk} \in \mathfrak{M}$ $(k = 1, 2, ...)$ и дизъюнктны, и тогда $A = \bigcup_{n,k} C_{nk}$, причем и в этом объединении все множества C_{nk} – дизъюнктны. Кроме того, $D_n \subset B_n$, а потому по предыдущему предложению а) $\sum_k mC_{nk} \leq mB_n$ при любом n. Отсюда

$$mA = \sum_n \sum_k mC_{nk} \leq \sum_n mB_n \leq \sum_n mA_n. \quad \blacktriangleleft$$

Доказанное в п. б) свойство называется счетной полуаддитивностью меры. Из этого свойства сразу вытекает, что если конечное или счетное объединение множеств меры, равной нулю, входит в $\mathfrak{M}$, то его мера тоже равна нулю.

1.5. Внешняя мера.

Здесь рассмотрим функцию, играющую важную роль в теории меры.

Определение 1. Пусть X – произвольное множество. Внешней мерой в X называется вещественная неотрицательная функция μ^*, заданная на совокупности всех подмножеств множества X и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\mu^*\varnothing = 0$;

2) если $E \subset \bigcup_n E_n$, где совокупность множеств $E_n \subset X$ не более чем счетна, то $\mu^*E \leq \sum_n \mu^*E_n$ (счетная полуаддитивность внешней меры).

Из счетной полуаддитивности вытекает, в частности, монотонность внешней меры: если $E_1 \subset E_2$, то $\mu^*E_1 \leq \mu^*E_2$. Обращаем внимание на то, что от внешней меры не требуется свойства аддитивности, даже конечной.

Далее рассмотрим две теоремы. Первая из них дает способ построения внешней меры μ^* по заданной мере m, а вторая — меры m по заданной внешней мере μ^*.

Теорема 1. Пусть m – мера в X, заданная на полукольце $\mathfrak{M}$, и пусть μ^* – функция, определенная для любого множества $E \subset X$ по следующему правилу:

1) если для $E \subset X$ существует не более чем счетное покрытие из полукольца $\mathfrak{M}$, то есть $E \subset \bigcup_n A_n$, где $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, ...)$, то $\mu^*E = \inf \big[\sum_n mA_n \big]$, где нижняя грань берется по всевозможным покрытиям указанного типа;

2) в противном случае, если такого покрытия не существует, то $\mu^* E = +\infty$.

Тогда μ^* – внешняя мера в X, причем $\mu^* A = mA$ для $\forall A \in \mathfrak{M}$.

► Выполнение для μ^* условия 1) из определения внешней меры очевидно. Условие 2) нуждается в проверке только в случае, если $\sum\limits_n \mu^* E_n < +\infty$. В этом случае зададим $\varepsilon > 0$ и для каждого E_n подберем покрытие, состоящее из множеств $A_{nk} \in \mathfrak{M}$, $k = 1, 2, ...$, так, что

$$\sum_k mA_{nk} < \mu^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

(Возьмем $\mu^* E_n \le \inf \big[\sum\limits_k mA_{nk} \big]$, тогда добавив $\mu^* E_n + \varepsilon_n$ найдем покрытие, что неравенство будет выполнено).

Множества A_{nk} $(n, k = 1, 2, ...)$ в совокупности образуют не более чем счетное покрытие множества E (напоминаем, что в условии 2) $E \subset \bigcup\limits_n E_n$), причем

$$\mu^* E \le \sum_{n,k} mA_{nk} < \sum_n \left(\mu^* E_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_n \mu^* E_n + \varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε отсюда и получается требуемое неравенство определения 1. Таким образом, μ^* – внешняя мера множества X. Равенство $\mu^* A = mA$ для $\forall A \in \mathfrak{M}$ вытекает из следующих соображений. С одной стороны, из п. б) п. 1.4 (свойства меры) следует, что $mA \le \sum\limits_n mA_n$ для любого покрытия множества A, а потому $mA \le \mu^* A$. С другой стороны, совокупность, состоящая из одного множества A представляет его собственное покрытие и потому $\mu^* A \le mA$, тем самым $\mu^* A = mA$. ◄

Будем говорить, что внешняя мера μ^*, построенная в теореме 1, порождена мерой m.

Введем обозначение: если E – произвольное множество из X, то $E' = X \backslash E$ — его дополнение относительно X.

Определение 2. Пусть μ^* – внешняя мера в X. Возьмем два множества A, $E \subset X$. Говорят, что множество A "хорошо разбивает"множество $E \subset X$, если

$$\mu^* E = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A'). \tag{1}$$

Заметим, что по свойству счетной полуаддитивности внешней меры, в формуле (1) всегда имеет место знак "$\le$". Поэтому, чтобы доказать, что множество A

хорошо разбивает множество E, достаточно установить неравенство

$$\mu^*E \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A'), \qquad (2)$$

а последнее нуждается в проверке только в случае $\mu^*E < +\infty$. Из формулы (1) видно, если A хорошо разбивает E, то A' тоже хорошо разбивает E.

Определение 3. Множество $A \subset X$ называют μ^* – измеримым, если оно хорошо разбивает всякое множество $E \subset X$.

Совокупность всех μ^* – измеримых множеств в X обозначим Σ. Сужение внешней меры μ^* в X на совокупность Σ всех μ^* – измеримых множеств обозначим через μ.

Теорема 2. Совокупность Σ всех μ^* – измеримых множеств в X является σ – алгеброй, а функция μ – мерой в X.

► 1) Сначала докажем, что Σ — алгебра, а функция μ – конечно-аддитивна. Ясно, что само X и $\emptyset$ входят Σ, а потому совокупность Σ не пуста. Кроме того, из сделанного выше замечания сразу следует, что если $A \in \Sigma$, то и $A' = X \setminus A \in \Sigma$.

Пусть теперь A_1 и $A_2 \in \Sigma$, а $B = A_1 \cap A_2$; покажем, что B хорошо разбивает $\forall E \subset X$, то есть $B \in \Sigma$. Используя что A_1 и A_2 хорошо разбивают любое множество E из X, имеем

$$\mu^*E = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_1') = \mu^*(E \cap (A_1 \cap A_2)) + \mu^*(E \cap (A_1 \cap A_2')) + \mu^*(E \cap A_1')$$

С другой стороны

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B') = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap (B' \cap A_1)) + \mu^*(E \cap (B' \cap A_1')).$$

Но $B' \cap A_1 = A_1 \cap A_2'$, $B' \cap A_1' = A_1'$ и потому правые части в обоих равенствах совпадают, следовательно,

$$\mu^*E = \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B').$$

Таким образом, $B \in \Sigma$ и множество Σ является алгеброй (в определении алгебры объединение множеств можно заменить пересечением).

Пусть A_1 и $A_2 \in \Sigma$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $A = A_1 \cup A_2$. Поскольку множество A_1 является μ^* – измеримым, для $\forall E \subset X$ имеем

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^*((E \cap A) \cap A_1)) + \mu^*((E \cap A) \cap A_1').$$

Но $A \cap A_1 = A_1,\ A \cap A_1' = A_2$, следовательно,

$$\mu^*(E \cap A) = \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2). \tag{3}$$

В частности, полагая $E = A$, находим

$$\mu A = \mu^* A = \mu^* A_1 + \mu^* A_2 = \mu A_1 + \mu A_2.$$

Аддитивность функции μ доказана.

2) Теперь докажем, что множество Σ является σ – алгеброй, а функция μ – счетно-аддитивной.

Пусть $A_k \in \Sigma$, $k = 1, 2, ...$, и множества A_k – дизъюнктны, а $A = \bigcup\limits_k A_k$. Для любого натурального p положим $B_p = \bigcup\limits_{k=1}^{p} A_k$. Так как Σ – алгебра, то $B_p \in \Sigma$, тогда для $\forall E \subset X$

$$\mu^* E = \mu^*(E \cap B_p) + \mu^*(E \cap B_p').$$

Применяя к первому слагаемому в правой части формулу (3), которая по индукции распространяется на любое конечное число дизъюнктных μ^* – измеримых множеств и учитывая монотонность внешней меры μ^*, получим

$$\mu^* E = \sum_{k=1}^{p} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap B_p') \geq \sum_{k=1}^{p} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A').$$

Далее, переходя к пределу при $p \to \infty$ и используя счетную полуаддитивность внешней меры μ^*, находим, что

$$\mu^* E \geq \sum_{k=1}^{p} \mu^*(E \cap A_k) + \mu^*(E \cap A') \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A').$$

Тем самым мы пришли к неравенству (2), из которого следует, что множество A хорошо разбивает $\forall E \subset X$, то есть $A \in \Sigma$. Кроме того, полагая $E = A$, получаем $\mu A \geq \sum\limits_k \mu A_k$, а так как обратное неравенство справедливо по определению внешней меры, то функция μ – счетно-аддитивна

$$\mu A = \sum_k \mu A_k.$$

Остается проверить, что множество Σ является σ – алгеброй. Пусть $A = \bigcup\limits_k A_k$, где A_k — любые множества из Σ. Тогда множество A представимо в виде объединения дизъюнктных множеств по формуле

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\big)$$

(см. п. 1.1), причем множества $A_n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n-1} A_j \in \Sigma$. Следовательно, по уже доказанному, $A \in \Sigma$ и Σ — σ – алгебра. ◄

Будем говорить, что мера μ, построенная в теореме 2, порождена внешней мерой μ^*.

Некоторые свойства μ^* – измеримых множеств.

1^o. Если $\mu^* A = 0$, то $A \in \Sigma$. Действительно, в этом случае, благодаря монотонности меры μ^*, неравенство (2) выполняется для $\forall E \subset X$.

2^o. Если $A \in \Sigma$ и $\mu A = 0$, а $E \subset A$, то $E \in \Sigma$. Действительно, из монотонности μ^* следует, что $\mu^* E = 0$ и остается применить свойство 1^o.

3^o. Если $A_1 \subset A \subset A_2$, причем A_1, $A_2 \in \Sigma$ и $\mu A_1 = \mu A_2 < +\infty$, то $A \in \Sigma$ и $\mu A = \mu A_1 = \mu A_2$. Действительно, $A \backslash A_1 \subset A_2 \backslash A_1$. Но $A_2 \backslash A_1 \in \Sigma$ и $\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$, а тогда по п. 2^o, $A \setminus A_1 \in \Sigma$ и потому $A = A_1 \cup (A \setminus A_1) \in \Sigma$. Равенство $\mu A = \mu A_1 = \mu A_2$ следует из монотонности меры.

4^o. Критерий μ^* – измеримости множества. Пусть $E \subset X$. Если для $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие A, $B \in \Sigma$, что $A \subset E \subset B$ и $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$, то $E \in \Sigma$.

► Для любого n подберем A_n, $B_n \in \Sigma$ так, что $A_n \subset E \subset B_n$ и $\mu(B_n \setminus A_n) < 1/n$. Положим $A = \bigcup\limits_n A_n$, $B = \bigcap\limits_n B_n$. Тогда A, $B \in \Sigma$, $A \subset E \subset B$ и $B \setminus A \subset B_n \setminus A_n$ при любом n. Следовательно, $\mu(B \setminus A) \le \mu(B_n \setminus A_n) < 1/n$, тогда $\mu(B \setminus A) = 0$, так как $E \setminus A \subset B \setminus A$. Согласно п. 2^o отсюда вытекает, что $E \setminus A \in \Sigma$, а тогда и $E \in \Sigma$, ибо $E = A \cup (E \setminus A)$. ◄

1.6. Стандартное распространение меры с полукольца на σ – алгебру.

Объединяя оба построения меры μ^* по m и меры μ по μ^*, разобранные в предыдущем параграфе, мы осуществим теперь такое распространение меры m, заданной в множестве X на полукольце $\mathfrak{M}$, которое приведет нас к мере μ, но заданной на более обширной совокупности множеств из X. Описываемый ниже процесс распространения меры был предложен немецким математиком К. Каратеодори.

Теорема 1. (Каратеодори). Пусть m — мера в X, заданная на полукольце $\mathfrak{M}$, μ^* – внешняя мера, порожденная мерой m, μ — мера, порожденная внешней мерой μ^*. Тогда μ есть распространение меры m с полукольца $\mathfrak{M}$ на σ – алгебру Σ μ^* – измеримых множеств, то есть $\mathfrak{M} \subset \Sigma$ и $mA = \mu A$ для $\forall A \in \mathfrak{M}$.

В дальнейшем получаемую таким образом меру μ будем называть стандартным распространением меры m (или распространением по Каратеодори). μ^* – измеримые множества будем называть также m – измеримыми.

▶ В проверке нуждается только включение $\mathfrak{M} \subset \Sigma$, так как равенство $mA = \mu A$ (для $A \in \mathfrak{M}$) будет тогда вытекать из теоремы 1 предыдущего п. 1.5.

Пусть $A \in \mathfrak{M}$, а E – произвольное подмножество из X. Нужно показать, что A хорошо разбивает E. Проверим равенство (2) п. 1.5, причем, как отмечено в предыдущем параграфе, достаточно считать,что $\mu^* E < +\infty$.

Опираясь на определение внешней меры μ^*, порожденной мерой m, мы можем по произвольному $\varepsilon > 0$ подобрать $A_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, ...)$ так, что

$$E \subset \bigcup_n A_n, \quad \sum_n mA_n < \mu^* E + \varepsilon.$$

Далее имеем очевидное включение:

$$E \cap A \subset \bigcup_n (A_n \cap A), \quad E \cap A' \subset \bigcup_n (A_n \cap A').$$

Множества $A_n \cap A \in \mathfrak{M}$ и образуют покрытие множества $E \cap A$; следовательно,

$$\mu^*(E \cap A) \leq \sum_n m(A_n \cap A). \tag{1}$$

Множества $A_n \cap A'$ представим в виде разностей $A_n \cap A' = A_n \setminus (A_n \cap A)$, а потому при каждом n существуют такие дизъюнктные $C_{nk} \in \mathfrak{M}$ $(k = 1, 2, ...,)$, что $A_n \cap A' = \bigcup\limits_k C_{nk}$. При этом

$$\sum_k mC_{nk} = mA_n - m(A_n \cap A).$$

Совокупность множеств $\{C_{nk}\}$ образует покрытие множества $E \cap A'$, следовательно,

$$\mu^*(E \cap A') \leq \sum_{n,k} mC_{nk} = \sum_n mA_n - \sum_n m(A_n \cap A). \tag{2}$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A') \leq \sum_n mA_n < \mu^* E + \varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε отсюда вытекает неравенство (2) предыдущего параграфа и теорема доказана. ◀

Замечание. Если $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_n \in \mathfrak{M}$ и $mA_n < +\infty$ при $\forall n$, то не только сама мера m σ – конечна, но тем же свойством обладает и ее стандартное распространение μ. Очевидно, верно и обратное: если μ σ – конечна, то и m σ – конечна, а X допускает указанное выше представление.

Простейшие свойства m – измеримых множеств уже были отмечены в конце предыдущего параграфа. В частности, всякое подмножество E m – измеримого множества A с $\mu A = 0$ тоже m– измеримо (и $\mu E = 0$). В связи с этим введем одно общее понятие.

Определение 1. Пусть m — произвольная мера в X, заданная на каком-то полукольце $\mathfrak{M}$. Она называется полной, если из того, что $A \in \mathfrak{M}$, $mA = 0$ и $E \subset A$, вытекает, что $E \in \mathfrak{M}$.

Теперь мы можем сказать, что стандартное распространение любой меры m всегда оказывается полной мерой.

Отметим одно общее свойство полной меры.

Теорема 2. Пусть область задания $\mathfrak{M}$ полной меры m в X — σ – алгебра. Если $E \subset X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $A \in \mathfrak{M}$, что $E \subset A$ и $mA < \varepsilon$, то $E \in \mathfrak{M}$ и $mE = 0$.

► Для каждого натурального n подберем множество $A_n \in \mathfrak{M}$ так, что $E \subset A_n$ и $mA_n < 1/n$. Положим $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $A \in \mathfrak{M}$ (так как $\mathfrak{M}$ — σ – алгебра) и $mA = 0$ по монотонности меры. Но $E \subset A$, и остается сослаться на полноту меры m. ◄

Вернемся к стандартному распространению произвольной меры m (с полукольца $\mathfrak{M}$). Заметим, что стандартное распространение может не быть минимальным в том смысле, что σ – алгебра Σ m – измеримых множеств может быть шире, чем σ – алгебра, порожденная полукольцом $\mathfrak{M}$. Мы проиллюстрируем это замечание в следующей главе. Далее покажем, что повторное применение процесса Каратеодори не дает ничего нового. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. Пусть m — мера в X, заданная на каком-то полукольце $\mathfrak{M}$, μ — ее стандартное распространение, μ^* и ν^* — внешние меры, порожденные мерами m и μ соответственно. Тогда $\mu^* E = \nu^* E$ для любого $E \subset X$.

Отсюда уже непосредственно следует, что совокупность μ – измеримых множеств совпадает с совокупностью m – измеримых множеств, а тогда стандартное распространение меры μ совпадает с самой μ.

► Поскольку μ — распространение m (и, в частности, $\mathfrak{M} \subset \Sigma$), то ясно, что $\nu^*E \leq \mu^*E$ для $\forall E \subset X$. Следовательно, если $\nu^*E = +\infty$, то и $\mu^*E = +\infty$ и $\nu^*E = \mu^*E$.

Пусть теперь $\nu^*E < +\infty$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как внешняя мера ν^* порождена мерой μ, то существует такая не более чем счетная система множеств $A_n \in \Sigma$ $(n = 1, 2, ...)$, что $E \subset \bigcup\limits_n A_n$ и $\sum\limits_n \mu A_n < \nu^*E + \varepsilon$. Но $\mu A_n = \mu^* A_n$ и потому при каждом n существует не более чем счетная система таких множеств $B_{nk} \in \mathfrak{M}$, что $A_n \subset \bigcup\limits_k B_{nk}$ и

$$\sum_k mB_{nk} < \mu A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Отсюда

$$\sum_{n,k} mB_{nk} < \nu^*E + 2\varepsilon.$$

В то же время $E \subset \bigcup\limits_{n,k} B_{nk}$ и потому

$$\mu^*E \leq \sum_{n,k} mB_{nk} < \nu^*E + 2\varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε,
$mu^*E \leq \nu^*E$ и теорема доказана. ◄

1.7. Единственность распространения меры.

Если в множестве X задана некоторая мера m (на полукольце $\mathfrak{M}$), то возможно, что помимо ее стандартного распространения μ на σ – алгебру Σ m – измеримых множеств существуют и другие распространения на какие-то другие σ – алгебры. Однако в пределах σ – алгебры Σ распространение, при некоторых ограничениях, оказывается единственным.

Справедлива следующая терема, которую мы даем без доказательства.

Теорема . Пусть μ — стандартное распространение меры m с полукольца $\mathfrak{M}$ на σ – алгебру Σ, причем мера μ σ – конечна, а ν –мера, представляющая распространение меры m на некоторую σ – алгебру $\Sigma_1 \supset \mathfrak{M}$. Тогда $\mu A = \nu A$

для всех $A \in \Sigma \cap \Sigma_1$. Если же дополнительно ко всем предыдущим условиям мера ν полна, то $\Sigma \subset \Sigma_1$.

Замечание. Условие σ – конечности меры μ в теореме существенно, если оно не выполнено, то меры μ и ν могут не совпадать.

В заключение дадим еще одну характеристику стандартного распространения μ меры m с полукольца $\mathfrak{M}$, которая годится только для случая, если множество X покрывается счетной совокупностью множеств $A_n \in \mathfrak{M}$ с $mA_n < +\infty$. В этом случае, как показывает теорема, μ — та полная мера в X, заданная на некоторой σ – алгебре $\Sigma_1 \supset \mathfrak{M}$ и представляющая распространение меры m, для которой область задания Σ_1 — наименьшая возможная (как мы знаем, в этом случае $\Sigma_1 = \Sigma$).

ГЛАВА 2. МЕРА ЛЕБЕГА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{R}^n$

2.1 n – мерные параллелепипеды

Открытым параллелепипедом называется множество точек пространства $\mathbf{R}^n$:

$$\Delta^0 = (a,b) = \{x \in \mathbf{R}^n \colon a_i < x_i < b_i,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Замкнутым параллелепипедом называется множество точек пространства $\mathbf{R}^n$:

$$\Delta^* = [a,b] = \{x \in \mathbf{R}^n \colon a_i \le x_i \le b_i,\ i = \overline{1,n}\}.$$

Параллелепипед общего вида (аналог промежутка в $\mathbf{R}^1$) будем обозначать символом $\Delta =< a,b >$. Очевидно $\Delta^0 \subset \Delta \subset \Delta^*$. Замыкание открытого промежутка Δ^0 совпадает с Δ^*, то есть $\overline{\Delta}^0 = \Delta^*$. Допускается, что некоторые $a_i = -\infty$, а $b_i = +\infty$.

Будем говорить, что параллелепипеды дизъюнктны, если у них нет общих точек, и что они не налегают друг на друга, если у них нет общих внутренних точек.

Напомним, что объемом параллелепипеда $\Delta =< a,b >$ называется произведение $v(\Delta) = \Pi_{i=1}^{i=n}(b_i - a_i)$, если существует ребро, равное $+\infty$, то $v(\Delta) = +\infty$.

Можно доказать, что $v(\Delta)$ – счетно-аддитивная функция от Δ. Однако она не мера, поскольку параллелепипеды произвольного вида не образуют полукольца. Для построения меры в евклидовом пространстве наиболее удобными являются параллелепипеды специального вида.

Определение 1. Параллелепипед вида

$$\Delta = [a,b) = \{x \in \mathbf{R}^n \colon a_i \le x_i < b_i,\ i = \overline{1,n}\}$$

называется ячейкой. В число ячеек входит также $\varnothing$, причем $v\varnothing = 0$.

Отметим некоторые свойства ячеек:

а) пересечение двух ячеек также будет ячейкой;

б) разность двух ячеек представима в виде объединения конечного числа дизъюнктных ячеек.

Из этих предложений следует, что совокупность всех ячеек пространства $\mathbf{R}^n$ является полукольцом, обозначим его $\mathfrak{M}$.

Теорема. Функция v, заданная на полукольце $\mathfrak{M}$ и равная для каждой ячейки ее объему, является σ – конечной мерой в $\mathbf{R}^n$.

► По определению $v\Delta \geq 0$ для $\forall\Delta \in \mathfrak{M}$. Функция v является счетно-аддитивной в $\mathbf{R}^n$, о чем сказано раньше. Наконец, пространство $\mathbf{R}^n$ представимо в виде счетного объединения ячеек с конечными объемами, например ячеек вида $\Delta_p = [-p, p)$, $p = 1, 2, ...$ ◄

2.2 Представление открытого множества с помощью ячеек

Мы установим, что всякое открытое множество $G \subset \mathbf{R}^n$ может быть разложено (не единственным образом) на дизъюнктные ячейки. Сами ячейки не являются открытыми множествами.

Теорема 1. Любое открытое множество $G \subset \mathbf{R}^n$ представимо в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных n – мерных ячеек с конечными ребрами.

► Для каждого $m \in N$ образуем разбиение пространства $\mathbf{R}^n$ на ячейки $[a, b)$, где каждое a_i может иметь любое значение вида $k/2^m$, где k – любое целое число ($k =$ 0,±1,±2,...), а $b_i = a_i + 1/2^m$. Эти ячейки назовем ячейками m – го ранга. Ясно, что ячейки одного ранга дизъюнктны, а каждая ячейка $(m+1)$ – го ранга целиком содержится в одной из ячеек m – го ранга (точнее, ячейки $(m + 1)$ – го ранга получаются в результате разбиения каждой из ячеек m – го ранга на 2^n частей, где n – размерность пространства).

Пусть G – открытое множество в $\mathbf{R}^n$. Будем считать, что $G \neq \varnothing$, в противном случае само G является ячейкой. Из совокупности ячеек 1 - го ранга выберем все те, которые целиком содержатся в G, множество этих ячеек обозначим Σ_1 (оно может оказаться пустым). Далее из совокупности ячеек 2 - го ранга выберем все те, которые целиком содержатся в G и не содержатся ни в одной из ячеек, включенных в Σ_1 (следовательно не пересекаются с ними). Множество этих ячеек 2 - го ранга обозначим Σ_2.

Этот процесс продолжим до бесконечности. В множество Σ_m включаем все ячейки m - го ранга, которые содержатся в G, но не входят ни в одну из ячеек множеств Σ_1, Σ_2,..., Σ_{m-1}.

Пусть $H = \cup_{m=1}^{\infty}\Sigma_m$ – множество точек из $\mathbf{R}^n$, представляющее объединение всех ячеек, входящих в Σ_m. Так как всех ячеек любого ранга – счетное множество, то и каждое из множеств Σ_m не более чем счетно, потому и множество H – объединение не более чем счетного множества ячеек. При этом, по самому построению, ячейки, из которых образовали множество H, дизъюнктны.

Докажем, что $G = H$. Включение $H \subset G$ очевидно по построению, остается проверить обратное включение. Пусть точка $x \in G$, тогда и некоторая ε - окрестность $B(x, \varepsilon) \subset G$. Если взять число m так, что $\sqrt{n}/2^m < \varepsilon$, то можно сосчитать, что та ячейка m - го ранга, которая содержит точку x, сама целиком содержится в $B(x, \varepsilon)$, а следовательно и в G. Из всех чисел m, объединенных тем свойством, что ячейки m - го ранга, содержащие точку x, целиком содержатся в G (мы уже установили, что такие m существуют), выберем наименьшее, пусть это будет $m = m_0$. Через Δ_0 обозначим ту ячейку m_0 - го ранга, которая содержит точку x. Тогда ячейки m - го ранга при $m < m_0$, содержащие Δ_0, не могут целиком входить в множество G и потому не включены в Σ_m.

Следовательно, по построению, $\Delta_0 \subset \Sigma_{m_0}$, а потому $\Delta_0 \subset H$ и точка $x \in H$. Тем самым включение $G \subset H$, а вместе с ним и равенство $G = H$ доказано. ◀

2.3 Измеримые множества в $\mathbf{R}^n$

Исходя из меры v, определенной в п. 2.2 на полукольце ячеек $\mathfrak{M}$, то есть объема ячеек, и применяя процесс распространения меры, построим в $\mathbf{R}^n$ стандартное распространение меры v.

Определение 1. Стандартное распространение μ объема v называется мерой Лебега в $\mathbf{R}^n$ (или просто мерой в $\mathbf{R}^n$). Множества из $\mathbf{R}^n$, для которых мера μ определена (то есть v – измеримые) называются измеримыми по Лебегу (или просто измеримыми).

В пространстве $\mathbf{R}^n$ могут быть определены и различные другие меры, однако в этой главе символ μ обозначает именно меру Лебега. Введенная мера μ σ – конечна, так как $\mathbf{R}^n$ представимо в виде счетного объединения ячеек с конечными объемами. Для всех множеств из пространства $\mathbf{R}^n$ определена внешняя мера μ^*, порожденная мерой v. Ее называют внешней мерой Лебега. При этом, по построению, мера μ является сужением меры μ^* на σ - алгебру Σ измеримых множеств.

Поскольку совокупность измеримых множеств является σ - алгеброй, то объединение и пересечение конечного или счетного множества измеримых множеств измеримо, разность двух измеримых множеств измерима, в частности дополнение к измеримому множеству до всего пространства $\mathcal{R}^n$ измеримо.

Из общих свойств меры вытекает, что если $E \subset \cup_k E_k$ (в частности $E = \cup_k E_k$), где все множества E_k и E измеримы, а объединение конечно или счетно, то $\mu E \leq \Sigma_k \mu E_k$ – счетная полуаддитивность меры. Если же $E = \cup_k E_k$, а E_k – дизъюнктны, то $\mu E = \Sigma_k \mu E_k$ – счетно-аддитивная мера.

Поскольку мера Лебега получена как стандартное распространение объема v, то она полна, то есть всякое подмножество множества меры 0 измеримо и тоже имеет меру 0.

Так как мера Лебега порождена внешней мерой, то для нее справедлив критерий μ^* - измеримости: если $E \subset \mathbf{R}^n$ и для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ два таких измеримых множества A и B, что $A \subset E \subset B$ и $\mu(B \setminus A) < \varepsilon$, то E тоже измеримо. В дальнейшем этот признак назовем критерием измеримости в пространстве $\mathbf{R}^n$.

По самому построению σ - алгебры измеримых множеств в нее входят все ячейки. При этом $\mu\Delta = v\Delta$ для любой ячейки Δ.

В дальнейшем будет полезно следующее замечание: если для произвольного множества $E \subset \mathcal{R}^n$ его пересечение с ячейками $\Delta_p = [-p, p)$, $p = 1, 2, ...,$ измеримо, хотя бы при всех достаточно больших p (а тогда оно будет измеримо и при всех p), то и множество E измеримо. Действительно, положим $E_p = E \cap_p \Delta_p$ и пусть E_p измеримо при всех $p \geq p_0$. Ясно, что $E = \cup_{p=p_0}^{\infty} E_p$ и потому E тоже измеримо.

Теорема 1. Каждое открытое множество и каждое замкнутое множество из $\mathcal{R}^n$ измеримы.

► Измеримость открытого множества вытекает из измеримости ячеек и Теоремы 1 п. 2.2. Поскольку каждое замкнутое множество есть дополнение к некоторому открытому множеству, то оно тоже измеримо. ◄

Теорема 2. Любой параллелепипед $\Delta \subset \mathcal{R}^n$ измерим, причем $\mu\Delta = v\Delta$.

► Измеримость открытых и замкнутых параллелепипедов вытекает из из предыдущей теоремы. Проверим, что их мера μ совпадает с объемом v.

Рассмотрим сначала открытый или замкнутый параллелепипед Δ с конечными ребрами. Возьмем $\forall\varepsilon > 0$. Подберем две ячейки Δ_1 и Δ_2, для которых выполнены условия: $\Delta_2 \subset \Delta \subset \Delta_1$ и $v\Delta_1 < v\Delta + \varepsilon$, а $v\Delta_2 > v\Delta - \varepsilon$. Тогда

$$v\Delta - \varepsilon < v\Delta_2 = \mu\Delta_2 \leq \mu\Delta \leq \mu\Delta_1 = v\Delta_1 < v\Delta + \varepsilon.$$

Отсюда следует $v\Delta - \varepsilon < \mu\Delta < v\Delta + \varepsilon$ и вследствие произвольности ε $\mu\Delta = v\Delta$.

Пусть теперь $\Delta =< a, b >$ – произвольный параллелепипед с конечными ребрами. Введем параллелепипеды $\Delta^0 = (a, b)$ и $\Delta^* = [a, b]$. Тогда $\Delta^0 \subset \Delta \subset \Delta^*$ и $\mu\Delta^0 = \mu\Delta^* = v\Delta$. Согласно свойству 3 п. 1.5 предыдущей Главы отсюда вытекает, что параллелепипед Δ измерим и $\mu\Delta = v\Delta$.

Наконец, пусть Δ – параллелепипед, имеющий бесконечное ребро. Положим $E_p = \Delta \cap \Delta_p$, где $\Delta_p = [-p, p)$ – ячейки, определенные раньше. При всех достаточно больших p параллелепипед и ячейки налегают друг на друга, а тогда их пересечение E_p – параллелепипед с конечными ребрами. Следовательно оно измеримо. Тогда, как отмечено выше, и параллелепипед Δ измерим. Ясно, что в Δ содержатся и некоторая ячейка Δ' с бесконечным ребром, и так как $\mu\Delta \geq \mu\Delta' = +\infty$, то и $\mu\Delta = +\infty$, то есть $\mu\Delta = v\Delta$. ◀

Теорема 3. Конечное или счетное множество точек из $\mathbf{R}^n$ измеримо и его мера равна 0.

▶ Множество, состоящее из одной точки замкнуто и потому измеримо. Так как точку можно поместить в параллелепипед сколь угодно малого объема, то ее мера равна нулю. Из измеримости одноточечных множеств вытекает измеримость любого конечного или счетного множества точек. Мера такого множества равна нулю как сумма мер одноточечных множеств. ◀

Определение 2. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется борелевым, если оно принадлежит σ - алгебре, порожденной совокупностью всех замкнутых множеств из $\mathcal{R}^n$.

Совокупность всех борелевых множеств из $\mathbf{R}^n$ обозначают символом $\mathbf{B}$. Тогда каждое замкнутое множество $F \subset \mathbf{B}$ по определению, каждое открытое множество $G \subset \mathbf{B}$, поскольку оно является дополнением к замкнутому множеству. Ясно, что σ - алгебра, порожденная совокупностью всех открытых множеств G из $\mathbf{R}^n$, совпадает с $\mathbf{B}$.

Среди борелевых множеств имеются множества значительно более сложной структуры, не принадлежащие к числу замкнутых или открытых множеств. Например, множество, представимое в виде счетного объединения замкнутых множеств (типа F_σ) будет борелевым. Аналогично, всякое множество, представимое в виде пересечения счетного множества открытых множеств (типа G_δ) тоже будет борелевым.

Теорема 4. Все борелевы множества из $\mathbf{R}^n$ измеримы.

► Совокупность $\mathbf{B}$ всех борелевых множеств из $\mathbf{R}^n$ – наименьшая σ - алгебра, содержащая все замкнутые множества из $\mathbf{R}^n$. Совокупность Σ всех измеримых множеств из $\mathbf{R}^n$ – тоже σ - алгебра, содержащая все замкнутые множества из $\mathbf{R}^n$. Следовательно $\mathbf{B} \subset \Sigma$. ◄

Замечание. Совокупность Σ измеримых множеств далеко не исчерпывается борелевыми множествами и существуют не борелевы измеримые множества. Этим подтверждается ранее сделанное замечание о том, что стандартное распространение меры может не быть минимальным. В пространстве $\mathbf{R}^n$ минимальным распространением объема v с полукольца ячеек было бы его распространение на σ - алгебру $\mathbf{B}$ борелевых множеств, то есть сужение меры Лебега на $\mathbf{B}$.

Теорема 5. Внешняя мера Лебега любого множества $E \subset \mathbf{R}^n$ равна нижней грани мер всевозможных открытых множеств G, содержащих множество E:

$$\mu^* E = \inf_{E \subset G} \mu G. \tag{1}$$

► Из монотонности внешней меры следует

$$\mu^* E \leq \mu G, \quad \text{если } E \subset G. \tag{2}$$

Поэтому, если $\mu^* E = +\infty$, то равенство (1) очевидно выполняется. Будем дальше считать, что $\mu^* E < +\infty$. Так как внешняя мера μ^* порождена объемом v, то по произвольному $\varepsilon > 0$ найдется такая не более чем счетная совокупность ячеек Δ_k, $k = 1, 2, ...$, что

$$E \subset \bigcup_k \Delta_k, \quad \sum_k v\Delta_k < \mu^* E + \varepsilon.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что все $v\Delta_k < +\infty$.

Для каждой ячейки Δ_k подберем открытый параллелепипед Δ_k^0 так, что $\Delta_k \subset \Delta_k^0$, а

$$\mu\Delta_k^0 < v\Delta_k + \varepsilon/2^k.$$

Положим $G = \cup_k \Delta_k^0$. Тогда множество G – открыто и $E \subset G$, а

$$\mu G \leq \sum_k \mu\Delta_k^0 < \sum_k v\Delta_k + \varepsilon < \mu^* E + 2\varepsilon.$$

Сопоставляя это с (2) и учитывая произвольность числа ε, заключаем, что равенство (1) справедливо. ◀

Следствие 1. Для всякого измеримого множества $E \subset \mathbf{R}^n$ и $\forall\varepsilon > 0$ существуют:

а) такое открытое множество $G \subset \mathbf{R}^n$, что $E \subset G$ и $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$;

б) такое замкнутое множество $F \subset \mathbf{R}^n$, что $F \subset E$ и $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$.

▶ а) Если $\mu E < +\infty$, то сформулированный в этом пункте результат непосредственно вытекает из Теоремы 5.

В общем случае положим

$$E_p = E \bigcap_p \Delta_p, \text{ где } \Delta_p = [-p, p).$$

По доказанной теореме существуют такие открытые множества G_p, что $E_p \subset G_p$ и $\mu(G_p \setminus E_p) < \varepsilon/2^p$. Пусть $G = \cup_{p=1}^{\infty} G_p$, тогда множество G – открытое, $E \subset G$, а

$$G \setminus E \subset \bigcup_{p=1}^{\infty} (G_p \setminus E_p),$$

Следовательно, $\mu(G \setminus E) < \varepsilon$.

б) Эта часть утверждения вытекает из предыдущего путем перехода к дополнениям множеств. Действительно, положим $E' = \mathbf{R}^n \setminus E$ и подберем открытое множество $G \subset \mathbf{R}^n$ так, что $E' \subset G$ и что $\mu(G \setminus E') < \varepsilon$. Множество $F = \mathbf{R}^n \setminus G$ – замкнутое; при этом $F \subset E$ и $E \setminus F = G \setminus E'$, следовательно $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$. ◀

Следствие 2. Мера любого измеримого множества $E \subset \mathbf{R}^n$ равна верхней грани мер всевозможных замкнутых множеств F, содержащихся в E:

$$\mu E = \sup_{F \subset E} \mu F. \tag{3}$$

▶ Аналогично (2) имеем

$$\mu F \leq \mu E, \quad \text{если } F \subset E. \tag{4}$$

Кроме того, если $\mu E < +\infty$, то по Следствию 1 существует замкнутое множество $F \subset E$ с мерой сколь угодно близкой к μE. Отсюда сразу вытекает формула (3).

Если же $\mu E = +\infty$, а F удовлетворяет условию б) из Следствия 1, то $\mu F = +\infty$ и формула (3) очевидна. ◀

Теорема 6. Для всякого измеримого множества $E \subset \mathbf{R}^n$ существуют такие два множества H типа F_σ и K типа G_δ, что

$$H \subset E \subset K, \quad \mu H = \mu E = \mu K \text{ и } \mu(K \setminus H) = 0.$$

▶ По Следствию 1 из Теоремы 5 п. а) для $\forall m \in \mathbf{N}$ существует такое открытое множество $G_m \supset E$, что $\mu(G_m \setminus E) < 1/m$. Положим $K = \cap_m G_m$, тогда множество K типа G_δ, $E \subset K$ и

$$\mu(K \setminus E) \leq \mu(G_m \setminus E) < 1/m \text{ при } \forall m.$$

Следовательно $\mu(K \setminus E) = 0$. Аналогично с помощью п. б) Следствия 1 устанавливается существование множества H типа F_σ, для которого $H \subset E$, а $\mu(E \setminus H) = 0$.

Отсюда следует

$$\mu(K \setminus H) = \mu(K \setminus E) + \mu(E \setminus H) = 0,$$

$$\mu E = \mu H + \mu(E \setminus H) = \mu H,$$

$$\mu K = \mu E + \mu(K \setminus E) = \mu E.$$

Таким образом из включения $H \subset E \subset K$ и равенства $\mu(K \setminus H) = 0$ равенство $\mu H = \mu E = \mu K$ вытекает автоматически. В то же время из равенства $\mu H = \mu K$ при $H \subset K$ равенство $\mu(K \setminus H) = 0$ выполняется только в случае $\mu H < +\infty$. ◀

Следствие 3. Попутно мы доказали, что всякое измеримое множество $E \subset \mathbf{R}^n$ представимо в виде объединения некоторого борелева множества типа F_σ и некоторого измеримого множества меры 0 или борелева множества типа G_δ и измеримого множества меры 0. То есть $E = H \cup (E \setminus H)$ и $K = E \cup (K \setminus E)$.

В заключение отметим без доказательства некоторые принципиальные факты. Движением в пространстве $\mathbf{R}^n$ называется всякое взаимно-однозначное отображение $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$, при котором расстояния между любыми двумя точками сохраняется. Множества E_1 и E_2 из $\mathbf{R}^n$ называются конгруэнтными, если одно из них является образом другого при движении. Можно доказать, что если два множества E_1 и E_2 конгруэнтны и одно из них измеримо, то и другое тоже измеримо, причем $\mu E_1 = \mu E_2$. Иными словами, мера Лебега инвариантна относительно движения.

Установлено, что в $\mathbf{R}^n$ существуют неизмеримые по Лебегу множества. Более того, доказано, что ни в одном из пространств $\mathbf{R}^n$ нельзя построить σ - конечную меру так, чтобы:

а) она была определена для всех множеств из $\mathbf{R}^n$;

б) была инвариантна относительно движения;

в) мера любого параллелепипеда совпадала с его объемом.

В этом утверждении крайне существенную роль играет то, что мы включили в определение меры требование счетной аддитивности. Если понятие меры несколько расширить и допустить, что мера может быть лишь конечно-аддитивной, то, как доказал С. Банах, в $\mathbf{R}^1$ и $\mathbf{R}^2$ будут существовать меры, обладающие свойствами а)-в). Однако при $n \geq 3$ в $\mathbf{R}^n$ не существует и конечно-аддитивной меры, удовлетворяющей условиям а)-в). Это доказал Хаусдорф.

ГЛАВА 3. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

В этой главе будет изучен класс функций, играющий важную роль при определении интеграла. Основное изложение будет проведено для функций на абстрактном множестве с мерой. При этом большая часть результатов устанавливается при произвольной мере, и лишь иногда нужно дополнительно предполагать полноту меры.

Поскольку мера Лебега в евклидовом пространстве $\mathcal{R}^n$ полна, все доказанное в этой главе для функций на абстрактном множестве справедливо и в $\mathcal{R}^n$.

3.1 Определение измеримых функций

Пусть X – произвольное множество, Σ – некоторая σ - алгебра его подмножеств и на Σ задана мера μ. Множества из Σ будем называть измеримыми. В частности, в качестве X может быть взято пространство $\mathcal{R}^n$, за Σ может быть принята σ - алгебра всех множеств, измеримых по Лебегу, а за μ – мера Лебега.

Будем сначала рассматривать вещественные функции с конечными значениями, областью задания которых может быть произвольное множество E из X. В дальнейшем, как правило, это множество будет измеримым.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве $E \subset X$; ее множествами Лебега называются все множества следующих четырех типов:
1) $E(f(x) > a)$, 2) $E(f(x) \geq a)$, 3) $E(f(x) < a)$, 4)$E(f(x) \leq a)$,
где a может быть любым вещественным числом.

Определение 2. Функция $f(x)$, заданная на множестве $E \subset X$, называется измеримой на этом множестве, точнее Σ – измеримой, если все ее множества Лебега в Определении 1 при любом a измеримы. Если $X = \mathcal{R}^n$, а Σ состоит из множеств, измеримых по Лебегу, то измеримые функции $f(x)$ называются измеримыми по Лебегу.

Заметим, что если функция f измерима на множестве E, то и само множество E измеримо. Это вытекает из очевидного равенства

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f(x) > -n), \tag{1}$$

поскольку множества, стоящие под знаком объединения, суть лебеговы множества первого типа функции $f(x)$.

Если функция $f(x)$ измерима на E, то и множество $E(f(x) = a)$ измеримо при всех a. Действительно, это множество представимо как пересечение двух измеримых множеств

$$E(f(x) = a) = E(f(x) \geq a) \bigcap E(f(x) \leq a).$$

Теорема 1. Если функция $f(x)$, заданная на множестве E, такова, что ее множества Лебега какого-нибудь одного типа измеримы при всех a, то эта функция измерима.

► Пусть лебеговы множества первого типа $E(f(x) > a)$ измеримы при всех a. Нужно доказать измеримость для функции $f(x)$ лебеговых множеств остальных трех типов.

Рассмотрим второе множество, записав его в виде

$$E(f(x) \geq a) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E(f(x) > a - \frac{1}{n}). \tag{2}$$

Действительно, включение левой части в правую очевидно. Если же x входит в пересечение, стоящее в правой части формулы (2), то $f(x) > a - 1/n$ при всех n, а тогда $f(x) \geq a$. Тем самым доказано включение правой части в левую, а вместе с ним и равенство (2). Из этого равенства и измеримости всех множеств Лебега первого типа функции $f(x)$ вытекает измеримость множества второго типа $E(f(x) \geq a)$.

Выше, с помощью формулы (1), из измеримости лебеговых множеств первого типа мы вывели измеримость самого множества E. Тогда измеримость лебеговых множеств третьего и четвертого типов вытекает из измеримости множеств первых двух типов на основании очевидных соотношений:

$$E(f(x) < a) = E \setminus E(f(x) \geq a),$$

$$E(f(x) \leq a) = E \setminus E(f(x) > a).$$

Аналогично доказывается измеримость функции $f(x)$, если допустить измеримость ее лебеговых множеств не первого, а какого-нибудь другого типа. При этом следует заметить, что измеримость множества E может быть выведена из измеримости лебеговых множеств других типов с помощью формул, аналогичных формуле (1). ◄

Если, например, известно, что измеримы все лебеговы множества четвертого типа, то нужно воспользоваться равенством

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f(x) \leq n).$$

Свойства измеримых функций

1^0. Если функция $f(x) = c = const$ на измеримом множестве E, то $f(x)$ измерима.

▶ Так как $f(x) = const$, то

$$E(f(x) > a) = \begin{cases} E \text{ при } a < c, \\ \varnothing \text{ при } a \geq c. \end{cases}.$$

Отсюда видно, что все множества Лебега первого типа функции $f(x)$ измеримы. Тогда по Теореме 1 функция $f(x)$ измерима. ◀

2^0. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то она измерима и на любом измеримом подмножестве $E' \subset E$.

▶ Для лебеговых множеств первого типа функции $f(x)$ на E' имеем

$$E'(f(x) > a) = E' \bigcap E(f(x) > a),$$

потому ясно, что они измеримы. ◀

3^0. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве E, которое равно конечному или счетному объединению множеств E_i ($E = \cup_i E_i$). Если функция $f(x)$ измерима на каждом множестве E_i, то она измерима и на E.

▶ При любом a имеем

$$E(f(x) > a) = \bigcup_i E_i(f(x) > a),$$

и так как каждое из множеств в правой части измеримо, то и их объединение измеримо. ◀

Частным случаем этого свойства является

4^0. Пусть $E = \cup_i E_i$, где все E_i, $i = 1, 2, ...$ измеримы. Если функция $f(x)$, заданная на E, принимает на каждом E_i постоянное значение, то $f(x)$ измерима на E.

► Действительно, это вытекает сразу из свойств 1^0 и 3^0. ◄

5^0. Если множество $E \subset X$ измеримо, то его характеристическая функция $h_E(x)$, определенная соотношением

$$h_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in E, \\ 0 \text{ при } x \in X \setminus E. \end{cases} .$$

тоже измерима на E.

► Это очевидно ввиду свойства 4^0. ◄

6^0. Если мера μ полна, то всякая функция $f(x)$, определенная на множестве E с $\mu E = 0$, измерима.

► Поскольку мера μ полна, то всякое подмножество множества E измеримо, а потому все лебеговы множества функции $f(x)$ измеримы. ◄

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна на замкнутом множестве $F \subset \mathcal{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы при любом вещественном a множества $F(f(x) \geq a)$ и $F(f(x) \leq a)$ были замкнутыми.

► а) Необходимость. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом множестве F и $E = F(f(x) \geq a)$, где a – фиксировано. Возьмем последовательность точек $x^{(m)} \in E$, имеющую предел $x^{(m)} \to x^0$. Так как F замкнуто, то $x^0 \in F$, а в силу непрерывности функции $f(x^{(m)}) \to f(x^0)$. Но $f(x^{(m)}) \geq a$ при всех m, следовательно, и $f(x^0) \geq a$, то есть $x^0 \in E$. Таким образом множество E замкнуто.

Аналогично доказывается замкнутость множества $F(f(x) \leq a)$.

б) Достаточность. Пусть $x^{(m)} \in F$, $m = 1, 2, ...$ и $x^{(m)} \to x^0$ (тогда $x^0 \in F$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и положим

$$E_1 = F(f(x) \geq f(x^0) + \varepsilon), \quad E_2 = F(f(x) \leq f(x^0) - \varepsilon).$$

По условию оба этих множества замкнуты, а тогда и их объединение $E = E_1 \cup E_2$ замкнуто. С другой стороны $x^0 \notin E$, (так определены множества E_1 и E_2), потому x^0 не может быть предельной точкой множества E. Это значит, что существует некоторая окрестность точки x^0: $B(x^0, \delta) \subset F$, не содержащая ни одной точки множества E. Но $x^{(m)} \in B(x^0, \delta)$ при всех $m \geq M$ и потому из определения множеств E_1 и E_2 следует

$$f(x^0) - \varepsilon < f(x^{(m)}) < f(x^0) + \varepsilon$$

Отсюда, благодаря произвольности ε, и вытекает, что $f(x^{(m)}) \to f(x^0)$. Непрерывность функции $f(x)$ доказана. ◀

Следствие 1. Если множества F_i, $i = 1, 2, ..., k$ замкнуты и дизъюнктны, а $F = \cup_{i=1}^{k} F_i$ и функция $f(x)$ задана на F и постоянна на каждом из F_i, то $f(x)$ непрерывна на F.

▶ Действительно, F как конечное объединение замкнутых множеств – замкнуто. Поскольку функция $f(x)$ постоянна на F_i, каждое из множеств $F(f(x) \geq a)$ и $F(f(x) \leq a$ при всех a или представляет объединение некоторых из F_i или пусто, а потому замкнуто. Следовательно функция $f(x)$ непрерывна на F. ◀

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом множестве $F \subset \mathbf{R}^n$, то она измерима по Лебегу на этом множестве.

▶ По Теореме 2, если функция $f(x)$ непрерывна на F, то все ее лебеговы множества второго типа замкнуты, а, следовательно, измеримы (Теорема 1 п. 2.3 предыдущей главы) и по Теореме 1 функция $f(x)$ измерима. ◀

Следствие 2. Функция $f(x)$, непрерывная на каком - нибудь измеримом множестве $E \subset \mathbf{R}^n$, измерима на E.

▶ Ранее было доказано, что всякое измеримое множество E представимо в виде объединения $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 – некоторое борелево множество (типа F_σ) и E_2 – некоторое измеримое множество с $\mu E_2 = 0$. Множество $E_1 = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$, где F_k – замкнуты. По доказанной теореме 3 функция $f(x)$ измерима на каждом F_k. Тогда ее измеримость на E_1 вытекает из Свойства 3^0. С другой стороны, функция $F(x)$ измерима на E_2 согласно Свойству 6^0. А тогда $f(x)$ измерима на E. ◀

При выводе простейших свойств измеримых функций, кроме свойства 6^0, использовано только то, что измеримые множества Σ образуют σ - алгебру, а значения меры μ при этом не играли роли. Поэтому при введении понятия измеримой функции достаточно предположить, что в множестве X выделена некоторая σ - алгебра Σ его подмножеств (которые названы измеримыми). Например, если в качестве множества X снова взять пространство $\mathbf{R}^n$, а в качестве

Σ σ - алгебру $\mathcal{B}$ всех борелевых множеств из $\mathbf{R}^n$, то Определение 2 приводит к понятию $\mathcal{B}$ – измеримых функций. Эти функции называют бэровскими, по имени французского математика Р. Бэра. Из Теоремы 4 п. 2.3 предыдущей главы следует, что все бэровские функции измеримы по Лебегу. Из доказательства Теоремы 1 легко видеть, что всякая функция, непрерывная на замкнутом множестве из $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{B}$ – измерима на этом множестве.

3.2 Арифметические действия над измеримыми функциями

Мы докажем, что арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над измеримыми функциями не выводят их из этого класса.

Лемма 1. Если функция $f(x)$ измерима на множестве $E \subset X$, то функции $kf(x)$, где $k - const$, $|\,f(x)|$ и $f^2(x)$ измеримы на E. Если, кроме того, $f(x) \neq 0$ на E, то и функция $1/f(x)$ измерима на E.

► а) Рассмотрим функцию $kf(x)$. Если $k = 0$, то $kf(x) = 0$, тем самым функция $kf(x)$ измерима как константа (измеримость множества E вытекает из измеримости функции $f(x)$). Если $k \neq 0$, то измеримость лебеговых множеств первого типа функции $kf(x)$ вытекает из измеримости лебеговых множеств функции $f(x)$ с помощью очевидных равенств:

$$E(kf(x) > a = E(f(x) > a/k) \text{ при } \; k > 0,$$

$$E(kf(x) > a = E(f(x) < a/k) \text{ при } \; k < 0.$$

б) Для функции $|\,f(x)|$ имеем:
$E(|\,f(x)| > a) = E$, если $a < 0$,
$E(|\,f(x)| > a) = E(f(x) > a) \cup E(f(x) < -a)$, если $a \geq 0$.
Отсюда и вытекает, что все лебеговы множества первого типа функции $|\,f(x)|$ измеримы.
в) Для лебеговых множеств первого типа функции $f^2(x)$ имеем:

$$E(f^2(x) > a) = \begin{cases} E, \text{ если } a < 0, \\ E(|\,f(x)| > \sqrt{a}), \text{ если} \, a \geq 0. \end{cases}$$

Так как функция $|\,f(x)|$ измерима, то все эти множества измеримы.

г) Пусть функция $f(x) \neq 0$ во всех точках множества E. Легко проверить:

$$E(\frac{1}{f(x)} > a) = \begin{cases} E(f(x) > 0) \cap E(f(x) < 1/a), \text{ если } a > 0, \\ E(f(x) > 0) \cup E(f(x) < 1/a), \text{ если } a < 0, \\ E(f(x) > 0), \text{ если } a = 0. \end{cases}$$

Во всех трех случаях лебеговы множества функции $1/f(x)$ измеримы. ◀

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, то функции $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g (в последнем случае $g(x) \neq 0$ на E) тоже измеримы.

▶ а) Перенумеруем все рациональные числа r_1, r_2,...,r_k,... Это возможно, так как множество рациональных чисел счетно. Докажем, что для любого вещественного числа a выполняется равенство:

$$E(f(x) + g(x) > a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{E(f(x) > a - r_k) \bigcap E(g(x) > r_k)\}. \qquad (1)$$

Пусть точка x принадлежит левой части (1). Это значит, что $f(x) + g(x) > a$ или $g(x) > a - f(x)$. Благодаря свойству плотности множества рациональных чисел, найдется такое r_k, что

$$a - f(x) < r_k < g(x).$$

Таким образом точка x входит в одно из множеств правой части, следовательно, она принадлежит правой части (1). Обратно, если точка x принадлежит правой части (1), то $f(x) > a - r_k$ и $g(x) > r_k$ при некотором k, следовательно, $f(x) + g(x) > a$, то есть точка x принадлежит левой части (1). Формула (1) доказана.

Измеримость функции $f(x) + g(x)$ вытекает сразу с помощью равенства (1) из измеримости лебеговых множеств функций $f(x)$ и $g(x)$.

б) Разность $f(x) - g(x)$ можно представить в виде $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)]$. По Лемме 1 функция $-g(x) = (-1) \cdot g(x)$ – измерима, а тогда и функция $f(x) - g(x)$ измерима как сумма двух измеримых функций.

в) Измеримость произведения доказывается с помощью равенства:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}\{[f(x) + g(x)]^2 - [f(x) - g(x)]^2\}.$$

Если учесть доказанное в а) и б), а также Лемму 1, то окажется $f(x) \cdot g(x)$ – измеримая функция.

г) Если $g(x) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$, при этом функция $1/g(x)$ измерима по Лемме 1 и измеримость частного следует из измеримости произведения измеримых функций. ◀

Следствие 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, то оба множества $A = E(f(x) = g(x))$ и $B = E(f(x) \neq g(x))$ измеримы.

▶ Функция $f(x) - g(x)$ измерима на E, тогда множество $A = E(f(x) - g(x) = 0)$ – измеримо. Множество $B = E \setminus A$ также измеримо. ◀

3.3 Предельный переход в классе измеримых функций

Мы докажем, что операция предельного перехода не выводит из класса измеримых функций.

Лемма 1. Если функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ измеримы на $E \subset X$ и существуют конечные верхние и нижние грани $h(x) = \sup_k f_k(x)$ и $g(x) = \inf_k f_k(x)$, то функции $h(x)$ и $g(x)$ измеримы на E.

▶ Измеримость множества $E(h(x) > a)$ вытекает из измеримости множеств $E(f_k(x) > a)$ при всех k и очевидного равенства $E(h(x) > a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f_k(x) > a)$. Аналогично, измеримость множества $E(g(x) < a)$ вытекает из измеримости множеств $E(f_k(x) < a)$ при всех k и равенства $E(g(x) < a) = \bigcup_{k=1}^{\infty} E(f_k(x) < a)$. А тогда и функции $h(x)$ и $g(x)$ измеримы. ◀

Теорема 1. Если $\{f_k(x)\}$, $k = 1, 2, ...$ – последовательность измеримых на $E \subset X$ функций и $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, то функция $f(x)$ также измерима на E.

▶ Введем на множестве E функции $\varphi_k(x) = \sup_k\{f_k(x), f_{k+1}(x), ...\}$, которые по Лемме 1 измеримы. Из сходимости последовательности $\{f_k(x)\}$ следует ограниченность последовательности $\{\varphi_k(x)\}$ в каждой точке $x \in E$. А тогда измеримость функции $f(x)$ следует с помощью той Леммы 1 из известного равенства: $f(x) = \inf_k\{\varphi_k(x)\}$. Докажем эту формулу. Последовательность $\{\varphi_k(x)\}$ не возрастает следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = \inf \varphi_k(x)$. Так как $f_k(x) \to f(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$: $f(x) - \varepsilon < f_k(x) < f(x) + \varepsilon$, $k > k_\varepsilon$, $f(x) - \varepsilon < \varphi_k(x) < f(x) + \varepsilon$, $f(x) - \varepsilon < \inf_k \varphi_k(x) < f(x) + \varepsilon$. ◀

Следствие 1. Если функции $u_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ измеримы на множестве E и для любого $x \in E$ ряд $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится, то сумма $S(x)$ измерима на E.

► Результат следует из Теоремы 1 п. 3.2 и Теоремы 1 этого параграфа, а также определения суммы ряда. ◄

Иногда возникает необходимость рассмотрения функций, которые могут принимать значения $\pm\infty$. Повторяя определения п. 3.1, мы можем ввести понятие измеримости и для таких функций. При этом в Определении 1 множества Лебега можно по-прежнему считать a – любым вещественным числом, не оговаривая, что оно может быть равно $\pm\infty$.

Тем не менее, если функция $f(x)$ измерима на E, то оба множества $E(f(x) = +\infty)$ и $E(f(x) = -\infty)$ измеримы. Это следует, например, для первого из них из очевидного равенства $E(f(x) = +\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(f(x) > n)$.

Легко проверить, что теоремы и другие предложения, установленные до сих пор, остаются в силе и для функций, допускающих бесконечные значения, с одной лишь оговоркой, что в тех случаях, когда речь идет о действиях над функциями, нужно чтобы эти действия имели смысл. Например, при сложении функций приходится требовать, чтобы не было точек, в которых функции имеют бесконечные значения разных знаков. Существенное исключение составляет лишь Теорема 1, в формулировке которой нужно предполагать, что множество, на котором задана рассматриваемая функция, измеримо. Дело в том, что хотя из измеримости функций с бесконечными значениями, как и раньше, следует измеримость множества E, но на этот раз, в отличие от функций с конечными значениями, измеримость множества E не вытекает из измеримости лебеговых множеств одного типа. Например, пусть функция $f(x)$ задана на измеримом множестве и равна на нем бесконечности. Для этого множества все его лебеговы множества первого типа пусты, а следовательно, измеримы. В дальнейшем мы не требуем, чтобы функции имели только конечные значения.

Классификация функций по Бэру

Если существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и функции $f_n(x)$ непрерывны, то функция $f(x)$ не обязательно непрерывна. Класс разрывных функций называется функциями 1-го класса по Бэру, если они являются пределами последовательностей непрерывных функций. Функции 1-го класса по Бэру – измеримы. Функции, которые не являются функциями 1-го класса по Бэру, но могут быть представлены как пределы последовательностей функций 1-го класса, называются функциями 2-го класса и т.д. Совокупность функций всех классов, называются бэровскими. Все бэровские функции измеримы.

3.4 Эквивалентные функции, сходимость почти всюду

Определение 1. Говорят, что некоторое утверждение справедливо почти всюду на множестве $E \subset X$, если множество точек, где оно нарушается, содержится в каком-нибудь множестве меры нуль.

Например, если $f_k(x) \to f(x)$ при $k \to \infty$ при всех $x \in E$, за исключением некоторого подмножества $E' \subset E$, причем $E' \subset E_0$ и $\mu E_0 = 0$, то говорят, что последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на E. Будем писать $f_k(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$. Если функция $f(x)$ задана на множестве $E \subset \mathcal{R}^n$ и множество точек разрыва функции $f(x)$ имеет меру нуль, то функцию $f(x)$ называют непрерывной почти всюду на множестве E.

Среди функций, допускающих бесконечные значения, особый интерес представляют функции, которые принимают бесконечные значения только на множестве меры нуль. Про такие функции говорят, что они конечны почти всюду. Если мера μ полна, то Определение 1 упрощается: термин почти всюду в E означает в этом случае для всех $x \in E$, за исключением некоторого подмножества $E' \subset E$ с мерой $\mu E' = 0$.

Определение 2. Две функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на множестве $E \subset X$, называются эквивалентными на этом множестве, если $f(x) = g(x)$ почти всюду на E, записывается $f \sim g$. Легко видеть, что отношение эквивалентности обладает свойством транзитивности: если $f \sim g$ на E, а $g \sim h$ на E, то и $f \sim h$ на E. Если у измеримой, почти всюду конечной функции заменить ее бесконечное значение какой-нибудь константой, то получится измеримая функция с конечными значениями, эквивалентная начальной.

Теорема 1. Если мера μ в множестве X полна, то эквивалентные функции измеримы или нет одновременно на $E \subset X$.

► Пусть $f \sim g$ и $f(x)$ измерима на $E \subset X$. Рассмотрим множества $E_1 = E(f(x) = g(x))$ и $E_2 = E(f(x) \neq g(x))$. По условию $\mu E_2 = 0$, тогда множество $E_1 = E \backslash E_2$ – измеримо. Следовательно, функция $f(x)$, а вместе с ней и функция

$g(x)$ измеримы на E_1. Кроме того, функция $g(x)$ измерима на E_2, так как $\mu E_2 = 0$, а потому $g(x)$ измерима на E. ◀

Замечание 1. Без полноты меры μ в X доказанная теорема не верна. Например, пусть $E \subset X$, $\mu E = 0$, а подмножество $E' \subset E$ не измеримо, тогда функция $f(x) = 1$, если $x \in E'$ и $f(x) = 0$, если $x \in E \setminus E'$, очевидно эквивалентна измеримой функции $g(x) \equiv 0$ на E, но функция $f(x)$ не измерима.

Теорема 2. Пусть мера μ полна в X. Если функции $f_k(x)$ и $f(x)$ заданы на множестве $E \subset X$, причем $f_k(x)$ измеримы на E и $f_k(x) \to f(x)$ почти всюду на E, то и функция $f(x)$ измерима на E.

▶ Пусть E_1 – совокупность всех точек из E, где $f_k(x) \to f(x)$, а $E_2 = E \setminus E_1$. Тогда E_2 измеримо и $\mu E_2 = 0$. Так как E – измеримо (все функции $f_k(x)$ измеримы на E), то и $E_1 = E \setminus E_2$ измеримо и, согласно свойству 2^0 п. 3.1 функции $f_k(x)$ измеримы на E_1. Следовательно, по Теореме 1 п. 3.3 функция $f(x)$ тоже измерима на E_1. Кроме того, функция $f(x)$ измерима на E_2, поскольку $\mu E_2 = 0$, а тогда функция $f(x)$ измерима и на множестве E. ◀

В частности, этот важный факт верен для функций, измеримых по Лебегу, в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$.

Замечание 2. Теорема 2 перестает быть верной, если отказаться от полноты меры.

3.5 Сходимость по мере

Для простоты изложения будем рассматривать функции с конечными значениями. Однако все изложенное ниже можно перенести на измеримые почти всюду конечные функции.

Определение 1. Пусть функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ и $f(x)$ измеримы на множестве $E \subset X$. Говорят, что последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится по мере на множестве E к функции $f(x)$, если для $\forall\, \varepsilon > 0$

$$\mu E(|\, f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon) \to 0,\ k \to \infty.$$

Измеримость этих множеств вытекает из равенств, установленных в п. 3.2. При этом важно, что не только функции $f_k(x)$, но и $f(x)$ предполагаются измеримыми.

В случае, если $\mu E < +\infty$, предыдущее условие означает, что множество точек из E_1, где $| f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$, имеет меру, которая при $k \to \infty$ становится сколь угодно близкой к мере всего множества E .

Определение сходимости по мере имеет смысл и для функций, почти всюду конечных. Однако в этом случае множество $E(| f_k(x) - f(x)| < \varepsilon)$ может не быть дополнением к $E(| f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$. Кроме этих подмножеств в E может содержаться еще непустое подмножество меры нуль, состоящее из точек, где разность $f_k(x) - f(x)$ не имеет смысла.

Для сходимости по мере используется обозначение $f_k \Longrightarrow f$.

Одна и та же последовательность $f_k(x)$ может сходиться по мере к разным функциям. Например, если $f_k(x) \Longrightarrow f(x)$, а $f \sim g$ и функция $g(x)$ измерима, то $f_k(x) \Longrightarrow g(x)$. Верно и обратное заключение, то есть справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если $f_k(x) \Longrightarrow f(x)$ и $f_k(x) \Longrightarrow g(x)$ на множестве E, то $f \sim g$ на E.

► Предварительно отметим следующее вспомогательное утверждение: если $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ на множестве E, то для $\forall\, \varepsilon > 0$

$$E(| f(x)| \geq \varepsilon) \subset E(| \varphi(x)| \geq \varepsilon/2) \cup E(| \psi(x)| \geq \varepsilon/2). \qquad (1)$$

Действительно, если $x \in E$ левой части (1), но не входит в правую часть, то $| \varphi(x)| < \varepsilon/2$ и $| \psi(x)| < \varepsilon/2$, а тогда $| f(x)| < \varepsilon$, то есть x не входит и в левую часть.

Обратимся к доказательству теоремы. Пусть $E' = E(f(x) \neq g(x))$, тогда $E' = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_p$, где $E_p = E(| f(x) - g(x)| \geq 1/p)$, $p = 1, 2, ...$ Положим еще

$$E'_{pk} = E(| f_k(x) - f(x)| \geq 1/2p),\ (p, k = 1, 2, ...).$$

$$E''_{pk} = E(| f_k(x) - g(x)| \geq 1/2p),\ (p, k = 1, 2, ...).$$

По формуле (1) $E_p \subset E'_{pk} \cup E''_{pk}$. Следовательно,

$$\mu E_p \leq \mu E'_{pk} + \mu E''_{pk} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

а потому $\mu E_p = 0$ при $\forall\, p$. Отсюда вытекает, что и $\mu E' = 0$, то есть $f \sim g$. ◄

Теперь приступим к выяснению соотношения между сходимостью по мере и сходимостью почти всюду.

Теорема 2 (А. Лебега). Если последовательность функций $\{f_k(x)\}$, измеримых на множестве E с $\mu E < +\infty$, сходится почти всюду на этом множестве к измеримой функции $f(x)$, то $f_k \Longrightarrow f$.

► Возьмем любое $\varepsilon > 0$

$$A_k = E(|\, f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon), \; k = 1, 2, ...$$

Нужно доказать, что $\mu A_k \to 0$, $k \to \infty$.

Пусть E' – совокупность всех тех точек из E, где последовательность $\{f_k(x)\}$ не стремится к $f(x)$. По условию E' содержится в множестве меры 0, (точнее $\mu E' = 0$ в данном случае). Введем множества

$$B_k = \bigcup_{p=k}^{\infty} A_p, \quad B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k.$$

Так как множества A_k измеримы (измеримы функции $|\, f_k - f|$), то множества B_k и B – измеримы. Докажем, что $B \subset E'$.

Действительно, если $x \in B$, то $x \in B_k$ при всех k. А тогда для $\forall\, k$ $\exists$ такое $p \leq k$, что $x \in A_p$. Т.о. существуют сколь угодно большие индексы p, для которых

$$|\, f_p(x) - f(x)| \geq \varepsilon,$$

и отсюда следует, что $f_k(x) \nrightarrow f(x)$ то есть $x \in E'$. Тем самым доказано, что $B \subset E'$, а тогда $\mu B = 0$.

Так как множества B_k образуют убывающую последовательность и $\mu B_k \leq \mu E < +\infty$, то $\mu B_k \to \mu B$, (Теорема 2 из п. 1.3), то есть $\mu B_k \to 0$. Но $A_k \subset B_k$, следовательно, $\mu A_k \leq \mu B_k$, а тогда $\mu A_k \to 0$. Теорема доказана. ◄

Замечание 1. Фактически мы доказали несколько более сильное утверждение: если $f_k(x) \to f(x)$ почти всюду на E с $\mu E < \infty$ (f_k и f измеримы), а

$$B_k = \bigcup_{p=k}^{\infty} E(|\, f_p(x) - f(x)| \geq \varepsilon),$$

где $\varepsilon > 0$, то $\mu B_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Замечание 2. Заключение, обратное к теореме Лебега, неверно: последовательность может сходиться по мере, но при этом не иметь предела ни в одной точке. Приведем пример в пространстве $\mathcal{R}^1$. Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на n равных частей и определены n функций:

$$\varphi_n^{(m)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } \frac{m-1}{n} \leq x \leq \frac{m}{n},\ m = \overline{1, n}; \\ 0 \text{ при всех прочих } x \text{ из } [0, 1]. \end{cases}$$

Беря $n = 1, 2, ..$, расположим все функции $\varphi_n^{(m)}$ в виде одной последовательности

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, \varphi_3^{(1)}, \varphi_3^{(2)}, \varphi_3^{(3)}, \ldots \tag{2}$$

Кроме того, пусть $f(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Так как

$$\mu E(\varphi_n^{(m)}(x) \neq f(x)) = 1/n,$$

то ясно, что последовательность (2) сходится к функции $f(x)$ по мере. В то же время для $\forall\, x \in [0, 1]$ в последовательности (2) встречаются как бесконечное множество функций, принимающих в этой точке значение 1, так и бесконечное множество функций, принимающих значение 0. Следовательно, последовательность (2) не имеет предела ни в одной точке.

Замечание 3. В Теореме 2 нельзя отбросить условие $\mu E < +\infty$, то есть на множестве E с $\mu E = +\infty$ из сходимости почти всюду не вытекает сходимость по мере. Это подтверждается следующим простым примером: пусть функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ определены на интервале $E = (0, +\infty) \subset \mathbf{R}^1$ так, что

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < x \leq k, \\ 1 \text{ при } x > k. \end{cases}$$

Тогда $f_k(x) \to 0$ при всех $x \in (0, +\infty)$, но $\mu E(f_k(x) = 1) = +\infty$ и потому последовательность $\{f_k(x)\}$ не сходится к функции $f(x) \equiv 0$ по мере (не выполнены условия Определения 1).

Теорема 3 (Ф. Рисс). Если последовательность $f_k(x) \Longrightarrow f(x)$ на множестве E, где все функции измеримы, то существует частичная последовательность $f_{k_i}(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E.

► Из $f_k(x) \Longrightarrow f(x)$ на E следует для $\forall\,\varepsilon > 0$

$$\mu E(|\,f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon) \to 0,\ k \to \infty$$

Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < +\infty$, (значит $\varepsilon_i \to 0$). Для каждого i подберем натуральное число k_i так, что

$$\mu E(|\,f_{k_i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_i) < \varepsilon_i$$

При этом можно считать $k_1 < k_2 < ....$ Таким образом построена частичная последовательность $\{f_{k_i}(x)\}$. Докажем, что $f_{k_i}(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E. Положим

$$E_p = \bigcup_{i=p}^{\infty} E(|\,f_{k_i}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_i), \quad E' = \bigcap_{p=1}^{\infty} E_p$$

Множества E_p образуют убывающую последовательность, по Теореме 2 п. 1.3 $\lim\limits_{p\to\infty} \mu E_p = \mu E'$. Так как $\mu E_p < \delta_p = \sum_{i=p}^{\infty} \varepsilon_i$, (остаточный член ряда), то $\mu E_p \to 0$, следовательно, $\mu E' = 0$.

Если $x \in E \setminus E'$, то $x \notin E_p$ при некотором p, тогда при $\forall\, i \geq p$ будет (последовательность $\{E_p\} \downarrow$)

$$|\,f_{k_i}(x) - f(x)| < \varepsilon_i$$

Поскольку $\varepsilon_i \to 0$, то $f_{k_i}(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E. ◄

3.6 Теоремы Егорова, Лузина и Фреше

Теорема 1 (Д.Ф. Егорова). Если функции $f_k(x)$ измеримы и почти всюду конечны на множестве $E \subset X$ с $\mu E < +\infty$ и последовательность $f_k(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E, где функция $f(x)$ измерима и почти всюду конечна, то для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, что $\mu E_\varepsilon < \varepsilon$ и $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве $E \setminus E_\varepsilon$.

► Из Теоремы Лебега следует, если $f_k(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E, то для $\forall\, \delta$ и

$$B_p = \bigcup_{k=p}^{\infty} E(|\, f_k(x) - f(x)| \geq \delta),$$

будет $\mu E_p \to 0$ при $p \to \infty$.

Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_i > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < +\infty$. Каждому натуральному i сопоставим натуральное число p_i такое, что

$$\mu B_{p_i} < \varepsilon_i, \quad \text{где } B_{p_i} = \bigcup_{k=p_i}^{\infty} E(|\, f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon_i).$$

Возьмем $\forall\, \varepsilon > 0$ и положим $E_\varepsilon = \bigcup_{i=i_0}^{\infty} B_{p_i}$, номер i_0 выбираем из условия $\sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$. Очевидно $E_\varepsilon \subset E$ и $\mu E_\varepsilon < \sum_{i=i_0}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$.

Остается доказать, что $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$ на $E \setminus E_\varepsilon$. Пусть $x \in E \setminus E_\varepsilon$, тогда $x \notin B_{p_i}$. Значит $x \notin E(|\, f_k(x) - f_(x)| \geq \varepsilon_i)$ при $k \geq p_i$, так что

$$|\, f_k(x) - f(x)| < \varepsilon_i \text{ при } k \geq p_i.$$

Тем более $|\, f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ при $k \geq p_i$ и $\forall\, x \in E \setminus E_\varepsilon$, ибо номер p_i зависит только от ε, но не от x. ◄

Данная теорема показывает, что для измеримых, почти всюду конечных функций, сходимость почти всюду "не очень сильно отличается от равномерной" .

Последующие результаты будут установлены специально для функций в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$. При этом μ будет означать меру Лебега.

Теорема 2 (Н.Н. Лузина). Если функция $f(x)$ измерима и почти всюду конечна на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$, то для $\forall\, \varepsilon > 0$ существует непрерывная на E функция $\varphi(x)$, что

$$\mu E(f(x) \neq \varphi(x)) < \varepsilon.$$

► Предварительно докажем, что для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $F \subset E$, что $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ и что сужение функции $f(x)$ на F непрерывно на этом множестве.

а) Сначала допустим, что функция $f(x)$ ограничена на множестве E, то есть $|\,f(x)| < M$. Возьмем $\forall\,\varepsilon > 0$, затем делим отрезок $[-M, M]$ на $2k$ равных частей. Точки деления обозначим

$$y_i = -M + \frac{iM}{k}, \quad i = \overline{0, 2k}$$

Введем множества

$$A_{ki} = E[y_{i-1} < f(x) \leq y_i], \quad i = \overline{0, 2k}.$$

Эти множества измеримы как пересечение множеств Лебега и дизъюнктны, а $E = \cup_{i=1}^{2k} A_{ki}$. Для каждого измеримого множества A_{ki} существует такое замкнутое множество $F_{ki} \subset A_{ki}$, что $\mu(A_{ki} \setminus F_{ki}) < \varepsilon/k2^{k+1}$. Пусть $F_k = \cup_{i=1}^{2k} F_{ki}$, тогда $E \setminus F_k = \cup_{i=1}^{2k}(A_{ki} \setminus F_{ki})$ и потому

$$\mu(E \setminus F_k) < \varepsilon/2^k. \tag{1}$$

Теперь определим на F_k функции $f_k(x)$, полагая $f_k(x) = y_i$ при $x \in F_{ki}$, $i = \overline{1, 2k}$. По Следствию 1 п. 3.1 функции $f_k(x)$ непрерывны на F_k. Кроме того, из определения множеств A_{k_i} следует, что при $\forall\,x \in F_k$

$$0 \leq f_k(x) - f(x) < M/k. \tag{2}$$

Положим $F = \cap_{k=1}^{\infty} F_k$, тогда $E \setminus F = \cup_{k=1}^{\infty}(E \setminus F_k)$ и по (1) $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$. Кроме того, для $\forall\,x \in F$ неравенство (2) справедливо при $\forall\,k$ и потому $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$ на F. Так как все функции $f_k(x)$ непрерывны на F, предельная функция $f(x)$ будет также непрерывна.

б) Пусть функция $f(x)$ почти всюду конечна на E. Введем функцию $g(x) = arctg f(x)$. Если считать, что $arctg(\pm\,\infty) = \pm\,\pi/2$, то функция $g(x)$ определена и ограничена на всем E. Для $\forall\,a \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$E[g(x) > a] = E[arctg\, f(x) > a] = E[f(x) > tg\, a].$$

Последнее множество измеримо как лебегово множество функции $f(x)$. Если $a = \pi/2$, то $E[g(x) > a] = \emptyset$; если $a = -\pi/2$, то

$$E[g(x) > a] = E[f(x) \neq -\infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f(x) > -n].$$

Если $a < -\pi/2$, то $E[g(x) > a] = E$. Таким образом функция $g(x)$ измерима, $|\,g(x)| \leq \pi/2$ на всем E и $|\,g(x)| < \pi/2$ почти всюду на E.

Теперь, по доказанному в а), выделим такое замкнутое множество $F \subset E$, что $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$ и сужение функции $g(x)$ на F непрерывно. Но $f(x) = tg\, g(x)$, а потому и сужение функции $f(x)$ на F непрерывно.

Поскольку функция $f(x)$ почти всюду конечна на E, множество $F \subset E$ можно выбрать так, что $f(x)$ будет конечна на F. ◄

Замечание. Можно доказать, что в условиях Теоремы 2 существует не только на E, но и во всем $\mathbf{R}^n$ функция $\varphi(x)$. Можно также доказать, что эта теорема допускает обращение. Таким образом, измеримые функции в $\mathbf{R}^n$ тесно связаны с непрерывными.

Как следствие из теоремы Лузина вытекает следующая теорема.

Теорема 3 (М. Фреше). Если функция $f(x)$ измерима и почти всюду конечна на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$, то существует такая последовательность функций $\{\varphi_k(x)\}$, непрерывных на всем $\mathbf{R}^n$, что $\varphi_k(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E.

► Зададим последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$. По Теореме Лузина для каждого i можно подобрать такую непрерывную функцию $g_i(x)$, что

$$\mu E[f(x) \neq g_i(x)] < \varepsilon_i.$$

Согласно Определению последовательность $g_i(x) \Longrightarrow f(x)$ на множестве E. По Теореме Рисса существует частичная последовательность $g_{i_k}(x)$, что $g_{i_k}(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E. Остается положить $\varphi_k(x) = g_{i_k}(x)$. ◄

ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ОТ ОГРАНИЧЕННОЙ ФУНКЦИИ

Классическое определение интеграла, данное О. Коши и развитое Б. Риманом, состоит в следующем. Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$. Возьмем разбиение отрезка с отмеченными точками (Q, ξ) и составим интегральную сумму Римана

$$\sigma(Q, \xi, f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Если существует конечный предел сумм σ при стремлении к нулю параметра разбиения $\lambda = \max\limits_k \{\Delta x_k = x_{k+1} - x_k\}$ и предел не зависит ни от способа разбиения Q, ни от выбора точек ξ_k, то этот предел называется интегралом Римана.

Для существования интеграла необходимо и достаточно, чтобы функция f была ограничена и непрерывна почти всюду на отрезке $[a, b]$. Это определение интеграла предполагает, что малым изменениям аргумента x отвечают малые изменения функции f, то есть функция f должна быть непрерывной или "почти" непрерывной. Даже очень простые ограниченные функции как, например, функция Дирихле, оказываются неинтегрируемыми по Риману. Желая обоб-

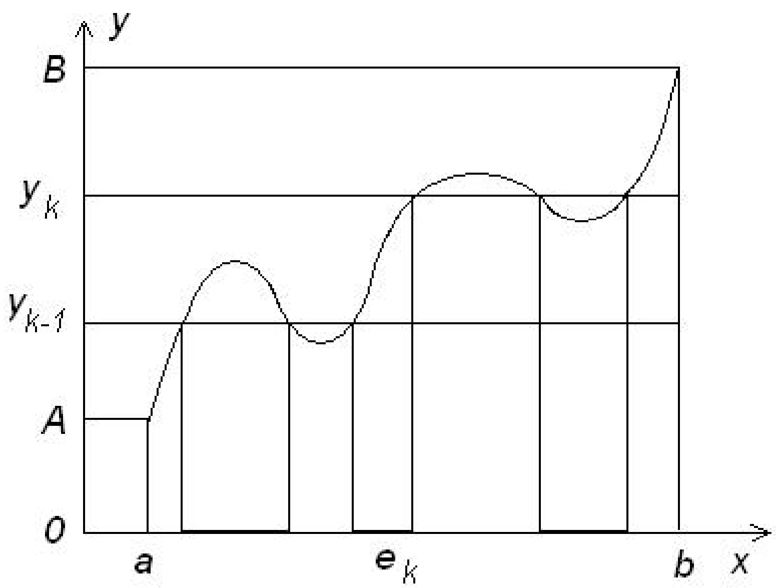

График функции

щить понятие интеграла на более широкие классы функций, Лебег предложил другой способ построения интеграла, в котором точки $x \in [a, b]$ объединяются в множества e_k не по принципу близости на оси $0x$ (по Риману $e_k = [x_k, x_{k+1}]$), а по признаку близости значений функции $f(x)$ на множестве e_k. С этой целью Лебег разбивает на части не отрезок $[a, b]$, то есть область изменения переменной, а отрезок $[A, B]$ — область значений функции $f(x): \ A \leq f(x) \leq B$.

Пусть $y = f(x)$ и $A \leq y \leq B$. Делим отрезок $[A, B]$ на n частей $A = y_0 < y_1 < ... < y_n = B$. Множества $e_k \subset E$, где $E = [a, b]$, определяются следующим образом: $e_k = E(y_{k-1} < f \leq y_k)$. Тогда различным точкам $x \in e_k$ отвечают близкие значения функции $f(x)$, хотя сами точки x могут быть весьма далеки друг от друга на оси $0x$. Легко проверить, что множества e_k ($k = \overline{1, n}$), попарно не пересекаются, эти множества измеримы, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} e_k, \ \mu E = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu e_k$.

Именно такой порядок: сначала разбивается промежуток значений функции, а уже по нему строится разбиение области задания функции, был положен Лебегом в основу определения интеграла.

В основу понятия нового типа интеграла естественно положить сумму вида $l = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \, \mu e_k$.

4.1 Определенный интеграл Лебега.

Введение понятия меры позволило А. Лебегу дать новое определение интеграла, при котором класс интегрируемых функций оказывается значительно шире.

В этой главе мы будем изучать интеграл Лебега в произвольном множестве X с мерой μ (множество с мерой будем называть пространством), но только для ограниченных функций и только по множествам конечной меры. Как и раньше, Σ — та σ – алгебра подмножеств из X, на которой задана мера μ, а множества из Σ называются измеримыми.

Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана на измеримом множестве $E \subset X$, причем $\mu E < +\infty$. Разобьем множество E произвольным образом на конечное число дизъюнктных измеримых множеств e_k, так что $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} e_k$, и положим

$$M_k = \sup_{x \in e_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in e_k} f(x), \quad k = \overline{1, n}.$$

Разбиение обозначим буквой Q. Составим две суммы

$$S(Q,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k\mu e_k, \quad s(Q,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k\mu e_k,$$

и назовем их верхней и нижней суммами Лебега-Дарбу соответственно.

Основные свойства сумм Лебега-Дарбу аналогичны свойствам сумм Римана-Дарбу. Рассмотрим два разбиения множества E: Q на множестве e_i и Q' на множестве e'_j. Будем говорить, что разбиение Q' мельче чем Q, если каждое e'_j содержится в некотором e_i, то есть множества e'_j получены дальнейшим дроблением множеств e_i.

1^o. Если разбиение Q' есть измельчение разбиения Q, то $S(Q')\le S(Q)$ и $s(Q')\ge s(Q)$.

► Так как переход от Q к Q' может быть осуществим постепенно, то достаточно проверить предложение 1^o в случае, когда Q' получается из Q разбиением одного из множеств e_i, например e_1, на две дизъюнкные части: e'_1 и e''_1. Положим

$$M'_1=\sup_{x\in e'_1} f(x), \quad M''_1=\sup_{x\in e''_1} f(x).$$

Тогда M'_1, $M''_2\le M_1$, а $\mu e_1=\mu e'_1+\mu e''_1$. Следовательно,

$$S(Q')=M'_1\mu e'_1+M''_1\mu e''_1+\sum_{i=2}^{n} M_i\mu e_i\le M_1(\mu e'_1+\mu e''_1)+\sum_{i=2}^{n} M_i\mu e_i=\sum_{i=1}^{n} M_i\mu e_i=S(Q),$$

то есть верхняя сумма Лебега-Дарбу не увеличивается при переходе от Q к Q'. Аналогично доказывается, что нижняя сумма не уменьшается. ◄

2^o. Любая нижняя сумма Лебега-Дарбу $s(Q')$ не превосходит любую верхнюю сумму Лебега-Дарбу $S(Q'')$, даже если они составлены для разных разбиений Q' и Q'' множества E.

► Неравенство $s(Q)\le S(Q)$ для сумм, составленное для одного и того же разбиения, очевидно. Пусть Q' и Q'' два различных разбиения множества E:

$$Q':\ E=\bigcup_{i=1}^{p} e'_i, \quad Q'':\ E=\bigcup_{j=1}^{q} e''_j.$$

Составим третье разбиение Q множества E из множеств $e_{ij}=e'_i\cap e''_j$ (пропуская при этом те e_{ij}, которые пусты). Тогда Q мельче, чем Q' и Q'', и согласно 1^o, $s(Q)\ge s(Q'')$, $S(Q)\le S(Q'')$. Но, так как $s(Q)\le S(Q)$, то $s(Q')\le S(Q'')$. ◄

Из свойства 2^o вытекает, что множество всех нижних сумм Лебега-Дарбу $s(Q)$, соответствующее всевозможным разбиениям множества E, ограничено сверху любой верхней суммой. Следовательно, существует $J_* = \sup\limits_Q s(Q, f) \leq S(Q, f)$. Аналогично, множество верхних сумм Лебега-Дарбу ограничено снизу любой нижней суммой и потому существует $J^* = \inf\limits_Q S(Q, f) \geq s(Q, f)$. Очевидно, $J_* \leq J^*$.

Определение 1. Функции f называется интегрируемой по Лебегу по мере μ на множестве E, если $J_* = J^*$, и в этом случае общее значение граней J_* и J^* называется интегралом Лебега функции f по множеству E и обозначается $(L)\int\limits_E f d\mu$ или $(L)\int\limits_E f(x) d\mu$.

Если E — отрезок $[a, b]$ из $\mathbf{R}^1$, а μ — мера Лебега, то употребляют и классическую запись интеграла $\int\limits_a^b f dx$ или $(L)\int\limits_a^b f(x)dx$.

Широкий класс интегрируемых функций дает следующая теорема.

Теорема 1. Если ограниченная функция f измерима на множестве E, то она интегрируема на E.

► При любом разбиении Q множества E

$$s(Q) \leq J_* \leq J^* \leq S(Q).$$

Поэтому, чтобы установить равенство $J_* = J^*$, достаточно показать, что существуют разбиения Q множества E, для которых верхняя и нижняя суммы Лебега-Дарбу сколь угодно близки друг к другу.

Пусть $A \leq f(x) \leq B$ для $\forall x \in E$ (A и B — конечные величины). Разобьем промежуток $[A,\ B]$ на конечное число участков с помощью точек $A = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = B$.

Далее введем множества $e_i = E(\lambda_{i-1} \leq f(x) < \lambda_i)$, $(i = \overline{1, n})$. Каждое из множеств e_i измеримо как пересечение двух лебеговых множеств функции $f(x)$, e_i — дизъюнктны и $E = \bigcup\limits_{i=1}^n e_i$. Отсюда, в частности, следует, что $\mu E = \sum\limits_{i=1}^n \mu e_i$. Обозначим через Q разбиение множества E с помощью множеств e_i (если некоторое из них пусты, мы их пропускаем). Тогда для каждого i $\lambda_{i-1} \leq m_i \leq M_i \leq \lambda_i$, где m_i, M_i — нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на e_i, и потому

$M_i - m_i \leq \lambda$, где $\lambda = \max\limits_i \{\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}\}$ $(i = \overline{1,n})$, а

$$S(Q) - s(Q) = \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i)\mu e_i \leq \lambda \sum_{i=1}^{p} \mu e_i = \lambda \mu E.$$

Вследствие произвольности λ, разность может быть сделана сколь угодно малой. ◀

Важнейшим частным случаем введенного понятия интеграла Лебега является интеграл от функций, заданных в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$, в котором в качестве μ выбрана мера Лебега (сам Лебег начинал построение интеграла в одномерном пространстве). Для функций в евклидовом пространстве из теоремы 1 с помощью теоремы об ограниченности непрерывной функции сразу выводится следствие.

Следствие 1. Если функция f непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $E \subset \mathbf{R}^n$, то она интегрируема по Лебегу на E.

▶ При доказательстве используется теорема об измеримости непрерывных функций. ◀

Следствие 2. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на ограниченном, замкнутом множестве $E \subset \mathbf{R}^n$, то она интегрируема по Лебегу на этом множестве и интегралы совпадают.

▶ Интеграл Римана заключен между нижней и верхней суммами Римана-Дарбу $s(Q, f) \leq (R) \int\limits_E f(x)dx \leq S(Q, f)$. Аналогично и интеграл Лебега также будет заключен между этими суммами, так как они представляют частный случай сумм Лебега-Дарбу. Так как для $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q:\ S(Q, f) - s(Q, f) < \varepsilon$, то $(L) \int = (R) \int$. ◀

Известно, что классический интеграл Римана от непрерывной функции по ограниченной замкнутой области D заключен между суммами Римана-Дарбу. Суммы Римана-Дарбу представляют частный случай сумм Лебега-Дарбу; они составляются по тому же принципу, но при этом используются разбиения области D не на произвольные измеримые подмножества, а на множества некоторого определенного вида (например, тоже области). Следовательно, интеграл Лебега от некоторой функции подавно заключен между суммами Дарбу. Но между суммами Дарбу для некоторой функции можно вставить лишь единственное число — ее интеграл Римана, а потому интегралы Лебега и Римана от непрерывной функции по ограниченной замкнутой области совпадают. К тому же заключению можно образом прийти для любой ограниченной функции, интегрируемой по Риману.

4.2 Простейшие свойства интеграла.

Перейдем к установлению некоторых свойств интеграла Лебега. Все функции, встречающиеся в дальнейшем под знаком интеграла, предполагаются ограниченными, измеримыми, а интегралы берутся по множествам конечной меры. Отметим, что если $\mu E = 0$, то любая ограниченная функция на E интегрируема на этом множестве. Это очевидным образом вытекает из определения интеграла. Условимся считать, что интеграл по пустому множеству от любой функции имеет смысл и равен нулю.

Теорема 1 (оценка интеграла). Если $A \leq f(x) \leq B$ и функция $f(x)$ измерима на множестве E, то

$$A\mu E \leq \int_E f(x)\, d\mu \leq B\mu E. \tag{1}$$

► Если под Q понимать разбиение множества E, составленное только из самого E, то $s(Q) = m\mu E,\ S(Q) = M\mu E$, где $m = \inf\limits_{x\in E} f(x),\ M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$. Но $A \leq m \leq M \leq B$, и потому

$$A\mu E \leq s(Q) \leq \int_E f d\mu \leq S(Q) \leq B\mu E. \quad ◄$$

Следствие 1. Если $f(x) \geq 0$ на E, то $\int\limits_E f(x)\, d\mu \geq 0$. Вытекает из формулы (1) при $A = 0$.

Следствие 2. Если $f(x) \equiv k$ на $E,\ k = const$, то $\int\limits_E f(x)\, d\mu = k\mu E$. Вытекает из формулы (1) при $A = B = k$.

Теорема 2 (счетная аддитивность интеграла). Пусть множество E представимо в виде конечного или счетного объединения дизъюнктных измеримых множеств E_k : $E = \bigcup\limits_k E_k$. Тогда для всякой функции $f(x)$, ограниченной и измеримой на множестве E,

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,d\mu. \qquad (2)$$

► Сначала покажем, что равенство (2) справедливо в случае, когда E разбито на два подмножества: $E = E_1 \cup E_2$, причем $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Возьмем произвольное разбиение Q множества E : $E = \bigcup\limits_{i=1}^{p} e_i$. Затем положим

$$e_i' = e_i \cap E_1, \quad e_i'' = e_i \cap E_2, \quad i = \overline{1,p},$$

и получим разбиения Q' и Q'' множеств E_1 и E_2, соответственно:

$$E_1 = \bigcup_i e_i', \quad E_2 = \bigcup_i e_i''$$

(те из e_i' и e_i'', которые пусты, отбрасываются). Тогда

$$s(Q') \le \int_{E_1} f(x)\,d\mu \le S(Q'), \quad s(Q'') \le \int_{E_2} f(x)\,d\mu \le S(Q''). \qquad (3)$$

Объединяя все множества e_i' и e_i'', получим новое разбиение Q^* множества E, которое мельче, чем Q. При этом

$$s(Q^*) = s(Q') + s(Q''), \quad S(Q^*) = S(Q') + S(Q'').$$

Отсюда и из неравенств (3), с учетом свойств сумм Лебега-Дарбу, находим, что

$$s(Q) \le s(Q^*) \le \int_{E_1} f(x)\,d\mu + \int_{E_2} f(x)\,d\mu \le S(Q^*) \le S(Q).$$

Интеграл $\int\limits_E f(x)\,d\mu$ также заключен между этими суммами. Так как суммы $s(Q)$ и $S(Q)$ можно сделать сколь угодно близкими выбором Q, то

$$\int_E f(x)\,d\mu = \int_{E_1} f(x)\,d\mu + \int_{E_2} f(x)\,d\mu.$$

теперь по индукции легко получить формулу (2) и в случае, когда E разбито на любое конечное число дизъюнктных измеримых множеств.

Переходим к случаю счетного объединения: $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Положим $H_p = \bigcup\limits_{k=p+1}^{\infty} E_k$. Тогда

$$E = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_p \cup H_p, \tag{4}$$

причем множества в правой части измеримы. Кроме того, $\mu H_p = \sum\limits_{k=p+1}^{\infty} \mu E_k$, то есть μH_p равна остатку сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu E_k = \mu E$. Поэтому $\mu H_p \to 0$.

Так как объединение в формуле (4) конечное, то, по уже доказанному,

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{p} \int_{E_k} f(x)\,d\mu + \int_{H_p} f(x)\,d\mu.$$

Из теоремы 1 следует, что $\int\limits_{H_p} f(x)\,d\mu \to 0$ при $p \to \infty$, а потому

$$\int_E f(x)\,d\mu = \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} \int_{E_k} f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,d\mu. \quad ◀$$

Доказанная терема означает, что интеграл $\int\limits_e f(x)\,d\mu$ есть счетно-аддитивная функция, определяемая на σ – алгебре Σ_E всех измеримых подмножеств $e \subset E$. Если же $f(x) \geq 0$ на E, то $\int\limits_e f(x)\,d\mu \geq 0$ для $\forall e \in \Sigma_E$, то есть этот интеграл представляет некоторую новую меру, заданную на Σ_E.

Следствие 1. Если $E = \bigcup\limits_{k=1}^{p} E_k$, причем E_k измеримы и дизъюнктны, а $f(x) = C_k$ на E_k, $(k = \overline{1,p},\ C_k = const)$, то

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{p} C_k \mu E_k.$$

▶ Это вытекает сразу из теоремы 2 и следствия 2 из теоремы 1. ◀

Следствие 2. Если $E = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m$, где множества E_m измеримы и образуют возрастающую последовательность, то

$$\int_E f(x)\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{E_m} f(x)\,d\mu.$$

▶ Это сразу следует из теоремы для счетно-аддитивной функции $f(A) = \lim\limits_{i\to\infty} f(A_i)$, если A_i образуют возрастающую последовательность (теорема 2 п. 1.3). ◀

Следствие 3. Если функция $f(x)$ ограничена и измерима на E, причем $f(x) \geq 0$, а измеримое множество $E' \subset E$, то

$$\int_{E'} f(x)\,d\mu \leq \int_E f(x)\,d\mu.$$

▶ Для доказательства достаточно рассмотреть интеграл как меру и вспомнить свойство монотонности меры. ◀

Теорема 3 (линейность интеграла). Для любых функций $f(x)$ и $g(x)$, ограниченных и измеримых на множестве E, и любой постоянной $c = const$

$$\int_E (f(x) \pm g(x))\,d\mu = \int_E f(x)\,d\mu \pm \int_E g(x)\,d\mu, \tag{5}$$

$$\int_E cf(x)\,d\mu = c\int_E f(x)\,d\mu. \tag{6}$$

▶ Проверим равенство (5) для суммы двух функций $h = f + g$. Пусть Q — произвольное разбиение множества E на дизъюнктные измеримые множества $e_i,\ E = \bigcup\limits_{i=1}^{p} e_i$,

$$m_i' = \inf_{x\in e_i} f(x), \quad m_i'' = \inf_{x\in e_i} g(x), \quad m_i = \inf_{x\in e_i} h(x),$$

$$M_i' = \sup_{x\in e_i} f(x), \quad M_i'' = \sup_{x\in e_i} g(x), \quad M_i = \sup_{x\in e_i} h(x).$$

Тогда $m_i' + m_i'' \le h(x) \le M_i' + M_i''$ при $x \in e_i$, и потому для $\forall i = \overline{1,p}:\ m_i \ge m_i' + m_i'',\ M_i \le M_i' + M_i''$. Далее имеем

$$\sum_{i=1}^{p} m_i'\mu e_i \le \int_E f(x)\,d\mu \le \sum_{i=1}^{p} M_i'\mu e_i,$$

$$\sum_{i=1}^{p} m_i''\mu e_i \le \int_E g(x)\,d\mu \le \sum_{i=1}^{p} M_i''\mu e_i.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{p}(m_i' + m_i'')\mu e_i \le \int_E f(x)\,d\mu + \int_E g(x)\,d\mu \le \sum_{i=1}^{p}(M_i' + M_i'')\mu e_i. \tag{7}$$

Одновременно

$$\sum_{i=1}^{p}(m_i' + m_i'')\mu e_i \le \sum_{i=1}^{p} m_i\mu e_i \le \int_E h(x)\,d\mu \le \sum_{i=1}^{p} M_i\mu e_i \le \sum_{i=1}^{p}(M_i' + M_i'')\mu e_i. \tag{8}$$

Так как крайние члены в неравенствах (7) и (8) могут быть сделаны за счет выбора разбиения Q сколь угодно близки друг к другу, то средние члены совпадают, и тем самым формула (5) для суммы двух функций доказана.

Переходим к доказательству формулы (6). Пусть сначала $c \ge 0$. Тогда

$$\int_E cf(x)\,d\mu = \sup_Q s(Q, cf) = \sup_Q cs(Q,f) = c\sup_Q s(Q,f) = c\int_E f(x)\,d\mu.$$

Если $c < 0$, то

$$\int_E cf(x)\,d\mu = \sup_Q s(Q, cf) = \sup_Q cS(Q, f) = c\inf_Q S(Q, f) = c\int_E f(x)\,d\mu.$$

Формула для разности двух функций $f - g$ следует из доказанного очевидным образом. ◀

Теорема 4. Для любой ограниченной измеримой функции $f(x)$ на множестве E

$$\Big|\int_E f(x)\,d\mu\Big| \le \int_E |\,f(x)|\,d\mu.$$

▶ Положим

$$E_1 = E(f(x) \ge 0), \quad E_2 = E(f(x) < 0).$$

Множества E_1 и E_2 измеримы, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E$. По свойству аддитивности интеграла,

$$\int_E f(x)\,d\mu = \int_{E_1} f(x)\,d\mu + \int_{E_2} f(x)\,d\mu = \int_{E_1} |\,f(x)|\,d\mu - \int_{E_2} |\,f(x)|\,d\mu.$$

Следовательно,

$$\Big|\int_E f(x)\,d\mu\Big| \le \int_{E_1} |\,f(x)|\,d\mu + \int_{E_2} |\,f(x)|\,d\mu = \int_E |f(x)|\,d\mu. \quad ◀$$

Теорема 5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и измеримы на множестве E и $f \sim g$, то

$$\int_E f(x)\,d\mu = \int_E g(x)\,d\mu. \tag{9}$$

▶ Положим

$$E_1 = E(f(x) \ne g(x)), \quad E_2 = E \setminus E_1.$$

По условию $\mu E_1 = 0$, а потому

$$\int_{E_1} f(x)\,d\mu = \int_{E_1} g(x)\,d\mu = 0.$$

С другой стороны, $f(x) = g(x)$ на E_2, и потому

$$\int_{E_2} f(x)\,d\mu = \int_{E_2} g(x)\,d\mu.$$

Отсюда, вследствие аддитивности интеграла, и вытекает равенство (9). ◀

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — иррац.,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — рацион.} \end{cases}$$

$f(x) \sim 1$, $(L)\int\limits_0^1 f(x)\,d\mu = (L)\int\limits_0^1 d\mu = 1$.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ — иррац.,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — рацион.} \end{cases}$$

$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,d\mu = (L)\int\limits_0^1 x\,d\mu = (R)\int\limits_0^1 x\,dx = \dfrac{1}{2}$.

Замечание. Доказанная теорема означает, что изменение значений подынтегральной функции на множестве меры нуль (без нарушения ограниченности) не влияет на величину интеграла. Следовательно, можно рассматривать интеграл $\int\limits_E f(x)\,d\mu$ и от измеримой ограниченной функции, которая задана лишь почти всюду на E, не уточняя, как именно функция доопределяется на остальной части множества E.

Следствия 1 и 2 из теоремы 1 могут быть усилены. Если $f(x) \geq 0$ почти всюду на E ($f(x)$ ограничена и измерима), то $\int\limits_E f(x)\,d\mu \geq 0$.

Аналогично, если $f(x) = k$ почти всюду на E, $k = const$, то $\int\limits_E f(x)\,d\mu = k\mu E$.

Теорема 6. Если функция $f(x)$ ограничена и измерима на E, $f(x) \geq 0$ почти всюду на E и $\int\limits_E f(x)\,d\mu = 0$, то $f \sim 0$.

► Пусть $E_1 = E(f(x) > 0)$, $E_2 = E(f(x) < 0)$, $E_3 = E(f(x) = 0)$. По условию $\mu E_2 = 0$, а потому и $\int\limits_{E_2} f(x)\,d\mu = 0$. Кроме того, $\int\limits_{E_3} f(x)\,d\mu = 0$, следовательно,

$$\int\limits_{E_1} f(x)\,d\mu = \int\limits_E f(x)\,d\mu = 0. \tag{10}$$

Положим $E_1 = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} H_m$, где $H_m = E\big(f(x) \geq \dfrac{1}{m}\big)$. Из оценки интеграла следует, что

$$\int_{H_m} f(x)\,d\mu \geq \frac{1}{m}\mu H_m \quad \text{при } \forall m.$$

С другой стороны, так как $f(x) > 0$ на всем E_1, то

$$\int_{E_1} f(x)\,d\mu \geq \int_{H_m} f\,d\mu,$$

а потому

$$\int_{E_1} f(x)d\mu \geq \frac{1}{m}\mu H_m.$$

Отсюда, в силу (10), вытекает, что $\mu H_m = 0$ при $\forall\, m$, следовательно, и $\mu E_1 = 0$. Таким образом, $\mu(E_1 \cup E_2) = 0$ а это и значит, что $f(x) \sim 0$. ◀

Теорема 7 (почленное интегрирование неравенства). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и измеримы на E и $f(x) \leq g(x)$ почти всюду на множестве E, то $\int\limits_E f(x)\, d\mu \leq \int\limits_E g(x)\, d\mu$.

▶ Так как $g(x) - f(x) \geq 0$ почти всюду на E, то

$$\int_E f(x)\, d\mu - \int_E g(x)\, d\mu = \int_E (g - f)\, d\mu \geq 0. \quad ◀$$

ГЛАВА 5 СУММИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

5.1 Расширение понятия интеграла Лебега

Определение суммируемой функции

В этом параграфе мы распространим понятие интеграла Лебега на случай, когда подынтегральная функция может быть неограниченной, а множество, по которому проводится интегрирование, может иметь бесконечную меру. По-прежнему рассматривается абстрактное множество X с мерой μ, заданной на σ – алгебре Σ измеримых множеств, причем меру μ будем предполагать σ – конечной. Сначала введем интеграл от неотрицательной функции.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ измерима и почти всюду конечна на множестве $E \subset X$. Рассмотрим всевозможные измеримые подмножества $e \subset E$, имеющие конечную меру и на которых функция $f(x)$ ограничена, и положим

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sup_e \int_e f(x)\,d\mu. \tag{1}$$

Если $\int_E f(x)\,d\mu < +\infty$, то функция $f(x)$ называется суммируемой по мере μ на множестве E.

Ясно, что если неотрицательная функция $f(x)$ ограничена, а $\mu E < +\infty$, то среди всех интегралов, входящих в правую часть формулы (1), есть наибольший, им является интеграл по множеству E. Следовательно, в этом случае интеграл от функции $f(x)$, определенный формулой (1), совпадает с интегралом, определенным ранее с помощью сумм Лебега-Дарбу. Таким образом, на множестве с конечной мерой всякая ограниченная неотрицательная измеримая функция суммируема. На множестве с бесконечной мерой ограниченная функция может уже не быть суммируемой. Например, если $f(x) \equiv c > 0$, $c = const$, а $\mu E = +\infty$, то $\int_E f(x)\,d\mu = +\infty$.

Из Определения 1 сразу вытекает, если множество $E' \subset E$ измеримо, то

$$\int_{E'} f(x)\,d\mu \le \int_E f(x)\,d\mu.$$

Следовательно, если функция $f(x)$ суммируема на E, то она суммируема и на E'. Если $\mu E = 0$, то всякая неотрицательная измеримая функция $f(x)$ суммируема на E и $\int_E f(x)\,d\mu = 0$. Действительно, в этом случае все интегралы, входящие в правую часть равенства (1), равны нулю, поскольку $\mu e = 0$, а потому и левая часть тоже обращается в 0. Если $f(x) \equiv 0$ на E, а E – произвольное измеримое множество, то $\int_E f(x)\,d\mu = 0$.

Дадим дополнение к Определению 1 суммируемой функции. Именно, определим интеграл и для функции $f(x) \geq 0$, которая измерима на множестве $E \subset X$, но $\mu E(f(x) = +\infty) > 0$. В этом случае будем по определению считать, что $\int_E f(x)\,d\mu = +\infty$.

Определение 2. Если функция $f(x)$ измерима на множестве $E \subset X$ и $f(x) \leq 0$, то полагаем

$$\int_E f(x)\,d\mu = -\int_E |\,f(x)|\,d\mu,$$

(интеграл в правой части определен выше). При этом функция $f(x)$ называется суммируемой, если интеграл имеет конечное значение, то есть, если функция $|\,f(x)|$ суммируема.

Понятие интеграла для функции, принимающей и положительные и отрицательные значения вводится следующим образом.

Определение 3. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве $E \subset X$. Разобъем E на два множества, полагая

$$E_1 = E(f(x) \geq 0), \quad E_2 = E(f(x) < 0).$$

Интеграл от функции $f(x)$ по множеству E определяется формулой

$$\int_E f(x)\,d\mu = \int_{E_1} f(x)\,d\mu + \int_{E_2} f(x)\,d\mu = \int_{E_1} |\,f(x)|\,d\mu - \int_{E_2} |\,f(x)|\,d\mu. \qquad (2)$$

Нужно иметь в виду, что формула (2) имеет смысл, если хоть один из интегралов конечен: $\int_{E_1} f(x)\,d\mu$ или $\int_{E_2} f(x)\,d\mu$. Если оба интеграла равны бесконечности, то интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$ лишен смысла.

Определение 4. Измеримая функция $f(x)$ называется суммируемой на множестве E, если она (или $|\,f(x)|$, что равносильно) суммируема на каждом из множеств E_1 и E_2, то есть если интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$ имеет конечное значение.

Ясно, что если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, то она суммируема и на любом его подмножестве. Если $\mu E = 0$, то любая измеримая функция $f(x)$, заданная на E, суммируема и $\int_E f(x)\,d\mu = 0$. Оба эти замечания вытекают из того, что такими же свойствами обладают неотрицательные функции.

Заметим, что если функция $f(x)$ ограничена и измерима на множестве E с конечной мерой, то поскольку ее интегралы по E_1 и E_2 имеют в этой главе те же значения, что и раньше, интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$, определенный формулой (2), совпадает с интегралом, определенным в предыдущей главе. Таким образом, если функция $f(x)$ ограничена и измерима на множестве E с $\mu E < +\infty$, то функция $f(x)$ суммируема на этом множестве.

Лемма 1 (счетная аддитивность интеграла от неотрицательной функции). Пусть множество E представимо в виде конечного или счетного объединения дизъюнктных измеримых множеств E_j : $E = \bigcup\limits_j E_j$. Тогда для любой функции $f(x) \geq 0$, измеримой на множестве E

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_j \int_{E_j} f(x)\,d\mu. \tag{3}$$

В частности, если множеств E_j — конечное число и функция $f(x)$ суммируема на каждом E_j, то она суммируема на E.

► Если хоть один из интегралов $\int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu = +\infty$, то и $\int\limits_E f(x)\,d\mu = +\infty$ и равенство (3) выполняется.

Пусть $\int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu < +\infty$. Возьмем $\forall\, e \subset E$ с $\mu e < +\infty$, на котором функция $f(x)$ ограничена, и положим $e_j = e \cap E_j$. Ввиду счетной аддитивности интеграла Лебега от ограниченной функции

$$\int\limits_e f(x)\,d\mu = \sum_j \int\limits_{e_j} f(x)\,d\mu \leq \sum_j \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu.$$

Переходя к sup по множествам $e \subset E$, получим

$$\int\limits_E f(x)\,d\mu \leq \sum_j \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu. \tag{4}$$

Докажем противоположное неравенство. Возьмем множества E_j, $j = \overline{1,k}$. Зададим $\forall\, \varepsilon > 0$ и для каждого $j = \overline{1,k}$ подберем измеримое множество $e_j \subset E_j$ с конечной мерой, на котором функция $f(x)$ ограничена, так что

$$\int\limits_{e_j} f(x)\,d\mu > \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu - \frac{\varepsilon}{k}.$$

Положим $e = \bigcup\limits_{j=1}^{k} e_j$, тогда $e \subset E$, $\mu e < +\infty$ и функция $f(x)$ ограничена на e. При этом

$$\int\limits_{e} f(x)\,d\mu > \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu - \varepsilon,$$

или

$$\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu < \int\limits_{e} f(x)\,d\mu + \varepsilon \leq \int\limits_{E} f(x)\,d\mu + \varepsilon.$$

Вследствие произвольности ε отсюда вытекает

$$\sum_{j=1}^{k} \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu \leq \int\limits_{E} f(x)\,d\mu.$$

Устремляя $k \to \infty$ в случае счетного числа множеств, приходим к неравенству

$$\sum_{j} \int\limits_{E_j} f(x)\,d\mu \leq \int\limits_{E} f(x)\,d\mu. \tag{5}$$

Из двух противоположных неравенств (4) и (5) получим (3). ◄

Из леммы 1 вытекает, что при определении интеграла от функции $f(x)$ с разными знаками, формулу (2) можно заменить равносильной формулой

$$\int\limits_{E} f(x)\,d\mu = \int\limits_{E} f_+(x)\,d\mu - \int\limits_{E} f_-(x)\,d\mu, \tag{6}$$

где

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} |f(x)|, & \text{если } f(x) \leq 0, \\ 0, & \text{если } f(x) > 0. \end{cases}$$

Измеримость функций $f_+(x)$ и $f_-(x)$ вытекает из измеримости функции $f(x)$ на E.

Лемма 2 (абсолютная непрерывность неотрицательной функции). Пусть функция $f(x) \geq 0$ и суммируема на E. Тогда для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, что $\int\limits_{E'} f(x)\,d\mu < \varepsilon$, если $E' \subset E$ и $\mu E' < \delta$.

► Для $\forall\, \varepsilon > 0$ на основании определения интеграла, подберем множество $e \subset E$ с $\mu e < +\infty$, на котором функция $f(x)$ ограничена и

$$\int\limits_{e} f(x)\,d\mu > \int\limits_{E} f(x)\,d\mu - \frac{\varepsilon}{2}.$$

По лемме 1
$$\int\limits_E f(x)\,d\mu = \int\limits_e f(x)\,d\mu + \int\limits_{E\setminus e} f(x)\,d\mu.$$
Следовательно,
$$\int\limits_{E\setminus e} f(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$
Пусть $0 \le f(x) < M$ на e. Положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2M}$, и пусть $E' \subset E$, а $\mu E' < \delta$. Множество E' представим в виде $E' = E_1 \cup E_2$, где $E_1 = E' \cap e$, $E_2 = E' \cap (E \setminus e)$. Тогда по теореме 1 п. 4.2
$$\int\limits_{E_1} f(x)\,d\mu \le M\mu E_1 \le M\mu E' < \frac{\varepsilon}{2},$$
а из (7) следует, что
$$\int\limits_{E_2} f(x)\,d\mu \le \int\limits_{E\setminus e} f(x)\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Таким образом $\int\limits_{E'} f(x)\,d\mu < \varepsilon$. ◀

5.2 Распространение простейших свойств интеграла

В этом параграфе мы покажем, что почти все результаты, полученные раньше для интегралов от ограниченных функций на множествах конечной меры, переносятся и на общий случай, то есть на интегралы от функций почти всюду конечных и по множествам с любой мерой.

Теорема 1. Для того, чтобы измеримая на множестве $E \subset X$ функция $f(x)$ была суммируема на этом множестве, необходимо и достаточно, чтобы функция $|\,f(x)|$ была суммируема на E.

▶ *Необходимость.* Если функция $f(x)$ суммируема на E, то по Определению 3 функция $|\,f(x)|$ суммируема на каждом из множеств $E_1 = E(f(x) \ge 0)$ и $E_2 = E(f(x) < 0)$. Тогда по Лемме 1 функция $|\,f(x)|$ суммируема на E.

Достаточность. Если функция $|f(x)|$ суммируема на E, то она суммируема на E_1 и E_2, то есть по Определению 4 функция $f(x)$ суммируема на E. ◀

Эта теорема означает, что каждая суммируемая функция оказывается и "абсолютно суммируемой". Тем самым в одномерном случае (то есть в $\mathcal{R}^1$) интеграл Лебега от неограниченных функций или по бесконечным промежуткам по своим свойствам существенно отличается от классического несобственного интеграла. Как известно, в классической теории несобственных интегралов функция, заданная в промежутке на прямой, может быть интегрируемой в несобственном смысле, не будучи при этом интегрируемой абсолютно (в пространстве $\mathcal{R}^n$, $n \geq 2$ это различие между интегралом Лебега и классическим несобственным интегралом отсутствует). Для абсолютно интегрируемой функции легко доказать, что классический несобственный интеграл в $\mathcal{R}^1$ совпадает с интегралом по мере Лебега.

Теорема 2. Если интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$ имеет смысл, то

$$|\int_E f(x)\,d\mu| \leq \int_E |\,f(x)|\,d\mu. \tag{1}$$

► Из формулы (2) п. 5.1 сразу следует

$$|\int_E f(x)\,d\mu| \leq \int_{E_1} |\,f(x)|\,d\mu + \int_{E_2} |\,f(x)|\,d\mu = \int_E |\,f(x)|\,d\mu. \blacktriangleleft$$

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ суммируема на множестве E. Тогда для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|\int_{E'} f(x)\,d\mu| < \varepsilon, \text{ если } E' \subset E \text{ и } \mu E' < \delta.$$

► Эта теорема вытекает из Леммы 2 для неотрицательной суммируемой функции и неравенства (1), поскольку из суммированности функции $f(x)$ следует суммируемость функции $|\,f(x)|$. ◄

Доказанное свойство интеграла от суммируемой функции называется его абсолютной непрерывностью.

Теорема 4 (счетная аддитивность интеграла). Пусть множество $E \subset X$ представимо в виде конечного или счетного объединения дизъюнктных множеств $E = \cup_k E_k$. Тогда:
а) если интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$ имеет смысл, то и каждый из интегралов $\int_{E_k} f(x)\,d\mu$ тоже имеет смысл и при этом

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,d\mu \tag{2}$$

б) если функция $f(x)$ суммируема на каждом множестве E_k, то для суммирования функции на E необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_k \int_{E_k} |\,f(x)|\,d\mu < +\infty. \tag{3}$$

В частности, условие (3) заведомо выполняется, если множество E разбито на конечное число множеств E_k, в этом случае из суммирования функции $f(x)$ на каждом E_k вытекает ее суммирование на всем E.

► а) Используем формулу (6) п.5.1. Так как интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$ имеет смысл, то хотя бы один из интегралов $\int_E f_+(x)\,d\mu$ или $\int_E f_-(x)\,d\mu$ конечен. Пусть это будет второй из них, то есть функция $f_-(x)$ суммируема на E. Тогда эта функция суммируема и на каждом E_k, следовательно все интегралы $\int_{E_k} f(x)\,d\mu$ имеют смысл (следует из (6) п. 5.1). При этом каждый из них может иметь конечное значение или быть равен $+\infty$. Тогда и интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$ или конечен, или равен $+\infty$. С помощью Леммы 1 получаем следующие равенства

$$\int_E f(x)\,d\mu = \int_E f_+(x)\,d\mu - \int_E f_-(x)\,d\mu =$$

$$= \sum_k \int_{E_k} f_+(x)\,d\mu - \sum_k \int_{E_k} f_-(x)\,d\mu = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,d\mu,$$

из которых следует равенство (2).

б) По Лемме 1 имеем

$$\int_E |\,f(x)|\,d\mu = \sum_k \int_{E_k} |\,f(x)|\,d\mu.$$

Поэтому условие (3) означает суммирование функции $|\,f(x)|$ на множестве E, что равносильно суммированию функции $f(x)$ на E. ◄

Следствие 1. Если $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, где множества E_k измеримы и дизъюнктны, а $\mu E < +\infty$ для $\forall\, k$ и $f(x) = c_k$ на E_k, $c_k = const$, причем $\sum_{k=1}^{\infty} |\,c_k|\,\mu E_k < +\infty$, то функция $f(x)$ суммируема на E и

$$\int_E f(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu E_k.$$

► Следствие вытекает из обеих частей Теоремы 4 ◄

Отметим, что в условии (3) нельзя интегралы от функции $|\,f(x)|$ заменить на интегралы от функции $f(x)$ и потребовать, чтобы в случае бесконечного множества слагаемых ряд $\sum_k \int_{E_k} f(x)\,d\mu$ сходился. Это подтверждает следующий пример: пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $(0,1]$, причем $f(x) = (-1)^n n$ при $\dfrac{1}{n+1} < x \le \dfrac{1}{n}$. Тогда $\int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} f(x)\,d\mu = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, μ – мера Лебега, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ сходится. В то же время

$$\int\limits_0^1 |\,f(x)|\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=+\infty.$$

Можно доказать также, что абсолютной сходимости ряда из интегралов $\int_{E_k} f(x)\,d\mu$ в условии (3) тоже было бы недостаточно.

Следствие 2. Из Теоремы 4 вытекает, что если множества E_k образуют возрастающую последовательность, $E=\bigcup_k E_k$, а интеграл $\int_E f(x)\,d\mu$ имеет смысл, то

$$\int_E f(x)\,d\mu=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\,d\mu.$$

Теорема 5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, $f\sim g$ и хоть один из интегралов $\int_E f(x)\,d\mu$ или $\int_E g(x)\,d\mu$ имеет смысл, то и другой интеграл имеет смысл и при этом

$$\int_E f(x)\,d\mu=\int_E g(x)\,d\mu$$

В частности, если функция $f(x)$ суммируема, то и функция $g(x)$ суммируема.

► Если $f\sim g$, то $f_+\sim g_+$ и $f_-\sim g_-$, и по свойству неотрицательных функций

$$\int_E f_+(x)\,d\mu=\int_E g_+(x)\,d\mu,\quad \int_E f_-(x)\,d\mu=\int_E g_-(x)\,d\mu$$

(доказывается точно также как Теорема 5 п. 4.2). Отсюда следует, что интегралы $\int_E f(x)\,d\mu$ и $\int_E g(x)\,d\mu$ имеют смысл лишь одновременно и при этом они равны. ◄

Теорема 6. Если функция $f(x)\geq 0$ почти всюду на E и $\int_E f(x)\,d\mu=0$, то $f(x)\sim 0$.

► Доказательство такое же как и Теоремы 6 п. 4.2 для ограниченной функции. ◄

Теорема 7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E, функция $g(x)$ суммируема на E, а $|\,f(x)|\leq g(x)$ почти всюду на E, то функция $f(x)$ тоже суммируема, при этом

$$|\int_E f(x)\,d\mu|\leq\int_E g(x)\,d\mu.$$

► Без доказательства. ◄

Теорема 8. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы на множестве E, то функции $(f(x) \pm g(x))$ и $cf(x)$ тоже суммируемы, $c = const$. При этом

$$\int_E (f(x) \pm g(x))\, d\mu = \int_E f(x),\mu \pm \int_E g(x)\, d\mu,$$

$$\int_E cf(x)\, d\mu = c \int_E f(x)\, d\mu$$

► Без доказательства. ◄

Теорема 9. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ суммируемы на множестве E и $f(x) \leq g(x)$ почти всюду на E, то

$$\int_E f(x)\, d\mu \leq \int_E g(x)\, d\mu.$$

► Без доказательства. ◄

5.3 Предельный переход под знаком интеграла

Пусть на множестве $E \subset X$ с $\mu E < +\infty$ задана последовательность ограниченных измеримых функций $\{f_k(x)\}$, $k = 1, 2, ...$ и $f_k(x) \rightrightarrows f(x)$, где функция $f(x)$ ограничена и измерима. Если выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, d\mu = \int_E f(x)\, d\mu, \tag{1}$$

то говорят, что для последовательности $\{f_k(x)\}$ на E допустим предельный переход под знаком интеграла.

Предельный переход может не иметь места, даже если $f_k(x) \to f(x)$ при $\forall x \in E$. Например, рассмотрим последовательность функций на интервале $(0, 1)$

$$f_k(x) = \begin{cases} k, & \text{при } 0 < x < 1/k, \\ 0, & \text{при } 1/k \leq x < 1. \end{cases}$$

Тогда $f_k(x) \to 0$ при $\forall x \in (0, 1)$, то есть $f(x) \equiv 0$. В то же время по Следствию 1 из Теоремы 4 о счетной аддитивности интеграла

$$\int_0^1 f_k(x)\, d\mu = \int_0^{1/k} k\, d\mu + \int_{1/k}^1 0\, d\mu = k\frac{1}{k} = 1$$

и соотношение (1) не выполняется.

Сформулируем теорему, дающую достаточное условие предельного перехода под знаком интеграла.

Теорема 1 (А. Лебега). Пусть на множестве $E \subset X$ задана последовательность суммируемых функций $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$, которая сходится по мере к некоторой функции $f(x)$: $f_k(x) \Longrightarrow f(x)$. Если существует такая неотрицательная суммируемая функция $\varphi(x)$, что $|\, f_k(x)| \le \varphi(x)$ при $\forall k$ и почти всех $x \in E$, то функция $f(x)$ тоже суммируема на E и

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\, d\mu = \int_E f(x)\, d\mu, \tag{2}$$

► По теореме Рисса существует подпоследовательность $\{f_{k_i}(x)\}$, которая сходится к функции $f(x)$ почти всюду на E. А тогда ясно, что $|\, f(x)| \le \varphi(x)$ почти всюду на E и по Теореме 7 п.5.2 функция $f(x)$ суммируема.

Зададим $\forall \varepsilon > 0$. Из определения интеграла следует, что найдется такое множество $E' \subset E$ с $\mu E' < +\infty$, что

$$\int_{E\setminus E'} \varphi(x)\, d\mu < \frac{1}{6}\varepsilon, \tag{3}$$

(если $\mu E < +\infty$, то берем $E' = E$). Далее, по Теореме 3 п. 5.2 для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\int_{E''} \varphi(x)\, d\mu < \frac{1}{6}\varepsilon$, если $E'' \subset E$ и $\mu E'' < \delta$. Выберем $\eta > 0$ так, что $\eta \mu E' \le \frac{1}{3}\varepsilon$. Из определения сходимости по мере следует, что существует такой номер K, что при всех $k \ge K$

$$\mu E'(|\, f_k(x) - f(x)| \ge \eta) < \delta$$

Для каждого k множество E разобъем на три подмножества: $E_1 = E \setminus E'$, $E_2 = E'(|\, f_k(x) - f(x)| \ge \eta)$, $E_3 = E'(|\, f_k(x) - f(x)| < \eta)$.

Так как $|\, f_k(x) - f(x)| \le \varphi(x)$ почти всюду на E, то по (3) и Теореме 7 п. 5.2 при всех $k = 1, 2, ...$

$$|\int_{E_1} (f_k(x) - f(x))\, d\mu| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Если $k \ge K$, то $\mu E_2 < \delta$, а тогда, по выбору δ,

$$|\int_{E_2} (f_k(x) - f(x))\, d\mu| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Наконец, при всех k

$$|\int_{E_3} (f_k(x) - f(x)\, d\mu| \le \eta \mu E_3 \le \eta \mu E' < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Таким образом,
$$|\int_E f_k(x)\,d\mu - \int_E f(x)\,d\mu| < \varepsilon.$$
при $k \geq K$, что и доказывает равенство (2). ◀

Замечание 1. Так как переход в подынтегральном выражении к эквивалентной функции не влияет на величину интеграла, можно считать, что функции $f_k(x)$ и $f(x)$ имеют во всех точках конечные значения. Это замечание не имеет принципиального значения, так как сходимость по мере можно рассматривать и без этого ограничения.

Замечание 2. Из доказательства теоремы Лебега видно, что она остается в силе, если в ее формулировке сходимость по мере заменить на сходимость почти всюду (к измеримой функции). Действительно, в доказательстве теоремы достаточно использовать сходимость по мере на некотором множестве E' с $\mu E' < +\infty$ и при этом условии сходимость почти всюду влечет сходимость по мере.

Следствие 1. Пусть функции $f_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ ограничены и измеримы на множестве $E \subset X$ с $\mu E < +\infty$ и существует такая $const\ M > 0$, что $|\,f_k(x)| \leq M$ при $\forall\, k$ и почти всех $x \in E$. Если $f_k(x) \Longrightarrow f(x)$ на E (в частности, если $f_k(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$), причем функция $f(x)$ ограничена на множестве E, то справедливо соотношение (2).

Для монотонных последовательностей можно доказать более сильную теорему. Ниже она сформулирована для последовательности неотрицательных функций.

Теорема 2 (Б. Леви) Если функции $f_k(x) \geq 0$, $k = 1, 2, ...$ измеримы на множестве E и образуют неубывающую последовательность $(f_k(x) \leq f_{k+1}(x))$, причем $f_k(x) \to f(x)$ при $\forall\, x \in E$, а функция $f(x)$ почти всюду конечна на E, то имеет место равенство (2).

▶ Так как функции $f_k(x) \geq 0$, а последовательность $\{f_k(x)\} \uparrow$, то и последовательность интегралов $\{\int_E f_k(x)\,d\mu\} \uparrow$, кроме того $\int_E f_k(x)\,d\mu \leq \int_E f(x)\,d\mu$ при $\forall\, k$. Следовательно $\lim\limits_{k\to\infty} \int_E f_k(x)\,d\mu \leq \int_E f(x)\,d\mu$.

Чтобы получить обратное неравенство, возьмем любое измеримое множество $e \subset E$ с $\mu e < +\infty$, на котором функция $f(x)$ ограничена. По теореме

Лебега

$$\int_e f(x)\,d\mu = \lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\,d\mu \le \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,d\mu$$

Переходя в левой части к sup по множествам e, получим

$$\int_E f(x)\,d\mu \le \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\,d\mu$$

Равенство (2) доказано. ◀

Замечание. В теореме Леви можно отказаться от требования, чтобы функция $f(x)$ была почти всюду конечна на E.

Теорема 3 (П. Фату). Если на множестве E задана последовательность измеримых, почти всюду конечных функций $f_k(x) \ge 0$, которая сходится по мере к некоторой почти всюду конечной функции $f_k(x) \Longrightarrow f(x)$, тогда

$$\int_E f(x)\,d\mu \le \sup_k \int_E f_k(x)\,d\mu \tag{4}$$

Это соотношение несколько более слабое, чем (2).

▶ На основании теоремы Рисса из последовательности $\{f_k(x)\}$ выделим частичную последовательность $f_{k_i}(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E. Не умаляя общности можно считать, что уже $f_k(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E. Функция $f(x) \ge 0$ почти всюду на E, за счет перехода к эквивалентной функции можно допустить, что $f(x) \ge 0$ всюду на E.

Введем функции

$$g_k(x) = \min\{f_k(x), f(x)\},\ k = 1, 2, ...$$

Они измеримы, поскольку измеримы функции $f_k(x)$ и $f(x)$, очевидно $g_k(x) \le f_k(x)$ и $g_k(x) \xrightarrow{\text{п.в.}} f(x)$ на E.

Рассмотрим два случая. Пусть сначала функция $f(x)$ суммируема на E. Тогда по теореме Лебега и замечанию к ней

$$\int_E g_k(x)\,d\mu \to \int_E f(x)\,d\mu$$

Но $\int_E f_k(x)\,d\mu \ge \int_E g_k(x)\,d\mu$ при $\forall\, k$ и потому

$$\sup_k \int_E f_k(x)\,d\mu \ge \int_E g_k(x)\,d\mu$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим (4).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ не суммируема на E. Выделим подмножество $e \subset E$ с конечной мерой на котором функция $f(x)$ ограничена. По уже доказанному

$$\sup_k \int_E f_k(x)\, d\mu \geq \sup_k \int_e f_k(x)\, d\mu \geq \int_e f(x)\, d\mu$$

Переходя в правой части к верхней грани по множествам e, получим (4). ◄

5.4 Повторные интегралы. Теорема Фубини

Условимся обозначать меру Лебега в пространстве $\mathcal{R}^n$ через μ_n. Если $(\cdot)y = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \xi_{n+1}) \in \mathcal{R}^{n+1}$, то ее проекцией в пространство $\mathcal{R}^n$ будем называть $(\cdot)x = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathcal{R}^n$, определяемую первыми n координатами $(\cdot)y$. Обобщая понятие криволинейной трапеции, введем следующее определение.

Определение 1. Пусть функция $f(x) \geq 0$ на множестве $E \subset \mathcal{R}^n$. Ее подграфиком на этом множестве называется совокупность Q всех таких $(\cdot)y = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, \xi_{n+1}) \in \mathcal{R}^{n+1}$, что если $x = (\xi_1, ..., \xi_n)$ – проекция $(\cdot)y$ в $\mathcal{R}^n$, то:
а) $x \in E$, б) $0 \leq \xi_{n+1} \leq f(x)$.

Иными словами, над каждым $x \in E$ "надстраивается в направлении $(n+1)$ оси отрезок $[0, f(x)]$" и под Q понимается объединение множеств точек всех этих отрезков.

Теорема 1. Если функция $f(x) \geq 0$ и измерима на множестве $E \subset \mathcal{R}^n$, то ее подграфик Q на этом множестве – измеримое множество в $\mathcal{R}^{n+1}$, причем

$$\mu_{n+1} Q = \int_E f(x)\, d\mu_n. \tag{1}$$

► Без доказательства. ◄

Эта теорема дает геометрический смысл интеграла Лебега в евклидовом пространстве $\mathbf{R^n}$.

Интегралы Лебега по множествам, лежащим в многомерных пространствах, как и в классическом анализе, могут вычисляться с помощью сведения их к повторным интегралам. Окончательный результат в этом направлении имеет в теории интеграла Лебега более законченный вид, чем для интеграла Римана.

Рассмотрим вопрос о вычислении меры множества с помощью интегрирования меры его сечений. Для упрощения записей будем вести основное рассуждение для множества, лежащего в двумерном пространстве $\mathcal{R}^2$. Позже будет указан способ, которым полученные результаты переносятся в пространство $\mathcal{R}^n$, $n > 2$.

Рассмотрим множество $E \subset \mathcal{R}^2$. Для каждого фиксированного числа ξ_1 обозначим через $E(\xi_1)$ множество всех чисел ξ_2, для которых $(\cdot)x = (\xi_1, \xi_2) \in E$, то есть $E(\xi_1)$ есть сечения множества E прямыми $\xi_1 = const$, (точнее, это проекции сечений на ось ξ_2). Множества $E(\xi_1)$ мы будем рассматривать как линейные, то есть как множества на прямой, и, говоря об их мере, мы будем иметь в виду меру в пространстве $\mathcal{R}^1$.

Теорема 2. Если множество $E \subset \mathcal{R}^2$ измеримо и $\mu_2 E < +\infty$, то для почти всех ξ_1 сечения $E(\xi_1)$ — измеримые линейные множества с конечной мерой, функция $\mu_1 E(\xi_1)$ измерима на $\mathcal{R}^1$ и

$$\mu_2 E = \int_{\mathcal{R}^1} \mu_1 E(\xi_1)\, d\xi_1. \tag{2}$$

Замечание. Формула (2) верна и без предположения, что $\mu_2 E < +\infty$, однако в этом случае уже нельзя утверждать, что почти для всех сечений будет $\mu_1 E(\xi_1) < +\infty$. При этом, как и в Теореме 1, функция $\mu_1 E(\xi_1)$ измерима на $\mathcal{R}^1$.

Следствие. Пусть функция $f(x) \geq 0$ задана на измеримом множестве $E \subset \mathcal{R}^1$ и ее подграфик Q – измеримое множество в $\mathcal{R}^2$. Тогда функция $f(x)$ измерима.

Перед тем, как перейти к повторным интегралам, введем некоторые обозначения и термины. Пусть функция $f(\xi_1, \xi_2)$ задана на множестве $E \subset \mathcal{R}^2$. Если при некотором ξ_1 сечение $E(\xi_1)$ не пусто и измеримо, а для функции $f(\xi_1, \xi_2)$, как функции одной переменной ξ_2, имеет смысл интеграл по множеству $E(\xi_1)$, мы записываем этот интеграл в виде

$$\int_{E(\xi_1)} f(\xi_1, \xi_1)\, d\xi_2. \tag{3}$$

Если же ξ_1 таково, что $E(\xi_1) = \varnothing$, то хотя при таком ξ_1 функция $f(\xi_1, \xi_2)$ не задана ни при одном ξ_2, мы условимся, что и в этом случае интеграл (3) определен и равен 0.

Кроме того, условимся, что утверждение "функция $f(\xi_1, \xi_2)$ измерима (соответственно суммируема) по ξ_2 на сечении $E(\xi_1)$ при почти всех $\xi_1 \in \mathcal{R}^1$" означает, что для почти каждого $\xi_1 \in \mathcal{R}^1$ справедливо одно из двух: или $E(\xi_1) \neq \varnothing$

и измеримо, а функция $f(\xi_1, \xi_2)$, как функция от ξ_2, измерима (соответственно суммируема) на $E(\xi_1)$, или $E(\xi_1) = \varnothing$.

Теорема 3 (Г. Фубини). Если функция $f(\xi_1, \xi_2)$ суммируема на множестве $E \subset \mathcal{R}^2$, то почти при всех ξ_1 она суммируема по ξ_2 на сечении $E(\xi_1)$ и при этом справедливо равенство

$$\int_E f(\xi_1, \xi_2)\, d\mu_2 = \int_{\mathcal{R}^1} d\xi_1 \int_{E(\xi_1)} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \tag{4}$$

Внутренний интеграл представляет измеримую и даже суммируемую функцию от ξ_1.

Замечание. Сведение двойного интеграла к повторному по формуле (4) возможно и без условия суммируемости функции $f(\xi_1, \xi_2)$, достаточно предполагать, что интеграл $\int_E f(\xi_1, \xi_2)\, d\mu_2$ имеет смысл.

При вычислении повторного интеграла в формуле (4) нас фактически интересуют только непустые сечения $E(\xi_1)$. Множество всех ξ_1, для которых $E(\xi_1) \neq \varnothing$, называется проекцией множества E на первую координатную ось и обозначается $Pr_1 E$. Из измеримости множества E в пространстве $\mathcal{R}^2$ не вытекает измеримость множества $Pr_1 E$ в пространстве $\mathcal{R}^1$. Однако, если множество E таково, что множество $Pr_1 E$ измеримо, то внешний интеграл по $\mathcal{R}^1$ в формуле (4) можно заменить интегралом по $Pr_1 E$, поскольку

$$\int_{E(\xi_1)} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 = 0 \text{ при } \xi_1 \notin Pr_1 E.$$

Тем самым формуле (4) можно придать следующий вид

$$\int_E f(\xi_1, \xi_2)\, d\mu_2 = \int_{Pr_1 E} d\xi_1 \int_{E(\xi_1)} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2.$$

В частности, если множество E – прямоугольник $\Delta =< a, b; c, d >$, то

$$\int_\Delta f(\xi_1, \xi_2)\, d\mu_2 = \int_a^b d\xi_1 \int_c^d f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2.$$

Аналогично получается, что

$$\int_\Delta f(\xi_1, \xi_2)\, d\mu_2 = \int_c^d d\xi_2 \int_a^b f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1.$$

Отсюда вытекает, что если функция $f(\xi_1, \xi_2)$ суммируема в промежутке $\Delta =< a, b; c, d >$, то

$$\int_a^b d\xi_1 \int_c^d f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 = \int_c^d d\xi_2 \int_a^b f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1.$$

В заключение наметим, как обобщается теорема Фубини на случай интегралов в пространствах с любым числом измерений.

Пусть функция $f(\xi_1, ..., \xi_n)$ суммируема на множестве $E \subset \mathcal{R}^n$ с $\mu_n E < +\infty$. Разобъем все аргументы на две группы: $(\xi_1, ..., \xi_k)$ и $(\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$, $k < n$. Для каждого фиксированного набора вещественных чисел $(\xi_1, ..., \xi_k)$ обозначим через $E(\xi_1, ..., \xi_k)$ множество всех точек $(\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$ пространства $\mathcal{R}^{n-k}$, для которых

$$x = (\xi_1, ..., \xi_k, ..., \xi_n) \in E$$

$$E(\xi_1, ..., \xi_k) = \{(\xi_{k+1}, ..., \xi_n) \in \mathcal{R}^{n-k} \mid (\xi_1, ..., \xi_n) \in E\}.$$

Тогда оказывается, что при почти всех $(\xi_1, ..., \xi_k) \in \mathcal{R}^k$ или функция $f(\xi_1, ..., \xi_n)$ суммируема на $E(\xi_1, ..., \xi_k)$ как функция переменных $(\xi_{k+1}, ..., \xi_n)$ или $E(\xi_1, ..., \xi_k) = \varnothing$.

При этом справедливо равенство

$$\int\limits_E f(\xi_1, ..., \xi_n)\, d\mu_n = \int\limits_{\mathcal{R}^k} d\mu_k \int\limits_{E(\xi_1,...,\xi_k)} f(\xi_1, ..., \xi_n)\, d\mu_{n-k},$$

если, как и выше, условиться, что внутренний интеграл равен нулю в случае, когда $E(\xi_1, ..., \xi_k) = \varnothing$.

В частности, беря $k = 1$, мы получаем, что

$$\int\limits_E f(\xi_1, ..., \xi_n)\, d\mu_n = \int\limits_{\mathcal{R}^1} d\mu_1 \int\limits_{E(\xi_1)} f(\xi_1, ..., \xi_n)\, d\mu_{n-1}.$$

Продолжая эти преобразования, мы получим в конце представление интеграла по множеству E в виде повторного интеграла, содержащего n однократных интегралов. В частности, если множество E есть параллелепипед $\Delta =< a, b >$, то формула имеет вид

$$\int\limits_\Delta f(\xi_1, ..., \xi_n)\, d\mu_n = \int\limits_{a_1}^{b_1} d\xi_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} d\xi_2 ... \int\limits_{a_n}^{b_n} f(\xi_1, ..., \xi_n)\, d\xi_n.$$

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

ГЛАВА 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Одной из важнейших операций анализа является предельный переход. Все понятия предела имеют то общее, что сходимость означает уменьшение "расстояния"между элементами. Наибольшим общим множеством, между элементами которого определено понятие расстояния, подчиненное некоторым условиям, является метрическое пространство.

1.1 Определения и примеры

Определение 1. Множество X называется метрическим пространством, если каждой паре его элементов x и y поставлена в соответствие неотрицательная вещественная функция $\rho\,(x,y)$, называемая расстоянием или метрикой, которая удовлетворяет трем условиям:

1) $\rho\,(x,y)=0 \iff x=y$;

2) $\rho\,(x,y)=\rho\,(y,x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho\,(x,y)\le\rho\,(x,z)+\rho\,(z,y)$ (аксиома треугольника).

Перечисленные условия называются аксиомами метрики. Если в 3) взять $x=y$, то $\rho(x,z)\ge 0$.

Метрическим пространством называют пару, состоящую из множества X и метрики ρ, удовлетворяющую трем указанным условиям. Обозначается метрическое пространство символом (X,ρ). Иногда метрическое пространство обозначается одной буквой X, если оговорено, что рассматривается метрическое пространство.

Элементы метрического пространства принято называть точками.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся метрические пространства.

1. Пространство $\mathcal{R}^n$, состоящее из точек $x=(x_1,...,x_n)$, будет метрическим пространством, если положить

$$\rho\,(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}$$

Выполнение аксиом расстояния 1) – 3) было показано раньше.

В случае $n = 1$ мы имеем множество вещественных чисел $\mathcal{R}^1$ с расстоянием $\rho\,(x, y) = |x - y|$.

В арифметическом пространстве $\mathcal{R}^n$ можно ввести и другие метрики, например

$$\rho_0(x, y) = \max_{i=\overline{1,n}} |y_i - x_i|, \quad \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Справедливость аксиом 1) – 3) здесь очевидна.

Естественно, что при этом одно и тоже множество превращается в различные метрические пространства. Поэтому иногда важно иметь разные обозначения для метрических пространств одного множества.

2. Множество последовательностей чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...,)$ таких, что ряд из абсолютных величин сходится $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty,\ p \geq 1$, становится метрическим пространством, если ввести функцию расстояния по формуле

$$\rho\,(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p},$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$. Это метрическое пространство обозначается $\ell_p,\ p \geq 1$. Из трех аксиом метрики нуждается в проверке лишь 3). Доказательство проведем для случаев $p = 1$ и $p = 2$.

Пространство ℓ_1 имеет метрику $\rho\,(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|$. Так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|,$$

то ряд $\rho\,(x, y)$ сходится.

$$\rho\,(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |z_i - y_i| = \rho\,(x, z) + \rho\,(z, y).$$

Аксиома 3) выполняется.

Пространство ℓ_2 имеет метрику

$$\rho\,(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Для доказательства неравенства треугольника воспользуемся неравенствами Коши-Буняковского, где перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Следовательно, ряд сходится и выражение $\rho\left(x,y\right)$ имеет смысл.

$$\rho(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left((x_i - z_i) + (z_i - y_i)\right)^2\right]^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - z_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}(z_i - y_i)^2\right)^{1/2} = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Аксиома 3) выполняется.

3. Метрическим пространством m называется множество, элементами которого являются ограниченные последовательности $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ с метрикой $\rho\left(x,y\right) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$. Верхняя грань существует в силу предполагаемой ограниченности последовательности $\{x_n\}$. Далее

$$|x_i - y_i| = |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)| \le |x_i - z_i| + |z_i - y_i| \le \sup_i |x_i - z_i| + \sup_i |z_i - y_i|.$$

Отсюда следует

$$\sup_i |x_i - y_i| \le \sup_i |x_i - z_i| + \sup_i |z_i - y_i|.$$

4. Рассмотрим множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[a,b]$. Введем метрику, полагая, что $\rho\left(x,y\right) = \max\limits_{t\in[a,b]} \big|x(t) - y(t)\big|$. Так как непрерывные на отрезке функции ограничены, то они достигают максимума и функция $\rho\left(x,y\right)$ имеет смысл. Докажем выполнение третьей аксиомы

$$\big|x(t) - y(t)\big| \le \big|x(t) - z(t)\big| + \big|z(t) - y(t)\big| \le \max_t \big|x(t) - z(t)\big| + \max_t \big|z(t) - y(t)\big|$$

Это неравенство имеет место для $\forall\, t \in [a,b]$, в том числе для тех t, где функция слева достигает максимума. Полученное метрическое пространство обозначают $C[a,b]$.

5. Множество непрерывных функций можно превратить в метрическое пространство $C_1[a,b]$, полагая

$$\rho\left(x,y\right) = \int_a^b \big|x(t) - y(t)\big| dt.$$

Так как функция непрерывна, то интеграл существует. Аксиомы 1) и 2) очевидны. Докажем третью аксиому

$$\int_a^b \big|x(t) - y(t)\big|\, dt \le \int_a^b \big|x(t) - z(t)\big|\, dt + \int_a^b \big|z(t) - y(t)\big|\, dt.$$

Другое метрическое пространство непрерывных функций $C_2[a,b]$ получим при

$$\rho(x,y) = \left[\int_a^b \big(x(t) - y(t)\big)^2 dt\right]^{1/2}.$$

Существование интеграла и выполнение аксиом 1), 2) очевидно. Третья аксиома доказывается с помощью неравенства Коши - Буняковского в интегральной форме.

1.2 Сходимость в метрических пространствах

В метрическом пространстве (X,ρ) рассмотрим последовательность элементов $\{x_m\},\ m = 1, 2, ...$, не обязательно различных.

Определение 1. Последовательность $\{x_m\}$ элементов из метрического пространства X называется сходящейся к элементу a этого пространства, если $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x_m, a) = 0,\ x_m \neq x$.

Такая сходимость называется сходимостью по метрике, элемент a называется пределом последовательности. Общее определение предела следующее

Определение 2. Элемент a метрического пространства X называется пределом последовательности $\{x_m\}$ элементов из этого пространства, если для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, m_\varepsilon$, что для $\forall\, m > m_\varepsilon\ \rho(x_m, a) < \varepsilon$.

Теорема 1. Последовательность элементов метрического пространства X может иметь только один предел.

► Пусть последовательность $\{x_m\}$ имеет два различных предела a и b. Это означает, что $\rho(x_m, a) \to 0,\ \rho(x_m, b) \to 0$ при $m \to \infty$. Для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, m_\varepsilon$, что при $\forall\, m > m_\varepsilon\ \rho(a,b) \le \rho(a, x_m) + \rho(x_m, b) < \varepsilon$. Так как левая часть не зависит от ε, а ε — произвольное, то неравенство может иметь место только при $a = b$. ◄

Теорема 2. Если последовательность $\{x_m\}$ метрического пространства X сходится к элементу $a \in X$, то и любая ее подпоследовательность $\{x_{m_k}\}$ сходится к этому элементу.

► Очевидно с использованием определения предела. ◄

Теорема 3 (непрерывность метрики). Метрика $\rho(x,y)$ есть непрерывная функция своих аргументов, то есть если последовательности $\{x_m\}$ и $\{y_m\}$ метрического пространства X сходятся к пределам x и y соответственно, то расстояние $\rho(x_m, y_m) \to \rho(x,y)$ при $m \to \infty$.

► Для доказательства воспользуемся неравенством

$$\bigl|\rho\,(x,y)-\rho\,(z,u)\bigr|\le\rho\,(x,z)+\rho\,(y,u),$$

где x,y,z,u — элементы метрического пространства. Выполнение неравенства легко проверяется с помощью третьей аксиомы. Тогда для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,m_\varepsilon$, что для $\forall\,m>m_\varepsilon$: $\bigl|\rho\,(x_m,y_m)-\rho\,(x,y)\bigr|\le\rho\,(x_m,x)+\rho\,(y_m,y)<\varepsilon$. ◄

Примеры сходимости различных метрических пространств.

1. В пространстве $\mathcal{R}^n$: $x^m\to a\iff x_i^m\to a_i,\ i=\overline{1,n}$.

2. Пространство ℓ_1: $x^m\to a\Rightarrow x_i^m\to a_i,\ i=1,2,...$, так как из $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\,x_i^m-a_i|<\varepsilon\Rightarrow|\,x_i^m-a_i|<\varepsilon$ при $\forall\,i$. Обратное утверждение не имеет места, так как из $|\,x_i^m-a_i|<\varepsilon$ не следует $\rho\,(x^m,a)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\,x_i^m-a_i|<\varepsilon$.

Пространство ℓ_2: $x^m\to a\Rightarrow x_i^m\to a_i$ для $\forall\,i$, обратное утверждение не верно. Аналогично для ℓ_p.

3. Пространство m: $\rho\,(x,y)=\sup\limits_i\{|\,x_i-y_i|\},\ x^k\to a\Rightarrow x_i^k\rightrightarrows a_i$ относительно i. Для $\forall\,\varepsilon>0\ \exists k_\varepsilon:\forall\,k>k_\varepsilon\ \rho\,(x^k,a)<\varepsilon$ при $\forall\,i$.

4. Пространство $C[a,b]:x^k(t)\to a(t)\Rightarrow x^k(t)\rightrightarrows a(t)$ на $[a,b]$. Если последовательность функций $x^k(t)$ сходится по метрике пространства $C[a,b]$, то она сходится равномерно на $[a,b]$.

В самом деле, если для $\forall\,\varepsilon>0$ выбрать k_ε так, что $\rho\,(x_k,a)<\varepsilon$ при $k>k_\varepsilon$, то это означает $\sup\limits_{t\in[a,b]}\bigl|\,x_k(t)-a(t)\bigr|<\varepsilon$. Для всех $k>k_\varepsilon$ справедливо неравенство $\bigl|\,x_k(t)-a(t)\bigr|<\varepsilon$ при всех $t\in[a,b]$, отсюда и следует равномерная сходимость.

5. Пространство $C_1\,[a,b]:x^k(t)\to a(t)$. Отсюда не следует сходимость последовательности функций на $[a,b]$ в классическом смысле. Аналогично для пространства $C_2[a,b]$.

1.3 Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства

Подобно тому, как это было сделано в пространстве $\mathcal{R}^n$, в случае произвольного метрического пространства вводится понятие открытого и замкнутого множества, окрестности точки, предельной точки и т. д.

Рассмотрим основные понятия. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство.

Определение 1. Множество точек метрического пространства (X, ρ)

$$B(a, r) = \{x \in X \mid \rho\,(a, x) < r\}$$

называется открытым шаром с центром в точке a и радиуса r.

Множество точек метрического пространства (X, ρ)

$$B^*(a, r) = \{x \in X \mid \rho\,(a, x) \leq r\}$$

называется замкнутым шаром.

Определение 2. Открытый шар $B(x, \varepsilon)$ называется ε – окрестностью точки $x \in X$.

В случае общего метрического пространства понятие шара является удобным, но его не следует отождествлять с традиционным образом, к которому мы привыкли в пространстве $\mathcal{R}^3$. Например, в пространстве $C[a, b]$ шар $B(x_0, r)$ есть полоса на плоскости (x, y).

Определение 3. Множество $G \subset X$ называется открытым в метрическим пространстве X, если для любой точки $x \in G$ найдется шар $B(x, \varepsilon) \subset G$.

Из этого определения следует, что само X — открытое в (X, ρ) множество, пустое множество также является открытым.

Определение 4. Множество $F \subset X$ называется замкнутым в метрическом пространстве X, если его дополнение $G = X \setminus F$ открыто в X.

Можно доказать, как и в случае $\mathbf{R}^n$, что открытый шар $B(a, r)$ и его внешность $\{x \in X \mid \rho\,(a, x) > r\}$ есть открытые множества в X, а замкнутый шар $B^*(a, r)$ является замкнутым множеством в X.

Для открытых и замкнутых множеств в (X, ρ) справедливы утверждения:

а) объединение $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ любой системы открытых множеств $G_\alpha \subset X$ является множеством, открытым в X;

б) пересечение $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ конечного числа открытых множеств $G_k \subset X$ является множеством, открытым в X;

в) пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ любой системы замкнутых множеств $F_\alpha \subset X$ является множеством, замкнутым в X;

г) объединение $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ конечного числа замкнутых множеств $F_k \subset X$ является множеством, замкнутым в X.

Доказательство повторяет доказательство соответствующих утверждений для пространства $\mathcal{R}^n$.

Определение 5. Любое открытое в X множество G, содержащее точку $x \in X$, называется окрестностью этой точки в X.

Определение 6. Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $E \subset X$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек множества E.

Предельная точка множества $E \subset X$ может ему принадлежать или нет.

Теорема 1. Для того, чтобы точка $x \in X$ была предельной точкой множества $E \subset X$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_m\}$ точек из E, сходящаяся к точке x.

▶ *Необходимость.* Если x — предельная точка множества $E \subset X$, то в каждой ее окрестности $B(x, 1/m)$ содержится хотя бы одна точка $x_m \in E,\ x_m \neq x$. Эти точки образуют последовательность $\{x_m\}$, сходящуюся к точке x.

Достаточность. Очевидна. ◀

Определение 7. Объединение множеств $E \subset X$ и всех его предельных точек в X называется замыканием множества E в X и обозначается $\overline{E}$.

Теорема 2. Чтобы множество $F \subset X$ было замкнутым в X, необходимо и достаточно,чтобы $F = \overline{F}$ в X.

▶ Аналогично случаю пространства $\mathbf{R}^n$. ◀

Понятие внутренней, внешней и граничных точек из X вводится как в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Определение 8. Метрическое пространство (X_1, ρ_1) называется подпространством метрического пространства (X, ρ), если $X_1 \subset X$ и для любой пары точек a, b множества X справедливо равенство $\rho_1(a, b) = \rho\,(a, b)$.

Всякое открытое множество G_1 из пространства $X_1 \subset X$ имеет вид $G_1 = X_1 \cap G$, где G – множество, открытое в X, а всякое замкнутое в X_1 множество F_1 имеет вид $F_1 = X_1 \cap F$, где F — множество, замкнутое в X.

Из сказанного следует, что свойство множества, лежащего в метрическом пространстве, быть открытым или замкнутым относительно и зависит от пространства, которому оно принадлежит.

Например, интервал $|x| < 1, \ y = 0$ плоскости $\mathbf{R}^2$ со стандартной метрикой является метрическим пространством (X_1, ρ_1), которое, как и всякое метрическое пространство, замкнуто в себе, ибо содержит все свои предельные точки в X_1. Вместе с тем очевидно, что X_1 не является замкнутым множеством в $X = \mathbf{R}^2$.

1.4 Полные метрические пространства

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства X называется сходящейся в себе или фундаментальной, если для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что для $\forall\, m, n > n_\varepsilon :\ \rho\,(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Определение 2. Метрическое пространство X называется полным, если каждая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ сходится, то есть существует точка $x \in X$: $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Числовая прямая является простейшим примером полных метрических пространств.

Теорема 1. Если последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства X сходится, то она фундаментальна.

► Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, тогда для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$: для $\forall\, m, n > n_\varepsilon$ будет $\rho\,(x_m, x) < \varepsilon$ и $\rho\,(x_n, x) < \varepsilon$. Для этих m и n $\rho\,(x_m, x_n) \le \rho\,(x_m, x) + \rho\,(x, x_n) < 2\varepsilon$. ◄

В произвольном метрическом пространстве обратное утверждение не имеет место. Например, рассмотрим множество рациональных чисел Q с метрикой $\rho\,(x, y) = |x - y|$. Фундаментальная последовательность рациональных чисел может иметь предел, который не является рациональным числом.

Для полного метрического пространства имеет место признак сходимости Коши: для того, чтобы последовательность точек $\{x_n\}$ полного метрического пространства X была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Замкнутое подпространство F полного метрического пространства X является полным. При переходе от пространства X к его замкнутому подпространству $F \subset X$ свойство полноты сохраняется. Действительно, если последовательность точек $\{x_k\}$ пространства F сходится в себе, то в силу полноты X существует точка $x \in X$, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Ввиду замкнутости F должно быть

$x \in F$, то есть последовательность $\{x_k\}$ сходится в F.

Определение 3. Множество $E \subset X$ называется ограниченным, если оно содержится в шаре конечного радиуса.

Теорема 2. Любая фундаментальная последовательность ограничена.

► Пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в метрическом пространстве X. Следовательно, для $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, n_\varepsilon$, что для $\forall\, m, n > n_\varepsilon$: $\rho\,(x_m, x_n) < \varepsilon$. Фиксируем $n = N > n_\varepsilon$, тогда $\rho\,(x_m, x_N) < \varepsilon$ для $\forall\, m > n_\varepsilon$. Выберем число $A = max\{\varepsilon, \rho\,(x_1, x_N), ..., \rho\,(x_m, x_N)\}$. Для всех элементов последовательности $\{x_m\}$ $\rho\,(x_m, x_N) \le A$, то есть все элементы последовательности находятся в замкнутом шаре. ◄

Примеры полных метрических пространств.

1. Пространство $\mathcal{R}^n$. Раньше было доказано, что в $\mathcal{R}^n$ с евклидовой метрикой ρ всякая фундаментальная последовательность сходится. Полнота пространств $\mathcal{R}^n$ с метриками ρ_0 и ρ_1 доказывается аналогично случаю евклидова пространства.

2. Пространство последовательностей ℓ_p является полным.

► Доказательство проведем для случая $p = 2$. Пусть $\{x^m\}$ — фундаментальная последовательность в ℓ_2. Это означает, что для $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, m_\varepsilon$, что

$$\rho^2(x^m, x^n) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^m - x_k^n)^2 < \varepsilon \quad \text{при} \quad \forall\, m, n > m_\varepsilon \tag{1}$$

Здесь $x^m = (x_1^m, x_2^m, ..., x_k^m, ...)$. Из неравенства (1) следует, что при любом k будет $(x_k^m - x_k^n)^2 < \varepsilon$, то есть последовательность вещественных чисел фундаментальна и потому сходится. Положим $x_k = \lim\limits_{m\to\infty} x_k^m$. Обозначим $x = (x_1, ..., x_k, ...)$. Нужно показать, что: а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty$, то есть $x \in \ell_2$; б) $\lim\limits_{m\to\infty} \rho(x^m, x) = 0$.

Из неравенства (1) следует, что для любого фиксированного M

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^m - x_k^n)^2 < \varepsilon.$$

Фиксировав m, перейдем к пределу по $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^m - x_k) \le \varepsilon.$$

Это неравенство верно при любом M. Перейдем к пределу при $M \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^m - x_k)^2 \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Из сходимости рядов $\sum(x_k^m)^2$ и $\sum(x_k^m - x_k)^2$ следует сходимость ряда $\sum x_k^2$, то есть утверждение а) доказано. Далее, так как ε произвольно мало, то неравенство (2) означает, что

$$\lim_{m\to\infty} \rho(x^m - x) = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^m - x_k)^2} = 0,$$

то есть $x^m \to x$ в метрике ℓ_2. Утверждение б) доказано. ◄

3. Пространство всех ограниченных последовательностей m также полно.

► Доказывается по той схеме, что и выше. ◄

4. Докажем полноту пространства $C[a,b]$ с метрикой $\rho\,(f,g) = \max\limits_x \big|f(x) - g(x)\big|$. Пусть $\{x_n(t)\}$ — некоторая фундаментальная последовательность в $C[a,b]$. Это означает, что для $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что

$$\big|x_m(t) - x_n(t)\big| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m,n > n_\varepsilon \quad \text{и} \quad \forall\, t \in [a,b]. \tag{3}$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится. В этом случае ее предел $x(t)$ будет непрерывной функцией. Устремляя в неравенстве (3) $n \to \infty$ получим $\big|x_m(t) - x(t)\big| \leq \varepsilon$ для $\forall\, t$ и $m > n_\varepsilon$, а это и означает, что последовательность $\{x_m(t)\}$ сходится в смысле метрики пространства $C[a,b]$.

5. Можно убедиться, что пространство $C_2[a,b]$ не полно.

1.5 Сепарабельные пространства

Как известно, любое вещественное число $x \in \mathcal{R}^1$ можно рассматривать как предел последовательности рациональных чисел из Q. Следовательно, любая точка множества $\mathcal{R}^1$ есть предельная точка множества Q. Можно сказать, что все множество $\mathcal{R}^1$ есть замыкание множества Q, то есть $\mathcal{R}^1 = \overline{Q}$. В этом случае говорят, что множество Q рациональных чисел является всюду плотным в множестве $\mathcal{R}^1$.

Определение 1. Пусть A и B — два подмножества метрического пространства X. Множество A называется плотным в B, если $B \subset \overline{A}$. В частности, множество A называется всюду плотным в пространстве X, если $\overline{A} = X$.

Определение 2. Метрическое пространство X называется сепарабельным, если в нем существует счетное всюду плотное подмножество.

Можно дать другое определение плотного множества, которое эквивалентно определению 1.

Определение 3. Множество $A \subset X$ называется плотным в множестве $B \subset X$, если для $\forall\, x \in B$ и $\forall\, \varepsilon > 0$ существует точка $z \in A$, что $\rho\,(x, z) < \varepsilon$.

Утверждение. Определения 1 и 3 плотного множества эквивалентны.

► Пусть множество A плотно в B по определению 3 и точка $x \in B$. Возьмем последовательность чисел $\varepsilon_k \to 0,\ \varepsilon_k > 0$. Для $\forall\, k = 1, 2, ...$ существуют точки $z_k \in A:\ \rho\,(x, z_k) < \varepsilon_k$ и, следовательно, $z_k \to x$. Итак, из множества A можно извлечь последовательность, сходящуюся к наперед заданному элементу $x \in B$, то есть $\forall\, x \in B$ представимо в виде $x = \lim\limits_{k\to\infty} z_k$, где $z_k \in A$. Следовательно $B \subset \overline{A}$. Обратно, если $B \subset \overline{A}$, то очевидно для $\forall\, x \in B$ существует точка $z \in A$, что $\rho\,(x, z) < \varepsilon$. ◄

Почти все пространства, перечисленные в примерах п. 1.1 являются сепарабельными, то есть содержат в себе счетные всюду плотные множества.

1. Пространство $\mathcal{R}^n$ с метриками ρ, $\rho_0\, \rho_1$ содержит совокупность точек с рациональными координатами и потому сепарабельно.

2. Пространство ℓ_p содержит совокупность последовательностей, в каждой из которых все члены рациональны и лишь конечное число членов отлично от нуля. Поэтому все пространства ℓ_p сепарабельны.

В частности, рассмотрим пространство ℓ_2. Пусть $x \in \ell_2$, $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...)$. Возьмем последовательность $x_n = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, ...)$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Для каждой последовательности x_n существует последовательность с рациональными координатами $x'_n = (r_1, ..., r_n, 0, ...)$, сколь угодно близкая к x_n. Множество последовательностей x'_n счетно и всюду плотно в ℓ_2.

3. В пространстве ограниченных последовательностей m нет никакого счетного всюду плотного множества. Действительно, рассмотрим всевозможные последовательности, состоящие из нулей и единиц. Они образуют множество мощности континуума (можно установить соответствие между этими последовательностями и подмножествами натурального ряда). Расстояние между точ-

ками, определяемое формулой $\rho\,(x,y)=\sup\limits_{i}|\,x_i-y_i|$, равно единице. Окружим каждую из этих точек открытым шаром радиуса $1/2$. Эти шары не пересекаются. Если некоторое множество всюду плотно в рассматриваемом пространстве, то в каждом из шаров должно содержаться хотя бы по одной точке из этого множества, и, следовательно, оно не может быть счетным.

4. В пространстве $C[a,b]$ существует совокупность всех многочленов с рациональными коэффициентами. Каждая непрерывная функция представима в виде равномерно сходящейся последовательности полиномов, которые образуют счетное всюду плотное множество в $C[a,b]$.

5. В пространствах $C_1[a,b]$ и $C_2[a,b]$ имеем аналогичную ситуацию.

Теорема 1. Если множество E содержится в сепарабельном метрическом пространстве (X,ρ), то E тоже сепарабельное метрическое пространство.

► Множество $E\subset X$, как часть метрического пространства, является метрическим пространством. Под расстоянием от точки $x_0\in X$ до множества $E\subset X$ понимают величину $\rho\,(x_0,E)=\inf\limits_{y\in E}\rho\,(x_0,y)$.

Пусть $E\subset X$ и $D=\{x_k\}$ — счетное всюду плотное в X множество. Возьмем числовую последовательность $\varepsilon_n\to 0,\ \varepsilon_n>0$, и для $\forall\,k=1,2,...$ найдем в E элемент $z_{k,n}$ такой, что $\rho\,(x_k,z_{k,n})<\rho\,(x_k,E)+\varepsilon_n$.

Пусть $x\in E$ и $\varepsilon>0$. Найдется элемент $x_k\in D$: $\rho\,(x,x_k)<\varepsilon$. Беря n настолько большим, чтобы было $\varepsilon_n<\varepsilon$, найдем

$$\rho\,(x,z_{k,n})\le\rho\,(x,x_k)+\rho\,(x_k,z_{k,n})<\varepsilon+\rho\,(x_k,E)+\varepsilon_n<3\varepsilon.$$

Отсюда следует плотность множества $D_0=\{z_{k,n}\}$ в E. ◄

1.6 Пополнение метрического пространства

Если метрическое пространство E не полно, то его всегда можно включить некоторым образом (по существу, единственным) в полное метрическое пространство.

Определение 1. Наименьшее полное метрическое пространство, содержащее данное метрическое пространство (E,ρ), называется пополнением пространства (E,ρ).

Можно дать другое, более формальное определение пополнения метрического пространства, эквивалентное определению 1.

Определение 2. Пусть E — метрическое пространство. Полное метрическое пространство X называется пополнением пространства E если:
1) E является подпространством пространства X, то есть $E \subset X$,
2) E всюду плотно в X, то есть $\overline{E} = X$.

Например, пространство вещественных чисел $\mathcal{R}^1$ является пополнением пространства рациональных чисел Q.

Определение 3. Метрическое пространство (X_1, ρ_1) называется изометричным метрическому пространству (X_2, ρ_2), если существует взаимно-однозначное отображение $f : X_1 \to X_2$ такое, что для любых точек a и $b \in X_1$ справедливо равенство $\rho_2(f(a), f(b)) = \rho_1(a, b)$. Отображение $f : X_1 \to X_2$ называют в этом случае изометрией.

Ясно, что введенное отношение изометрии рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности между метрическими пространствами.

Приняв соглашение о тождественности изометричных пространств, можно показать, что, если пополнение метрического пространства существует, то оно единственно.

Теорема 1 (единственность пополнения). Если метрические пространства (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2) являются пополнением метрического пространства (X, ρ), то они изометричны.

► Пусть (Y_1, ρ_1) и (Y_2, ρ_2) – два различных пополнения метрического пространства (X, ρ). Докажем что они изометричны, то есть существует взаимно-однозначное отображение $f : Y_1 \to Y_2$ такое, что
1) $f(x) = x$ для $\forall x \in X$,
2) для любых точек $y_1', y_1'' \in Y_1$: $\rho_1(y_1', y_1'') = \rho_2(f(y_1'), f(y_1''))$.

По определению пополнения: $X \subset Y_1$, $X \subset Y_2$, $\overline{X} = Y_1$, $\overline{X} = Y_2$.

Для любой точки $y_1 \in Y_1$ существует последовательность $\{x_n\}$ точек из X, что $x_n \to y_1$. Но точки $\{x_n\}$ входят и в Y_2. Так как Y_2 полно, а последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то $x_n \to y_2 \in Y_2$, причем точка y_2 не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к точке $y_1 \in Y_1$.

Положим $f(y_1) = y_2$ — это и есть искомое изометрическое отображение пространства Y_1 на Y_2. Действительно, по построению $f(x) = x$, если $x \in X$. Далее, пусть y_1', y_1'' — две точки из Y_1, тогда
$\{x_n'\} \to y_1' \in Y_1$ и $\{x_n'\} \to y_2' \in Y_2$,
$\{x_n''\} \to y_1'' \in Y_1$ и $\{x_n''\} \to y_2'' \in Y_2$. Отсюда следует

$$\rho_1(y_1', y_1'') = \lim_{n\to\infty} \rho_1(x_n', x_n'') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', x_n''),$$

$$\rho_2(y_2', y_2'') = \lim_{n\to\infty} \rho_2(x_n', x_n'') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', x_n'').$$

Следовательно, $\rho_1(y_1', y_1'') = \rho_2(y_2', y_2'')$. Это равенство устанавливает взаимно однозначное отображение $f : Y_1 \to Y_2$ (различным y_1 отвечают различные y_2). ◀

Теорема 2 (существование пополнения). Каждое метрическое пространство имеет пополнение.

▶ Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из X называются эквивалентными и обозначаются $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, если $\rho\,(x_n, y_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Все фундаментальные последовательности из пространства X распадаются на классы эквивалентных последовательностей. Определим пространство (Y, ρ_0) следующим образом. За элементы множества Y примем всевозможные классы эквивалентных между собой последовательностей пространства X.

Расстояние между точками пространства Y введем по следующему правилу. Пусть y' и y'' – два класса эквивалентных последовательностей, выберем в каждом из классов по одной фундаментальной последовательности $\{x_n'\} \in y'$ и $\{x_n''\} \in y''$. Положим

$$\rho_0(y', y'') = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n', x_n''). \tag{1}$$

Докажем, что предел в (1) существуют и не зависит от выбора последовательностей $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ в каждом классе. Так как эти последовательности фундаментальны, то для $\forall \varepsilon > 0$ при достаточно больших номерах m и n получаем

$$\left|\rho(x_m', x_m'') - \rho(x_n', x_n'')\right| \le \rho(x_m', x_n') + \rho(x_m'', x_n'') < \varepsilon \tag{2}$$

Таким образом, числовая последовательность $\{\rho(x'_n, x''_n)\}$ удовлетворяет условию Коши и потому сходится. Значит, предел (1) существует.

Покажем, что он не зависит от выбора последовательностей $\{x'_n\} \in y'$ и $\{x''_n\} \in y''$. Путь последовательности $\{x'_n\}$, $\{\overline{x}'_n\} \in y'$ и $\{x''_n\}$, $\{\overline{x}''_n\} \in y''$, тогда

$$\left|\rho(x'_n, x''_n) - \rho\left(\overline{x}'_n, \overline{x}''_n\right)\right| \leq \rho\left(x'_n, \overline{x}'_n\right) + \rho\left(x''_n, \overline{x}''_n\right) < \varepsilon,$$

так как $\{x'_n\} \sim \{\overline{x}'_n\}$, $\{x''_n\} \sim \{\overline{x}''_n\}$. Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x'_n, x''_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho\left(\overline{x}'_n, \overline{x}''_n\right).$$

То есть предел последовательности (1) не зависит от выбора последовательностей.

Докажем, что в пространстве Y с метрикой (1) выполнены аксиомы метрики. Аксиома 1) вытекает из определения эквивалентности фундаментальных последовательностей, аксиома 2) очевидна. Проверим аксиому треугольника. Так как в пространстве (X, ρ) аксиома выполняется, то

$$\rho\left(x'_n, x''_n\right) \leq \rho\left(x'_n, \overline{x}_n\right) + \rho\left(\overline{x}_n, x''_n\right) \ \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(x'_n, x''_n\right) \leq \lim_{n\to\infty} \rho\left(x'_n, \overline{x}_n\right) + \lim_{n\to\infty} \rho\left(\overline{x}_n, x''_n\right).$$

То есть $\rho\left(y', y''\right) \leq \rho\left(y', \overline{y}\right) + \rho\left(\overline{y}, y''\right)$.

Докажем теперь, что Y — пополнение пространства X. Каждой точке $x \in X$ соответствует некоторый класс фундаментальных последовательностей, сходящихся к точке x. При этом, если $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то $\rho(x, y) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Следовательно, поставив каждой точке $x \in X$ в соответствие класс сходящихся к точке x фундаментальных последовательностей, мы изометрично отобразим пространство X в пространство Y. В дальнейшем мы можем не различать пространство X и его образ в Y и рассматривать X как подмножество в Y.

Покажем, что X всюду плотно в Y, то есть $\overline{X} = Y$. Действительно, пусть точка $y \in Y$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Выберем в y некоторую фундаментальную последовательность $\{x_k\}$. Пусть N таково, что $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ для $\forall m, n > N$. Тогда

$$\rho\left(x_n, y\right) = \lim_{m\to\infty} \rho\left(x_n, x_m\right) \leq \varepsilon \ \text{ при } n > N$$

То есть произвольная окрестность точки y содержит некоторую точку $x_n \in X$. Таким образом, замыкание X в Y есть все Y.

Остается доказать, что пространство Y полно. По построению Y любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ из точек пространства X сходится в Y к некоторой точке $y \in Y$. Так как X плотно в Y, то для любой фундаментальной последовательности $\{y_n\}$ из Y можно построить эквивалентную ей последовательность $\{x_n\}$ из точек X. Для этого достаточно в качестве точки x_n взять любую точку $y_n \in Y$, такую, что $\rho(x_n, y_n) < 1/n$. Построенная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и по доказанному сходится к некоторой точке $y \in Y$. Но тогда и последовательность $y_n \to y$. Теорема доказана. ◀

1.7 Компактные метрические пространства

Определение 1. Множество K метрического пространства (X, ρ) называется компактным, если из любого покрытия K множествами, открытыми в X, можно выделить конечное покрытие.

Требование компактности пространства является весьма сильным и выделяет сравнительно узкий класс пространств, в частности, более узкий, чем полные и сепарабельные пространства.

Раньше было доказано, что множество K пространства $\mathcal{R}^n$ является компактом тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

В произвольном метрическом пространстве это утверждение уже не имеет места. Однако справедливо следующее, если $K \subset (X, \rho)$ — компакт, то K ограниченное и замкнутое множество в X.

В отличие от относительных свойств множества быть открытым или замкнутым в метрическом пространстве, свойство множества быть компактным абсолютно в том смысле, что не зависит от объемлющего пространства.

Утверждение 1. Подмножество K метрического пространства (X, ρ) является компактом в X тогда и только тогда, когда K является компактом в себе как в метрическом пространстве.

▶ Сформулированное утверждение следует из определения 1 компакта и того обстоятельства, что каждое множество G_k, открытое в K, получается пересечением K с некоторым множеством G_x, открытым в X. ◀

Пример. Возьмем евклидово пространство $(\mathcal{R}^1, \rho)$ со стандартной метрикой и $I = \{x \in \mathcal{R}^1 \,|\, 0 < x < 1\}$ — единичный интервал в $\mathcal{R}^1$. Метрическое пространство (I, ρ) замкнуто в себе и ограничено, однако это не компакт, так как оно не является компактом в $\mathcal{R}^1$.

Рассмотрим некоторые свойства компактов.

Лемма 1 (о замкнутости компакта). Если K — компакт в метрическом пространстве (X, ρ), то K — замкнутое подмножество в X.

► В силу критерия замкнутости множества достаточно проверить, что любая точка $x_0 \in X$, предельная для K, принадлежит K. Пусть точка $x_0 \notin K$. Для каждой точки $x \in K$ построим такую ее окрестность $G(x)$, что точка x_0 обладает окрестностью, не пересекающейся с $G(x)$. Совокупность $G(x)$, $x \in K$, всех таких окрестностей образует открытое покрытие K, из которого можно выделить конечное покрытие $G(x_1), ..., G(x_n)$. Если теперь $O_i(x_0)$ такая окрестность точки x_0, что $G(x_i) \cap O_i(x_0) = \varnothing$, то множество $O(x_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} O_i(x_0)$ тоже является окрестностью точки x_0, причем $G(x_i) \cap O(x_0) = \varnothing$ при $i = \overline{1, n}$. Но это означает, что $K \cap O(x_0) = \varnothing$ и точка x_0 не может быть предельной для K. ◄

Лемма 2 (о вложенных компактах). Если $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_i \supset ...$ — последовательность непустых вложенных компактов, то пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ не пусто.

► В силу леммы 1 множества $G_i = K_1 \backslash K_i$, $i = 1, 2, ...$, открыты в K_1. Если $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \varnothing$, то последовательность $G_1 \subset G_2 \subset ... \subset G_n \subset ...$ в совокупности образует покрытие K_1. Извлекая из него конечное покрытие, найдем, что некоторый элемент G_m последовательности уже покрывает K_1. Но по условию $K_m = K_1 \backslash G_m \neq \varnothing$. Полученное противоречие завершает доказательство. ◄

Лемма 3 (о замкнутом подмножестве компакта). Замкнутое подмножество F компакта K само является компактом.

► Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие F. Добавив к нему открытое множество $G = K \backslash F$, получим открытое покрытие всего компакта K. Из этого покрытия можно извлечь конечное покрытие K. Поскольку $G \cap F = \varnothing$, то из системы $\{G_\alpha\}$ выделяется конечное покрытие множества F. ◄

Данное выше определение 1 компактности метрического пространства не дает эффективного критерия проверки компактности множества. Чтобы сформулировать удобный признак компактности, нам необходимо следующее определение.

Определение 2. Пусть M — некоторое множество метрического пространства (X, ρ), а $\varepsilon > 0$ заданное число. Множество $A \subset X$ называется ε - сетью для множества M, если для любого $x \in M$ найдется хотя бы одна точка $a \in A$, что $\rho\,(a, x) \leq \varepsilon$. В частности, может быть $M = X$.

Например, целочисленные точки образуют на плоскости R^2 $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$ – сеть. Другой пример, на отрезке $[0, 1]$, разделенным на n частей, точки деления образуют $\varepsilon = 1/n$ - сеть.

Лемма 4. Если метрическое пространство (K, ρ) — компакт, то для любого $\varepsilon > 0$ в нем имеется конечная ε - сеть.

► Для каждой точки $x \in K$ возьмем открытый шар $B(x, \varepsilon)$. Из открытого покрытия K этими шарами выделим конечное покрытие $B(x_1, \varepsilon), ..., B(x_n, \varepsilon)$. Точки $x_i,\ i = \overline{1, n}$, очевидно, образуют искомую ε - сеть. ◄

Более удобным для дальнейшего использования является другое определение компакта, равносильное Определению 1.

Определение 3. Метрическое пространство (K, ρ) называется компактным, если из любой последовательности его точек можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся в K.

Равносильность определений 1 и 3 будет доказана ниже, предварительно докажем две леммы.

Лемма 5. Если из любой последовательности точек метрического пространства (K, ρ) можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность, то для любого $\varepsilon > 0$ в K имеется конечная ε - сеть.

► Если для некоторого $\varepsilon > 0$ в K не существует конечной ε - сети, то в K можно построить последовательность $\{x_n\}$ точек так, что $\rho\,(x_n, x_i) > \varepsilon$ при $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall i \in \{1, ..., n-1\}$. Из этой последовательности, очевидно, нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность. ◄

Лемма 6. Если из любой последовательности точек метрического пространства (K, ρ) можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность, то любая последовательность вложенных замкнутых непустых подмножеств из K имеет непустое пересечение.

► Если $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset ...$ — указанная последовательность замкнутых в K множеств, то, взяв в каждом из них по точке, получим последовательность $\{x_n\}$, из которой извлечем сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Ее предел $a \in K$ по построению будет принадлежать каждому из замкнутых множеств $F_n, \ n \in \mathbf{N}$. ◄

Теорема 1. Для того, чтобы метрическое пространство (K, ρ) было компактом необходимо и достаточно, чтобы из любой последовательности его точек можно было выделить сходящуюся в K подпоследовательность.

► *Необходимость.* Пусть K –компакт, а $\{x_n\}$ – последовательность его точек. Докажем, что из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества K. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечное число значений, то утверждение очевидно, поэтому можно считать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет бесконечно много различных значений. Для $\varepsilon = 1$ строим конечную 1 – сеть и берем тот замкнутый шар $B^*(a_1, 1)$, который содержит бесконечно много членов последовательности x_n. По Лемме 3 шар $B^*(a_1, 1)$ является компактом, в котором существует конечная $1/2$ – сеть и ее шар $B(a_2, 1/2)$, содержащий бесконечно много членов элементов последовательности. Так получается последовательность замкнутых вложенных шаров $B^*(a_1, 1) \supset B^*(a_2, 1/2) \supset, ...$, являющихся компактами и имеющими по Лемме 2 общую точку $a \in K$. Выбирая в шаре $B^*(a_1, 1)$ точку x_{n_1} последовательности, затем в шаре $B(a_2, 1/2)$ точку x_{n_2} с номером $n_2 > n_1$ и т.д., получим последовательность $\{x_{n_k}\}$, которая сходится к точке $a \in K$.

Достаточность. Докажем, что если из любой последовательности x_n точек метрического пространства (K, ρ) можно выделить сходящуюся в K подпоследовательность, то (K, ρ) – компакт.

В самом деле, если из некоторого покрытия $\{G_\alpha\}$ пространства (K, ρ) нельзя выделить конечное покрытие, то построив в силу Леммы 5 конечную $\varepsilon = 1$ – сеть в K, найдем замкнутый шар $B^*(a_1, 1)$, который тоже нельзя покрыть конечным набором множеств системы $\{G_\alpha\}$. Построим в шаре $B^*(a_1, 1)$ конечную

$\varepsilon = 1/2$ – сеть, найдем в нем шар $B^*(a_2, 1/2)$, который не допускает конечного покрытия множествами системы $\{G_\alpha\}$.

Получаемая таким образом последовательность вложенных замкнутых шаров $\{B^*(a_n, 1/n)\}$ в силу Леммы 6 имеет, и как видно по построению, только одну общую точку $a \in K$. Эта точка покрыта некоторым множеством G_{α_0} нашей системы G_α, и поскольку множество G_{α_0} открыто, все шары $B^*(a_n, 1/n)$ при достаточно больших n должны лежать в G_{α_0}. Полученное противоречие доказывает теорему. ◀

Тем самым доказана эквивалентность двух определений компактного метрического пространства.

Теорема 2. Компактное пространство является полным.

▶ Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность компактного пространства K. Согласно Определению 3 из $\{x_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ к некоторой точке $x_0 \in K$. Для произвольного k имеем: $\rho(x_n, x_0) \le \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x_0)$. Оба слагаемых в правой части стремятся к нулю: первое в силу фундаментальности последовательности $\{x_n\}$, а второе — по условию. А потому $\rho(x_n, x_0) \to 0$, $n \to \infty$, то есть x_0 является пределом всей последовательности $\{x_n\}$ и полнота пространства K доказана. ◀

Теорема 3 (Хаусдорфа). Для того, чтобы множество K метрического пространства (X, ρ) было компактным, необходимо, а если X — полное пространство, то и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ в X существовала конечная ε - сеть для K.

▶ *Необходимость.* Пусть условие теоремы выполнено, то есть K — компактное множество в X. Нужно доказать существование конечной ε - сети для K. Предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ не существует конечной ε - сети. Возьмем точку $x_1 \in K$. Множество, состоящее из одного элемента x_1, не образует ε - сети для множества K, поэтому найдется точка $x_2 \in K$, что $\rho(x_1, x_2) \ge \varepsilon$. Множество $\{x_1, x_2\}$ также не может быть ε - сетью для K, поэтому существует точка $x_3 \in K$: $\rho(x_i, x_3) \ge \varepsilon$, $i = 1, 2$. Рассуждая так и дальше, мы придем к последовательности точек $\{x_n\}$ из K: $\rho(x_n, x_m) \ge \varepsilon$ $(m \ne n)$. Очевидно, из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, то есть множество K не компактно, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, и для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε - сеть для $K \subset X$. Докажем, что K — компактное множество в X. Возьмем любую последовательность $\{x_m\}$ элементов множества K и докажем, что из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Для этого зададим числовую последовательность $\varepsilon_n \to 0$ $(\varepsilon_n > 0)$. Рассмотрим существующую по условию ε_1 – сеть для K. Если построить шары с центрами в точках ε_1 – сети и радиусами ε_1, то любая точка множества K попадет по крайней мере в один из этих шаров. Так как шаров конечное число, то хотя бы в одном из них окажется бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Обозначим этот шар $B(z_1, \varepsilon_1)$. Возьмем ε_2 – сеть и шары радиуса ε_2 с центрами в ее точках. Как и раньше, в один из этих шаров попадет бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, содержащихся в шаре $B(z_1, \varepsilon_1)$. Обозначим этот шар $B(z_2, \varepsilon_2)$.

Продолжая процесс, получим последовательность шаров: $\{B(z_n, \varepsilon_n)\}$. В пересечение любого их числа попадет бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Ввиду этого, мы можем выбрать $x_{m_1} \in B(z_1, \varepsilon_1)$, $x_{m_2} \in B(z_1, \varepsilon_1) \cap B(z_2, \varepsilon_2)$ $(m_2 > m_1)$, и вообще, $x_{m_k} \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} B(z_i, \varepsilon_i)$ $(m_k > m_{k-1} > ... > m_1)$. Так как любые два элемента x_{m_k} и x_{m_l} $(k \leq l)$ принадлежат шару $B(z_k, \varepsilon_k)$, то $\rho\left(x_{m_k}, x_{m_l}\right) \leq \rho\left(x_{m_k}, z_k\right) + \rho\left(z_k, x_{m_l}\right) < 2\varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{x_{m_k}\}$ — фундаментальна, и в силу полноты пространства X сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$. ◀

Следствие 1. Компактное множество K метрического пространства (X, ρ) сепарабельно.

▶ Действительно, если $\varepsilon_k \to 0$ и $M_k,\ k = 1, 2, ...$ конечная ε_k - сеть в K, то $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ будет, очевидно, счетным всюду плотным в данном пространстве множеством. ◀

Следствие 2. Компактное множество K метрического пространства (X, ρ) ограничено.

▶ Пусть $M_1 = \{x_i\}$ — конечная $\varepsilon = 1$ - сеть для K и точка $a \in X$. Обозначим $d = \max\limits_i \rho\left(a, x_i\right)$. Для любого $x \in K$ имеем $\rho\left(a, x\right) \leq 1 + d$ и следствие доказано.

◀

Замечание. Отметим различие понятий сепарабельного и компактного пространства. В первом случае требуется наличие счетного множества элементов, которыми можно было бы безгранично приблизиться к любому элементу пространства. Во втором случае мы получаем такую возможность, строя множество M, которое является объединением ε_k - сетей. Однако здесь с помощью одной ε - сети конечного числа элементов, мы можем одновременно аппроксимировать любой элемент пространства, что, вообще говоря, в первом случае не имеет места.

1.8 Относительная компактность. Теорема Арцела

Определение 1. Множество M, лежащее в метрическом пространстве (X, ρ), называется относительно компактным в X (или предкомпактным), если его замыкание в X компактно.

Понятие относительной компактности (в отличие от компактности) связано с тем пространством (X, ρ), в котором множество рассматривается. Например, множество рациональных чисел в интервале $(0, 1)$ относительно компактно, если рассматривать его как подпространство пространства $\mathcal{R}^1$, но оно не будет относительно компактным как подмножество всех рациональных чисел Q.

Теорема 1. Для того, чтобы множество M, лежащее в полном метрическом пространстве (X, ρ) было относительно компактным, необходимо и достаточно, чтобы в X существовала конечная ε – сеть для M.

▶ Доказательство сразу следует из Теоремы 3 (Хаусдорфа) и того факта, что замкнутое подмножество полного метрического пространства само полно ◀

Значение этой теоремы состоит в том, что, как правило, легче установить существование конечной ε – сети для того или иного множества, чем непосредственно доказать его относительную компактность. Вместе с тем для приложений в анализе важна именно компактность.

Приложение Теоремы 1 не всегда просто. Для множеств, расположенных в том или ином конкретном пространстве, можно дать специальные критерии компактности, более удобные для практического использования. Одним из важнейших метрических пространств является пространство $C[a, b]$. Для подпространств этого пространства критерий относительной компактности дает теорема Арцела.

Для того, чтобы ее сформулировать нам понадобятся следующие понятия.

Определение 2. Семейство $\Phi = \{\varphi\}$ функций $\varphi(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, называется равномерно ограниченным, если существует число M, что $|\,\varphi(x)| < M$ для $\forall\, x \in [a, b]$ и $\forall\, \varphi \in \Phi$.

Определение 3. Семейство $\Phi = \{\varphi\}$ функций $\varphi(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, называется равностепенно непрерывным, если для $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, что $|\,\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon$ для $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$ таких, что $\rho\,(x_1, x_2) < \delta$ и $\forall\, \varphi \in \Phi$.

Теорема 2 (Арцела). Для того, чтобы семейство всех непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, было относительно компактно в $C[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы это семейство было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным на $[a, b]$.

1.9 Отображения в метрических пространствах. Предел отображения

Определение 1. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрического пространства (X, ρ_x) в метрическое пространство (Y, ρ_y). Говорят, что точка $A \in Y$ является пределом отображения f при $x \to a$ и пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$, что для $\forall\, x \in X\, :\, 0 < \rho_x(a, x) < \delta \;\Rightarrow\; \rho_y(A, f(x)) < \varepsilon$.

Можно дать другое определение предела: в терминах окрестностей или на языке последовательностей, они вполне аналогичны тем определениям, которые были даны при рассмотрении отображения в пространстве $\mathcal{R}^n$. Поэтому их приводить не будем.

Из основных свойств предела отметим единственность предела и существование предела композиции отображений при определенных условиях.

Определение 2. Колебанием отображения $f\colon X \to Y$ на множестве $E \subset X$ называется величина

$$\omega\,(f, E) = \sup_{x_1,\, x_2 \in E} \rho\,\big(f(x_1), f(x_2)\big).$$

Имеет место следующий критерий Коши существования предела отображения: для того, чтобы отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в полное метрическое пространство Y имело предел при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся шар $B(a, \delta) \subset X$ радиуса δ, на котором колебание отображения $\omega\left(f, B(a, \delta)\right)$ было меньше ε.

Полнота пространства Y нужна при доказательстве достаточности условия критерия Коши, само же доказательство критерия аналогично случаю вещественной функции одной переменной.

Непрерывные отображения

Определение 3. Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства (X, ρ_x) в метрическое пространство (Y, ρ_y) называется непрерывным в точке $a \in X$, если для любой окрестности $V(f(a)) \subset Y$ точки $f(a) \in Y$ найдется окрестность $U(a) \subset X$ точки $a \in X$, образ которой $f(U(a))$ содержится в $V(f(a))$. Отображение $f\colon X \to Y$ называется непрерывным на X, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Множество непрерывных отображений X в Y обозначается $C(X; Y)$.

Можно дать другие определения непрерывного отображения в метрических пространствах: на языке $\varepsilon - \delta$ и языке "последовательностей".

Определение 4. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $a \in X$, если для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, что для $\forall\, x \in X\, :\, \rho_x(a, x) < \delta \;\Rightarrow\; \rho_y(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Определение 5. Отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $a \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a, последовательность $\{y_n = f(x_n)\} \to f(a) \in Y$.

Если X и Y — числовые множества, то эти определения переходят в известные определения непрерывности функции математического анализа.

Определение 6. Если отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X на метрическое пространство Y взаимно однозначно и взаимно непрерывно (то есть f и f^{-1} — непрерывные отображения), то оно называется гомеоморфизмом, а сами пространства X и Y гомеоморфны между собой.

Частным случаем гомеоморфизма является изометрическое отображение метрических пространств.

Замечание. Метрические свойства двух гомеоморфных между собой метрических пространств могут быть различны. Так, одно из них может быть полно, а другое — нет. Например, интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ гомеоморфен всей числовой прямой (отображение $x \to \operatorname{tg} x$), но при этом прямая — полное пространство, а интервал — нет.

Теорема 1 (критерий непрерывности). Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого (замкнутого) подмножества Y открыт (замкнут) в X.

▶ Поскольку прообраз дополнения есть дополнение прообраза, достаточно доказать теорему для открытых множеств.

Необходимость. Пусть отображение f непрерывно и G_y — открытое множество в Y. Докажем, что $G_x = f^{-1}(G_y)$ — открыто в X. Возьмем любую точку $x \in G_x$ и $y = f(x)$. Тогда G_y представляет собой окрестность точки y. По определению 3 непрерывного отображения найдется такая окрестность $U(x)$ точки x, что $f(U(x)) \subset G_y$, то есть $U(x) \subset G_x$. Иначе говоря, если $x \in G_x$, то существует окрестность $U(x)$ этой точки, содержащаяся в G_x. Это и означает, что G_x — открыто.

Достаточность. Пусть $G_x = f^{-1}(G_y)$ — открыто в X, если G_y открыто в Y. Возьмем любую точку $x \in X$ и любую окрестность $V(y)$ точки $y = f(x)$. Поскольку $y \in V(y)$, точка x принадлежит множеству $f^{-1}(V(y))$. Это открытое множество и служит той окрестностью точки x, образ которой $y = f(x)$ содержится в $V(y)$. Теорема доказана. ◀

Из теоремы следует, что при гомеоморфном отображении $f\colon X \to Y$ метрического пространства X на метрическое пространство Y системы открытых множеств соответствуют друг другу в том смысле, что $G_x \subset X \iff f(G_x) = G_y \subset Y$.

Теорема 2 Непрерывное отображение компактного пространства есть компактное пространство.

▶ Пусть $f\colon K \to Y$ непрерывное отображение компакта K в метрическое пространство Y. Рассмотрим какое-либо покрытие $\{V_\alpha\}$ пространства $f(K)$ открытыми в Y множествами и положим $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$. Множества U_α — открыты (как прообразы открытых множеств при непрерывном отображении) и образуют покрытие пространства K. В силу компактности K из этого покрытия можно выбрать конечное покрытие $\{U_k\},\ k = \overline{1,n}$, множества K. Тогда множества $V_k = f(U_k),\ k = \overline{1,n}$, покрывают $f(K) \subset Y$. Таким образом, $f(K)$ — компакт в Y. ►

Следствие 1. Пусть K — компактное пространство и f — непрерывная на нем вещественная функция. Тогда f ограничена на K и достигает там верхней и нижней граней.

► Функция f есть непрерывное отображение компакта K в пространство $\mathcal{R}^1$. Образ K в $\mathcal{R}^1$ в силу общей теоремы 2 компактен. Но компактное подмножество из $\mathcal{R}^1$ ограничено и замкнуто, а потому не только имеет конечные верхнюю и нижнюю грани, но и содержит эти грани. ◄

Определение 7. Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется равномерно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что на любом множестве $E \subset X$ с диаметром меньше δ колебание $\omega(f, E)$ отображения f меньше ε.

На отображения, непрерывные на компактах, дословно переносится теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Теорема 3 (о равномерной непрерывности). Непрерывное отображение $f\colon K \to Y$ метрического компакта K в метрическое пространство Y равномерно непрерывно.

► Доказательство теоремы для n-мерного евклидова пространства $\mathcal{R}^n$ практически без изменений переносится на данный случай. ◄

Теорема 4. Взаимно однозначное и непрерывное отображение $f:\ K \to Y$ компакта K в метрическое пространство Y есть гомеоморфизм.

► Нужно доказать, что из условия теоремы вытекает непрерывность обратного отображения f^{-1}. Пусть F_k замкнутое подмножество в K, а $F_y = f(F_k)$ — его образ в Y. Замкнутое подмножество F_k компакта K само является компактом. Так как отображение f непрерывно, то $F_y = f(F_k)$ тоже компакт, и, следовательно, замкнутое множество в Y. Отображение f^{-1} непрерывно по теореме 2. ◄

1.10 Принцип сжимающих (сжатых) отображений.

В качестве применения понятия полноты метрического пространства рассмотрим так называемый принцип сжатых отображений. Он часто применяется для доказательства различных теорем существования и единственности решений в теории дифференциальных уравнений и в других областях.

Рассмотрим оператор $A\colon X \to Y$, отображающий метрическое пространство X в метрическое пространство Y. Если задан некоторый элемент $y \in Y$, то на соотношение $y = A(x)$ можно смотреть как на уравнение с неизвестным x и может быть поставлена задача определения всех точек x, в которых $A(x)$ принимает заданное значение y. В случае, когда элементами пространства X являются функции, а Y — вещественные числа, уравнение $A(x) = y$ называется функциональным.

Определение 1. Если $A\colon E \to X$, то точки $x \in X$, для которых $A(x) = x$ называются неподвижными точками оператора A.

На равенство $A(x) = x$ можно смотреть как на уравнение и его решение сводится к отысканию неподвижной точки оператора A. Для отыскания неподвижных точек часто применяют метод последовательных приближений. Мы изложим общую схему этого метода, а затем будут указаны некоторые условия, обеспечивающие его сходимость. Будем полагать, что оператор A задан на некотором замкнутом множестве F метрического пространства X, непрерывен и все его значения также принадлежат множеству F. Возьмем точку $x_0 \in F$ и пусть $x_1 = A(x_0)$. Если бы точка x_0 была неподвижной, тогда $x_1 = x_0$, но при произвольном выборе x_0, как правило, будет $x_1 \neq x_0$. Далее положим $x_2 = A(x_1), x_3 = A(x_2), ..., x_{n+1} = A(x_n)$. При этом, по условию, если $x_n \in F$, то и $x_{n+1} \in F$. Продолжая процесс до бесконечности, получим последовательность точек $\{x_n\} \in F,\ n = 1, 2, ...$ Если окажется, что существует $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (в этом случае говорят, что процесс сходится), то вследствие замкнутости F будет $x^* \in F$. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = A(x_n)$ при $n \to \infty$, получим $x^* = A(x^*)$, то есть x^* — неподвижная точка.

Рассмотрим операторы (отображения), для которых неподвижная точка заведомо существует и может быть найдена методом последовательных приближений (процесс сходится).

Определение 2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Отображение $A : X \to X$ пространства X в себя называется сжимающим (или сжатым), если для любых двух точек $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leq q\rho(x, y), \quad 0 < q < 1. \tag{1}$$

Всякое отображение сжатия непрерывно. Действительно, если $x_m \to x$, то в силу (1) $Ax_m \to Ax$.

Теорема 1 (Пикара-Банаха — принцип сжимающих отображений). Если оператор сжатия $A\colon X \to X$ отображает полное метрическое пространство X в себя, то он имеет единственную неподвижную точку и она может быть получена методом последовательных приближений при любом начальном значении $x_0 \in X$.

► Возьмем произвольное $x_0 \in X$. Из формулы $x_{n+1} = A(x_n)$ и условия (1) получим при любом n: $\rho\,(x_n, x_{n+1}) = \rho(A(x_{n-1}), A(x_n)) \leq q\rho(x_{n-1}, x_n)$. Повторяя эту процедуру n раз, находим $\rho\,(x_n, x_{n+1}) \leq q\rho(x_{n-1}, x_n) \leq \ldots \leq q^n\rho(x_0, x_1)$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ — фундаментальная. Пусть $m \geq n$, тогда

$$\rho\,(x_n, x_m) \leq q^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leq q^n\left[\rho\,(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\right] \leq$$
$$\leq q^n\rho\,(x_0, x_1)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-n-1}) \leq q^n\rho\,(x_0, x_1)\frac{1}{1-q}. \tag{2}$$

Так как $q < 1$, то при $n \to \infty$ $\rho\,(x_n, x_m) \to 0$.

В силу полноты пространства X фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ имеет предел: $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1} = A(x_n)$, получим $x = A(x)$, то есть x — неподвижная точка оператора A.

Единственность неподвижной точки можно доказать из условия сжатия (1). Если x и y — две неподвижные точки, то $\rho\,(x, y) = \rho\,(A(x), A(y)) \leq q\rho\,(x, y)$ откуда следует $\rho\,(x, y) = 0$, то есть $x = y$. ◄

Замечание 1. Если в неравенстве (2) перейти к пределу при $m \to \infty$, то получим

$$\rho(x_n, x) \leq q^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-q}.$$

Это есть оценка погрешности, получающаяся при замене x на x_n. Эта погрешность убывает со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q < 1$. Кроме того, из данной оценки видно, что при одном и том же n точность приближения тем выше, чем ближе x_1 к x_0, поэтому, если положение точки x приблизительно известно, то для вычислений выгодно взять x_0 вблизи x, тогда и $x_1 = A(x_0)$ будет близко от x, следовательно, и от x_0.

Замечание 2. Так как замкнутое множество полного метрического пространства X само является полным метрическим пространством, то теорема 1 верна и для оператора сжатия, заданного не на всем X, а на его подмножестве F, если множество значений оператора также содержится в F. При этом за начальную точку процесса последовательных приближений можно принять любую точку $x_0 \in F$.

1.11 Некоторые приложения принципа сжатых отображений

Принцип сжатых отображений может быть применен к доказательству теорем существования и единственности решений для уравнений различных типов. Одновременно с доказательством существования и единственности решения уравнения $Ax = x$ принцип сжатых отображений дает и фактический метод приближенного нахождения этого решения.

1. Пусть функция f определена на $[a, b]$, удовлетворяет условию Липшица $|f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$ с константой $L < 1$ и отображает отрезок $[a, b]$ в себя. Тогда f есть сжатое отображение по определению 2 и последовательность $x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), ...$ сходится к единственному корню уравнения $x = f(x)$.

В частности, условие сжатости будет выполнено, если функция имеет на $[a, b]$ производную $f'(x)$, причем $|f'(x)| \leq L < 1$.

Пусть имеем уравнение вида $F(x) = 0$, причем $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ и $0 < K_1 \leq F'(x) \leq K_2$ на $[a, b]$. Для отыскания корня введем функцию $f(x) = x - \lambda F(x)$ и будем искать решение уравнения $f(x) = x \iff F(x) = 0$. Так как $f'(x) = 1 - \lambda F'(x)$, то $1 - \lambda K_2 \leq f'(x) \leq 1 - \lambda K_1$ и нетрудно подобрать λ так, чтобы можно было действовать методом последовательных приближений. Это распространенный метод отыскания корня уравнения.

2. Рассмотрим отображение $A\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ пространства $\mathcal{R}^n$ в себя, задаваемое системой линейных уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad (y = Ax + b).$$

Если A есть сжатое отображение, то мы можем применить метод последовательных приближений к решению уравнения $x = Ax$. При каких условиях отображение A будет сжатым, ответ на вопрос зависит от выбранной метрики.

а) Евклидово пространство $\mathcal{R}^n$, то есть $\rho\,(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$. На основании неравенства Коши-Буняковского имеем

$$\rho^2(y', y'') = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}(x'_j - x''_j)\right)^2 \leq \left(\sum_i \sum_j a_{ij}^2\right) \rho^2(x', x'').$$

Отсюда получим условие сжатости $\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2 \leq q < 1$.

б) Пространство $\mathcal{R}^n$ с метрикой $\rho_0(x, y) = \max\limits_i |x_i - y_i|$. Условие сжатости $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq q < 1,\ i = \overline{1,n}$.

в) Пространство $\mathcal{R}^n$ с метрикой $\rho_1(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Условие сжатости $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq q < 1,\ j = \overline{1,n}$.

Каждое из условий достаточно для сжатости отображения $y = Ax$. Ни одно из них не является необходимым для применения метода последовательных приближений.

1.12 Топологические пространства

В теории метрических пространств мы вводили основные понятия — окрестности, предельной точки, открытого множества и другие, с помощью метрики, заданной в этом пространстве. Можно использовать другой путь, и не вводя метрику в множестве X, непосредственно определить в X систему открытых множеств путем аксиом. Этот путь приводит нас к топологическим пространствам, по отношению к которым метрические пространства представляют собой хоть и весьма важный, но частный случай.

Определение 1. Множество X называется топологическим пространством, если в нем выделена любая система τ его подмножеств G. называемая топологией, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) пустое множество $\emptyset$ и само X входят в τ;

2) объединение $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ любого числа множеств $G_\alpha \in \tau$ принадлежит τ;

3) пересечение $\bigcap\limits_{k} G_k$ конечного числа множеств $G_k \in \tau$ принадлежит τ.

Множества, принадлежащие системе τ, называются открытыми.

Таким образом, множество X с заданной в нем топологией τ называется топологическим пространством и обозначается (X, τ). Элементы топологического пространства называются точками.

Задать топологическое пространство — это значит задать некоторое множество X и в нем топологию τ, то есть указать те подмножества, которые считаются в X открытыми. Ясно, что в одном множестве можно вводит разные топологии и получать разные топологические пространства.

Множества $F = X \backslash G$, дополнительные к открытым, называются замкнутыми множествами топологического пространства X. Из аксиом 1) – 3), в силу соотношений двойственности, вытекает:

1') пустое множество $\emptyset$ и все X замкнуты;

2') пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ любого числа замкнутых множеств $F_\alpha \in X$ замкнуто;

3') объединение $\bigcup\limits_{k} F_k$ конечного числа замкнутых множеств $F_k \in X$ замкнуто.

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

2.1 Линейные пространства

Понятие линейного или векторного пространства известно из курса алгебры. Здесь мы просто напомним некоторые понятия линейной зависимости или независимости векторов, базиса пространства и другие.

Определение 1. Непустое множество элементов $\mathbf{L}$ называется линейным или векторным пространством, если:
1) для любых элементов x и y однозначно определен элемент $z \in \mathbf{L}$, называемый их суммой и обозначаемый $z = x + y$;
2) для любого числа $\lambda \in \mathbf{R^1}$ и любого $x \in \mathbf{L}$ определен элемент $\lambda x \in \mathbf{L}$, называемый произведением элемента на число.

Таким образом, в линейном пространстве определены операции сложения элементов и умножения на число, результатом которых является элемент этого пространства.

Введенные арифметические операции должны удовлетворять известным из алгебры условиям, которые называются аксиомами линейного пространства.

Определение 2. Элементы $x_1, x_2, ..., x_n$ линейного пространства $\mathbf{L}$ называются линейно зависимыми, если $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$, где не все числа λ_i равны нулю. В противном случае эти элементы называются линейно независимыми.

Если в пространстве $\mathbf{L}$ существуют n линейно независимых элементов, а любые $(n+1)$ элементов линейно зависимы, то говорят, что пространство $\mathbf{L}$ имеет размерность n. Если же в пространстве $\mathbf{L}$ можно указать систему из любого конечного числа линейно независимых элементов, то пространство $\mathbf{L}$ называют бесконечно мерным.

Любая система из n линейно независимых элементов n - мерного пространства $\mathbf{L}$ называется базисом этого пространства.

Определение 3. Непустое множество $E \subset \mathbf{L}$ называется подпространством $\mathbf{L}$, если оно само является пространством по отношению к операциям сложения элементов и умножения на число, определенным в $\mathbf{L}$.

Очевидно, что пересечение любого множества подпространств из $\mathbf{L}$ есть снова подпространство. В самом деле, если $\mathbf{L}^* = \bigcap_\alpha \mathbf{L}_\alpha$, $\mathbf{L}_\alpha \subset \mathbf{L}$, и $x, y \in \mathbf{L}^*$, то и $\lambda x + \mu y \in \mathcal{L}^*$ при $\forall\, \lambda, \mu$.

Пусть E некоторое множество в $\mathbf{L}$, тогда существует наименьшее линейное множество $\mathbf{L(E)}$, содержащее E. Это будет пересечение всех линейных множеств, содержащих E. Множество $\mathbf{L(E)}$ называется линейной оболочкой множества E.

Любая система линейно независимых элементов $\{x_\alpha\} \subset \mathbf{L}$ называется алгебраическим базисом линейного пространства $\mathbf{L}$, если линейная оболочка этих элементов $\mathbf{L}(\{\mathbf{x}_\alpha\}) \subset \mathbf{L}$.

Определение 4. Линейные пространства $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^*$ называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие, которое согласовано с операциями сложения элементов и умножения на число в $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^*$. Это означает, что из соответствия

$$x \longleftrightarrow x^*, \quad y \longleftrightarrow y^*, \quad x, y \in \mathcal{L},\ x^*, y^* \in \mathbf{L}^*$$

следует $x + y \longleftrightarrow x^* + y^*$, $\lambda x \longleftrightarrow \lambda x^*$.

Соответствующее взаимно однозначное отображение пространств в этом случае называется изоморфным.

Примером изоморфных линейных пространств могут служить пространство $\mathbf{R^n}$ и пространство многочленов степени не выше $(n-1)$.

2.2 Линейные нормированные пространства

Определение 1. Линейное пространство $\mathcal{L}$ называется нормированным, если каждому элементу $x \in \mathcal{L}$ поставлено в соответствие вещественное число, называемое его нормой и обозначаемое $||\,x||$, которое удовлетворяет следующим условиям:

1) $||\,x|| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$ (невырожденность);

2) $||\,\lambda x|| = |\lambda|\,||\,x||$ (однородность);

3) $||\,x + y|| \le ||\,x|| + ||\,y||$ (неравенство треугольника).

Норма всегда неотрицательна, действительно из 3) при $x = -y \Longrightarrow 2||x|| \ge 0$.

Если условие 1) Определения 1 заменить на $||\,x|| \ge 0$ для $\forall\, x \in \mathcal{L}$, то величина $||\,x||$ называется полунормой, а пространство $\mathcal{L}$ полунормированным.

Определение 2. Две нормы $||\,x||$ и $||x||^*$ в линейном пространстве $\mathcal{L}$ называются эквивалентными, если существует такие постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, что $C_1||\, x|| \leq ||\, x||^* \leq C_2||\, x||$ для $\forall\, x \in \mathcal{L}$.

Можно доказать, что в конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.

Всякое линейное нормированное пространство $\mathcal{L}$ становится метрическим пространством, если для $\forall\, x, y \in \mathcal{L}$ положить

$$\rho\,(x, y) = ||\, x - y|| \qquad (1)$$

Поскольку $x - \theta = x$, то $||\, x|| = \rho\,(\theta, x)$, то есть норма элемента x равна его расстоянию от элемента θ.

Справедливость аксиом метрического пространства для метрики (1) непосредственно следует из аксиом нормированного пространства. Таким образом на нормированные пространства переносятся все свойства и понятия метрического пространства.

Метрика в нормированном пространстве обладает двумя дополнительными свойствами:

1) она инвариантна относительно переносов

$$\rho\,(x + a, y + a) = ||\,(x + a) - (y + a)|| = ||\, x - y|| = \rho\,(x, y).$$

2) и однородна

$$\rho\,(\lambda x, \lambda y) = ||\, \lambda x - \lambda y|| = ||\, \lambda(x - y)|| = |\,\lambda|||\, x - y|| = |\,\lambda|\,\rho\,(x, y)$$

Определение 3. Полное нормированное пространство с метрикой (1) называется Банаховым пространством или $\mathcal{B}$ – пространством. Эти пространства играют важную роль в функциональном анализе.

Многие из рассмотренных ранее метрических пространств могут быть наделены структурой нормированного пространства.

Предварительно рассмотрим некоторые неравенства.

а) Неравенство Юнга. Пусть $0 < \alpha < 1$, тогда функция $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0$ при $\forall\, x \geq 0$.

Пусть $\alpha > 0$, $b > 0$, $p > 1$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Подставив в функцию $f(x)$ значения $x = a/b$, $\alpha = 1/p$, получим неравенство Юнга

$$a^{1/p} \cdot b^{1/q} \leq a\, p^{-1} + b\, q^{-1}. \qquad (2)$$

б) Неравенство Гёльдера. Подставив в (2)

$$a = x_i^p / \sum_{j=1}^n x_j^p, \quad b = y_i^q / \sum_{j=1}^n y_j^q,$$

получим

$$\frac{x_i y_i}{(\sum\limits_j x_j^p)^{1/p} (\sum\limits_j y_j^q)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{x_i^p}{\sum\limits_j x_j^p} + \frac{1}{q} \frac{y_i^q}{\sum\limits_j y_j^q}.$$

Просуммировав по i от 1 до n, придем к неравенству Гёльдера

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}. \tag{3}$$

в) Неравенство Миньковского. Запишем тождество

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i (x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i (x_i + y_i)^{p-1}.$$

Применив к каждому из членов правой части неравенство Гёльдера и произведя сокращения, получим неравенство Миньковского

$$\left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right]^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{1/q}. \tag{4}$$

Существуют интегральные формы неравенств Гёльдера и Миньковского.

Рассмотрим примеры нормированных пространств.

1. Пространство $\mathcal{R}^1$ становится нормированным, если положить для $\forall\, x \in \mathcal{R}^1$: $||\, x|| = |\, x|$.

Пространство $\mathcal{R}^n$ с элементами $x = (x_1, x_2 < ..., x_n)$ будет нормированным, если положить $||\, x|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}$. Формула $\rho\,(x, y) = ||\, x - y||$ определяет евклидову метрику. В этом пространстве можно ввести другие нормы

$$||\, x||_1 = \sum_{k=1}^n |\, x_n| \text{ и } ||\, x||_{\,0} = \max_k |\, x_k|$$

они приводят к известным метрикам $\rho_{\,1}$ и ρ_0.

Если для вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{R}^n$ положить

$$||\, x||_{\,p} = \left(\sum_{k=1}^n |\, x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \tag{6}$$

то мы получим нормированное пространство, которое обозначают $\mathcal{R}_p^n$. С помощью неравенства Миньковского можно установить, что $||\, x||_{\,p}$ действительно является нормой.

Можно доказать, что

$$||\,x||_{\,p_2} \leq ||\,x||_{\,p_1}, \quad \text{если } 1 \leq p_1 \leq p_2,$$

и $||\,x||_{\,p} \to \max\limits_k \{x_k\} = ||\,x||_{\,0}$ при $p \to \infty$.

Очевидно

$$||\,x||_0 \leq ||\,x||_p \leq ||\,x||_1 \leq n||\,x||_{\,p=\infty} \text{ при } p \geq 1.$$

Из Определения 3 следует, что $\mathcal{R}_p^n$ – Банахово пространство.

2. Пространство ℓ_p, $p \geq 1$ – пространство всех числовых последовательностей, для которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\,x|^p$ сходится. Для $\forall\, x \in \ell_p$ положим

$$||\,x||_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\,x|^p \right)^{1/p} \tag{7}$$

С помощью неравенства Миньковского можно показать, что ℓ_p является Банаховым пространством с нормой (7).

3. Пространство $C[a,b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$. Определим норму формулой

$$||\,f(x)|| = \max_{x \in\,[a,b]} |\,f(x)| \tag{8}$$

Метрика, соответствующая этой норме, совпадает с рассмотренной ранее, а пространство является полным. Таким образом, пространство $C[a,b]$ с нормой (8) является Банаховым.

Если в $C[a,b]$ ввести другую норму

$$||\,f(x)|| = \left(\int_a^b |\,f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \tag{9}$$

которая сводится к норме (8) при $p \to \infty$, то пространство $C[a,b]$ при $1 \leq p \leq +\infty$ уже не будет полным.

4. В пространстве m ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ положим $||\,x|| = \sup\limits_k |\,x_k|$. Условия нормы будут выполнены, метрика совпадает с рассмотренной ранее.

2.3 Сходимость в нормированном пространстве

Если применить общее определение сходимости последовательности в метрическом пространстве к нормированному пространству, то получим: сходимость

$x_m \to x$ означает, что $||\,x_m - x|| \to 0$ при $m \to \infty$. Эту сходимость называют сходимостью по норме. Очевидно, что справедлива теорема о единственности предела (для полунормы эта теорема вообще говоря не имеет места).

По общим свойствам метрики в метрическом пространстве $\rho\,(x, y) = ||x - y||$ – непрерывная функция своих аргументов, то есть, если $x_m \to x$, $y_m \to y$, то $||\,x_m - y_m|| \to ||\,x - y||$. В частности, полагая все $y_m = \theta$, получим, что $||\,x_m|| \to ||\,x||$ при $x_m \to x$ (непрерывность нормы). Однако из того, что $||\,x_m|| \to ||x||$ не следует, что $x_m \to x$ (то есть, что $||\,x_m - x|| \to 0$).

Фундаментальная последовательность $\{x_m\}$ в нормированном пространстве X, в соответствии с определением метрики, характеризуется условием $||\,x_m - x_n|| \to 0$ при $m, n \to \infty$. Из теоремы об ограниченности фундаментальной последовательности следует, что нормы элементов любой фундаментальной последовательности в совокупности ограничены.

Условие полноты нормированного пространства X выглядит так: из того, что $||\,x_m - x|| \to 0$ следует существование элемента $x \in X$, что $x_m \to x$ при $m \to \infty$.

Свойство непрерывности основных арифметических операций в нормированном пространстве.

а) Если $x_m \to x$, $y_m \to y$, то $x_m + y_m \to x + y$.

► $||\,(x_m + y_m) - (x + y)|| = ||\,(x_m - x) + (y_m - y)|| \leq$
$\leq ||\,x_m - x|| + ||\,y_m - y|| \to 0, \ m \to \infty$. ◄

б) Если $x_m \to x$, $\lambda_m \to \lambda$, то $\lambda_m x_m \to \lambda x$.

► $||\,\lambda_m x_m - \lambda x|| = ||\,\lambda_m(x_m - x) + (\lambda_m - \lambda)x|| \leq$
$\leq |\,\lambda_m|\,||\,x_m - x|| + |\,\lambda_m - \lambda|\,||\,x|| \to 0, \ m \to \infty$. ◄

Для ограниченного множества в линейном нормированном пространстве X можно дать другое определение, равносильное общему определению в произвольном метрическом пространстве.

Определение 1. Множество $E \subset X$ ограничено, если нормы всех его элементов в совокупности ограничены.

Докажем эквивалентность определений.

► Действительно, если множество E ограничено по общему определению, то оно содержится в некотором шаре $E \subset B(x_0, r)$. Следовательно, для $\forall\, x \in E$ будет $\rho\,(x_0, x) = ||\, x - x_0|| \le r$, а тогда

$$||\, x|| = ||\,(x - x_0) + x_0|| \le ||\, x - x_0|| + ||\, x_0|| \le r + ||\, x_0||.$$

Обратно, если $||\, x|| \le r$ для $\forall\, x \in E$, то $E \subset B(\theta, r)$ и тем самым E ограничено по общему определению. ◀

Можно дать другое определение эквивалентности норм в линейном нормированном пространстве.

Определение 2. Две нормы в линейном нормированном пространстве X называются эквивалентными, если из сходимости последовательности $x_m \to x$ в одной норме следует сходимость к этому же элементу в другой норме.

Теорема 1. Всякое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором $\mathcal{B}$ – пространстве.

▶ Пусть X – линейное нормированное пространство и X^* – его пополнение как метрического пространства. С точностью до изометрии $X \subset X^*$. В силу плотности X в X^* для $\forall\, x, y \in X^*$ существуют последовательности x_n и y_n из X такие, что $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$. Покажем, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится. Действительно,

$$\rho\,(x_m + y_m, x_n + y_n) = ||\,(x_m + y_m) - (x_n + y_n)|| \le$$
$$\le ||\, x_m - x_n|| + ||\, y_m - y_n|| = \rho\,(x_m, x_n) + \rho\,(y_m, y_n) \to 0,$$

так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – фундаментальные. В силу полноты X^* последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится в X^*. Положим по определению

$$x + y = \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n).$$

Аналогично с помощью предельного перехода определим и элемент λx, $x \in X^*$.

Можно доказать, что определенные так алгебраические операции $x + y$ и λx для элементов пространства X^* не зависят от выбора последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из X. Если элементы $x, y \in X$, то легко убедиться, что определенные нами алгебраические операции совпадают с заданными на X.

Определим теперь норму для $\forall\, x \in X^*$. Пусть $x_n \in X$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Покажем, что последовательность $\{||\, x_n||\}$ – фундаментальна в X. Для $\forall\, m, n$

$$|\, ||\, x_m|| - ||\, x_n||\, | \le ||\, x_m - x_n|| = \rho\,(x_m, x_n) \qquad (1)$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она фундаментальна, поэтому из (1) следует, что и числовая последовательность $\{|| x_n||\}$ фундаментальна и сходится.

Положим по определению $|| x|| = \lim\limits_{n\to\infty} || x_n||$.

Так определенная норма $|| x||$ не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$ из X такой, что $x_n \to x$. Легко проверить для $|| x||$ выполнение аксиом нормы и что в случае $x \in X$ мы получим прежнюю норму. ◄

Определение 3. Последовательность $\{e_n\}$, $n = 1, 2, ...$ элементов полного линейного нормированного пространства $\mathcal{B}$ называется его базисом, если любое конечное число элементов e_i линейно независимы и если любой элемент $x \in \mathcal{B}$ представим единственным образом в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n, \quad \text{где } \lambda_n \in \mathcal{R}^1. \qquad (2)$$

Эта формула называется разложением элемента $x \in \mathcal{B}$ по базису $\{e_n\}$. Таким образом, если последовательность $\{e_n\}$ является базисом пространства $\mathcal{B}$, то для каждого $x \in \mathcal{B}$ существует единственная последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ такая, что для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что при $\forall\, n > n_\varepsilon$

$$|| x - (\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n)|| < \varepsilon.$$

Если Банахово пространство имеет базис из счетного или конечного множества элементов, то это пространство сепарабельно. Действительно, легко проверить, что множество всех конечных линейных комбинаций элементов указанного базиса с рациональными коэффициентами счетно и плотно во всем пространстве.

Существуют сепарабельные Банаховы пространства, в которых нет счетного базиса.

2.4 Линейные операторы

Определение 1. Отображение $A\colon X \to Y$, где X и Y – линейные пространства, называется линейным оператором, если для любых элементов $x, x_1, x_2 \in X$ и $\forall\, \lambda \in \mathcal{R}^1$ будет

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2),$$

$$A(\lambda x) = \lambda A(x)$$

Если Y – числовое множество, то отображение $A(x)$ называется линейным функционалом.

Определение 2. Пусть $A\colon X \to Y$ – линейный оператор, где X, Y – линейные нормированные пространства. Величина

$$||\,A|| = \sup_{x\in X} \frac{||\,A(x)||_Y}{||\,x||_X}, \quad x \neq \theta \tag{1}$$

называется нормой линейного оператора. Дальше индексы у норм опускаем.

Пользуясь свойством нормы вектора и оператора равенство (1) запишем в виде

$$||\,A|| = \sup_{x\neq\theta} ||\,A\left(\frac{x}{||\,x||}\right)|| = \sup_{||\,e||=1} ||\,Ae|| \tag{2}$$

Из Определения 2 следует, если норма оператора конечна, то

$$||\,A(x)|| \leq ||\,A||\,||\,x||, \quad x \in X \tag{3}$$

Определение 3. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется ограниченным, если существует число $M > 0$, что для $\forall\, x \in X$

$$||\,A(x)|| \leq M\,||\,x|| \tag{4}$$

Если норма оператора конечна, то она равна $\inf\{M\}$ всех чисел M для которых выполняется неравенство (4).

Таким образом, ограниченными являются только те операторы, которые имеют конечную норму. В конечномерных линейных пространствах все нормы эквивалентны и конечны. Поэтому любой линейный оператор $A\colon X \to Y$ в случае конечномерных пространств X и Y ограничен при любом выборе норм в этих пространствах.

Из формулы (2) ясен геометрический смысл нормы линейного оператора $A\colon \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^m$. В этом случае сфера $||\,e|| = 1$ пространства $\mathcal{R}^n$ переходит в некоторый эллипсоид в $\mathcal{R}^m$, а норма оператора A является наибольшей из полуосей.

В случае пространства бесконечной размерности норма оператора A не обязательно будет конечной.

Так как всякое линейное нормированное пространство является метрическим пространством, то можно говорить о непрерывности линейного оператора.

Теорема 1. Если $A\colon X \to Y$ – линейный оператор, X и Y – линейные нормированные пространства, то следующие условия равносильны:

a) A имеет конечную норму;

b) A – ограниченный оператор;

c) A – непрерывный оператор;

d) A – непрерывен в точке $x = \theta \in X$.

► Докажем замкнутую цепочку импликаций $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c) \Longrightarrow d)$. Ввиду неравенства (3) очевидно $a) \Longrightarrow b)$. Проверим, что из $b) \Longrightarrow c)$, то есть, что из $(4) \Longrightarrow c)$. Учитывая линейность оператора A, можно записать

$$A(x+h) - A(x) = A(h)$$

В силу (4) получим оценку

$$||\,A(x+h) - A(x)|| \leq M\,||\,h|| \to 0 \text{ при } h \to 0$$

из которой следует непрерывность оператора A в точке $x \in X$.

В частности, если $x = \theta$, то из $c) \Longrightarrow d)$. Осталось показать, что из $d) \Longrightarrow a)$. Если оператор A непрерывен в точке $x = \theta$, то для $\forall\,\varepsilon > 0$ найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при $\max\{||\,x||\} < \delta$ иметь $||\,A(x)|| < \varepsilon$. Тогда для любого единичного вектора $e \in X$ получаем

$$||\,A(e)|| = \frac{1}{\delta}\,||\,A(\delta e)|| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

То есть $||\,A|| \leq \varepsilon/\delta < +\infty$ ◄

Теорема 2. Если X, Y, Z – линейные нормированные пространства и $A\colon X \to Y$, $B\colon Y \to Z$, где A, B – линейные ограниченные операторы, то норма композиции операторов $B \cdot A\colon X \to Z$ ограничена и $||\,B \cdot A|| \leq ||\,B|| \cdot ||\,A||$.

► Для $\forall\,x \in X$ имеем

$$||\,(B \cdot A)(x)|| = ||\,B(A(x))|| \leq ||\,B||\,||\,A(x)|| \leq ||\,B||\,||\,A||\,||\,x||$$

В силу неравенства (4) получаем требуемый результат. ◄

Обозначим $\mathcal{L}(X,Y)$ – множество всех линейных непрерывных операторов $A\colon X \to Y$, для которых положим

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x), \quad (\lambda A)(x) = \lambda A(x)$$

Очевидно, если $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, то $(A+B) \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\lambda A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Таким образом $\mathcal{L}$ можно рассматривать как линейное пространство. Его называют линейным пространством, сопряженным с X.

Теорема 3. Норма линейного оператора $A\colon X \to Y$ является нормой в линейном пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ всех непрерывных линейных операторов.

► Согласно Теореме 1, для любого непрерывного оператора $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ определено число $||\,A|| < +\infty$. Неравенство (3) показывает, что $||\,A|| = 0 \Longleftrightarrow A = \theta$. Если A и B – два элемента пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, то

$$||\,A+B|| = \sup_{x\neq\theta} \frac{||\,(A+B)(x)||}{||\,x||} = \sup_{x\neq\theta} \frac{||\,A(x)+B(x)||}{||\,x||} \le$$

$$\le \sup_{x\neq\theta} \frac{||\,A(x)||}{||\,x||} + \sup_{x\neq\theta} \frac{||\,B(x)||}{||\,x||} = ||\,A|| + ||\,B||,$$

$$||\,\lambda A|| = \sup_{x\neq\theta} \frac{||\,(\lambda A)(x)||}{||\,x||} = \sup_{x\neq\theta} \frac{|\,\lambda|\,||\,A(x)||}{||\,x||} = |\,\lambda|\,||\,A||$$

Таким образом все аксиомы нормы выполнены. ◄

Теперь под символом $\mathcal{L}(X,Y)$ будем иметь в виду нормированное пространство линейных непрерывных операторов.

2.5 Последовательности линейных операторов

В пространстве линейных операторов $\mathcal{L}(X,Y)$ можно ввести различные виды сходимости.

Определение 1. Пусть $\{A_n\}$ – последовательность линейных операторов пространства $\mathcal{L}(X,Y)$: $A_n\colon X \to Y$, где X, Y – нормированные пространства. Последовательность операторов $\{A_n\}$ называется равномерно сходящейся к оператору $A\colon X \to Y$, если $||\,A_n - A|| \to 0$ при $n \to \infty$. Эту сходимость называют также сходимостью по норме или сильной сходимостью и обозначают $A_n \Longrightarrow A$, $n \to \infty$.

Определение 2. Последовательность $\{A_n\}$ линейных операторов пространства $\mathcal{L}(X,Y)$ называется точечно сходящейся к оператору $A\colon X \to Y$, если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$ для $\forall\, x \in X$. Точечную сходимость называют также слабой сходимостью и обозначают $A_n \to A$, $n \to \infty$.

Легко убедиться, что из равномерной сходимости последовательности $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ следует точечная сходимость, обратное утверждение не имеет места.

Название равномерной сходимости оправдано тем, что если $A_n \Longrightarrow A$, то $A_n(x) \rightrightarrows A(x)$ относительно x в любом шаре $B^*(\theta, r)$, ($||\,x|| \leq r$).

▶ Действительно, для $\forall\, \varepsilon > 0$ выберем $n > n_\varepsilon$: $||\,A_n - A|| < \varepsilon/r$, тогда

$$||\,A_n(x) - A(x)|| \leq ||\,A_n - A||\,||\,x|| < \varepsilon \text{ для } \forall\, x \in B^*(\theta, r)$$

Обратно, если $A_n(x) \rightrightarrows A(x)$ равномерно для $\forall\, x \in B^*(\theta, r)$, то $A_n(x) \rightrightarrows A(x)$ равномерно и при $x \in B^*(\theta, 1)$, то есть $||\,A_n - A|| < \varepsilon$. ◀

Лемма 1. Если последовательность $\{A_n\}$ линейных операторов точечно сходится к оператору $A\colon X \to Y$ и нормы операторов A_n в совокупности ограничены, то предельный оператор тоже линеен и ограничен.

▶ Для $\forall\, x, y \in X$:

$$A(x+y) = \lim_{n\to\infty} A_n(x+y) = \lim_{n\to\infty}(A_n(x) + A_n(y)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} A_n(x) + \lim_{n\to\infty} A_n(y) = A(x) + B(y),$$

$$A(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda A(_n(x) = \lambda \lim_{n\to\infty} A_n(x) = \lambda A(x).$$

Линейность оператора A доказана.

По условию $||\,A_n(x)|| \leq C||\,x||$ для $\forall\, n$, $C > 0$ – const. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$||\,A(x)|| \leq C\,||\,x|| \text{ для } \forall\, x \in X \quad ◀$$

Теорема 1. Если Y – банахово пространство, то и $\mathcal{L}(X;Y)$ также является банаховым пространством.

▶ Пусть $\{A_n\}$ – фундаментальная последовательность операторов в $\mathcal{L}(X;Y)$, сходящаяся в себе по норме этого пространства: $||\,A_m - A_n|| \to 0$, $m, n \to \infty$. Поскольку при $\forall\, x \in X$

$$||\,A_m(x) - A_n(x)|| = ||\,(A_m - A_n)(x) \leq ||\,A_m - A_n||\,||\,x||,$$

то ясно, что при $\forall\, x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ – фундаментальна в Y. Так как Y – полное пространство, то эта последовательность имеет предел в Y, который обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x) = A(x)$. Покажем, что $A\colon X \to Y$ – линейный ограниченный (следовательно непрерывный) оператор. Линейность следует из равенств

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_{n\to\infty}(\lambda_1 A_n x_1 + \lambda_2 A_n x_2) =$$

$$= \lambda_1 \lim_{n\to\infty} A_n x_1 + \lambda_2 \lim_{n\to\infty} A_n x_2.$$

Далее, при $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$, что при $\forall\, m, n > n_\varepsilon$

$$||\, A_m - A_n|| < \varepsilon \Longrightarrow ||\, A_m x - A_n x|| \le \varepsilon ||\, x|| \text{ для } \forall\, x \in X$$

Устремляя в последнем неравенстве $m \to \infty$ и пользуясь непрерывностью нормы, получим

$$||\, Ax - A_n x|| \le \varepsilon\, ||\, x||$$

Таким образом, $||\, A - A_n|| \le \varepsilon$ и $||\, A|| \le ||\, A - A_n|| + ||\, A_n|| \le \varepsilon + ||\, A_n||$, оператор A – ограничен.

Следовательно, мы доказали, что $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ и $||\, A - A_n|| \to 0$, $n \to \infty$, то есть $A = \lim\limits_{n\infty} A_n$ в смысле нормы пространства $\mathcal{L}(X; Y)$. ◀

Теорема 2 (Банаха – Штейнгауза). Если последовательность линейных операторов $\{A_n\}$, определенных на банаховом пространстве $\mathcal{B}$, ограничена в каждой точке $x \in \mathcal{B}$, то последовательность норм этих операторов $\{||\, A_n||\}$ также ограничена.

▶ Без доказательства. ◀

2.6 Распространение линейных операторов

Определение 1. Пусть $E \subset X$ – некоторое подмножество нормированного пространства X, а $A\colon E \subset X \to Y$ – линейный оператор, заданный на E, со значениями в нормированном пространстве Y. Если существует линейный оператор $U\colon X \to Y$ такой, что $Ux = Ax$ для $\forall\, x \in E$, то оператор U называется распространением оператора A с пространства E на пространство X.

Ясно, что с расширением области задания оператора A с E на X, его норма не может уменьшиться, то есть $||\, A||_E \le ||\, U||_X$. Если $||\, A||_E = ||\, U||_X$, то говорят, что распространение осуществлено с сохранением нормы.

Теорема 1. Пусть X – нормированное пространство, $E \subset X$ – всюду плотное в X подмножество, $A\colon E \subset X \to Y$ – линейный ограниченный оператор со значениями в банаховом пространстве Y. Тогда оператор A допускает единственное распространение с E на все X и притом с сохранением нормы.

▶ Так как E всюду плотно в X, то для каждой точки $x \in X$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Поскольку последовательность

$\{x_n\}$ фундаментальна, то $||\,x_m - x_n||\to 0$ при $m,n\to\infty$. Из ограниченности оператора A следует

$$||\,Ax_m - Ax_n|| = ||A(x_m - x_n)|| \le ||\,A||\,||\,x_m - x_n||,$$

а потому последовательность $\{Ax_n\}$ тоже фундаментальна. Вследствие полноты пространства Y существует $y = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$, $y\in Y$.

Покажем, что элемент y не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\{x'_n\}$ – другая последовательность, что $x'_n\to x$, тогда $x'_n - x_n\to 0$ и $Ax'_n - Ax_n = A(x'_n - x_n)\to\theta$ по непрерывности оператора A. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} Ax'_n = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n = y$.

Теперь определим оператор U на всем пространстве X, полагая для $\forall\, x\in X$

$$U(x) = \lim_{n\to\infty} A(x_n), \tag{1}$$

где $x_n\in E$ и $x_n\to x\in X$. Покажем, что это и есть искомое распространение оператора A.

Так как для $x\in E$ можно принять все $x_n = x$, то из (1) следует $U(x) = A(x)$. Проверим линейность U:

$$U(x+y) = \lim_{n\to\infty} A(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}(Ax_n + Ay_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} A(x_n) + \lim_{n\to\infty} A(y_n) = U(x) + U(y),$$
$$U(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} A(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda A(x_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} A(x_n) = \lambda U(x).$$

Наконец проверим, что $||\,U||_X = ||\,A||_E$. Пусть $x\in X$, $x_n\in E$ и $x_n\to x$. Переходя к пределу в неравенстве $||\,A(x_n)|| \le ||\,A||\,||\,x_n||$ и учитывая непрерывность нормы, получим $||\,U(x)||_X \le ||\,A||_E||\,x||_X$, то есть оператор A ограничен и так как $||\,U||_X \ge ||\,A||_E$, то $||\,U||_X = ||\,A||_E$.

Докажем единственность распространения оператора U. Пусть V – другое распространение оператора A с E на X. Если $x\in X$, $x_n\in E$ и $x_n\to x$, то по непрерывности оператора V

$$V(x) = \lim_{n\to\infty} V(x_n) = \lim_{n\to\infty} A(x_n) = U(x),$$

(для $x_n\in E$ будет $V = A$), то есть оператор V совпадает с U. ◄

2.7 Дифференцируемые отображения в нормированных пространствах

Определение 1. Пусть X, Y – нормированные линейные пространства. Отображение $f\colon E\subset X\to Y$ называется дифференцируемым в точке $x\in E$, внутренней для E, если существует такое линейное относительно h непрерывное отображение $L(x)\colon E \subset X \to Y$, что

$$f(x+h) - f(x) = L(x)\,h + \alpha(x;h), \tag{1}$$

где $\alpha(x;h) = o(h)$ при $h \to \theta$, $x + h \in E$ Последняя запись означает, что

$$\lim_{h\to\theta} \frac{||\,\alpha(x;h)||_Y}{||\,h||_X} = 0.$$

Определение 2. Линейный относительно h оператор $L(x) \in \mathcal{L}(X,Y)$, удовлетворяющий соотношению (1), называется дифференциалом, касательным отображением или производной отображения $f\colon E \subset X \to Y$ в точке x.

Ввиду требования непрерывности отображения $L(x)$ в Определении 1, из равенства (1) следует, что отображение, дифференцируемое в точке $x \in E$, необходимо является непрерывным в этой точке.

Приведенное определение дифференцируемого отображения в нормированных пространствах почти дословно совпадает с определением для евклидовых пространств $X = \mathcal{R}^n$, $Y = \mathcal{R}^m$.

Сформулированные ниже теоремы доказываются также как аналогичные теоремы конечномерных пространств, поэтому мы приводим их без доказательства.

Теорема 1. Если отображение $f\colon E \subset X \to Y$ дифференцируемо во внутренней точке $x \in E \subset X$, то его дифференциал $L(x)$ в этой точке определен однозначно.

Теорема 2. Если отображение $f\colon U \to V$ дифференцируемо в точке $x \in U \subset X$, а отображение $g\colon V \to Z$ дифференцируемо в точке $y = f(x) \in V \subset Y$, то композиция $g \circ f$ этих отображений дифференцируема в точке x, причем

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$$

(дифференциал композиции равен композиции дифференциалов).

Теорема 3. Пусть $f\colon U \subset X \to Y$ – непрерывное в точке $x \in U \subset X$ отображение, имеющее обратное $f^{-1}\colon V \subset Y \to X$, определенное в окрестности точки $y = f(x) \in V$ и непрерывное в этой точке.

Если отображение f дифференцируемо в точке x и его касательное отображение $f'(x) \in \mathcal{L}(X;Y)$ в этой точке имеет непрерывное обратное отображение $[f'(x)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y;X)$, то отображение f^{-1} дифференцируемо в точке $y = f(x)$, причем

$$[f^{-1}]'(y) = [f'(x)]^{-1}.$$

2.8 Линейные функционалы

Линейный оператор $A\colon X \to Y$, где X, Y – линейные пространства, причем $Y \subset \mathcal{R}^1$ – пространство вещественных чисел, называется линейным функционалом. Функционал часто обозначают как обычную функцию, например f.

Поскольку линейный функционал является частным случаем линейного оператора, то все утверждения, справедливые для линейных операторов, будут иметь место и для линейных функционалов.

Определение 1. Непустое множество M элементов линейного множества X называется линейным многообразием, если оно содержит вместе с элементами $\{x_k\}$, $k = 1, 2, ..$ пространства X и все их линейные комбинации (k может принимать и конечное число значений).

Если на линейном пространстве задан оператор или функционал,определенный не на всем X, а на некотором многообразии $M \subset X$, то возникает вопрос о его продолжении с сохранением свойств на все пространство X. Для линейных операторов и функционалов данный вопрос решается легко, если исходный оператор задан на линейном многообразии $M \subset X$, всюду плотном в X (Теорема 1 п. 2.6). Если задан линейный непрерывный функционал на многообразии $M \subset X$, не обязательно всюду плотном в X, то его можно продолжить с сохранением нормы.

Теорема 1 (Банаха -Хана). Всякий линейный функционал f, определенный на линейном многообразии $M \subset X$, где X – линейное нормированное пространство, можно продолжить на все пространство X с сохранением нормы, то есть можно построить линейный функционал F, определенный на X и такой, что:

$$1) F(x) = f(x) \text{ для } x \in M, \quad 2) ||\,F||_X = ||\,f||_M.$$

► Без доказательства. ◄

Следствие 1. Пусть X – линейное нормированное пространство и $x_0 \neq \theta$ – любой фиксированный элемент из X. Тогда существует линейный функционал $f(x)$, определенный на X и такой, что

$$1)\ ||\, f|| = 1,\ 2)\ f(x_0) = ||\, x_0||.$$

▶ Рассмотрим множество элементов $\{tx_0\} = L$, где t – любое вещественное число. Множество L является подмножеством X, определенном элементом x_0. На L определим функционал $\varphi(x)$ следующим образом: если $x = tx_0$, то $\varphi(x) = t||\, x||$. Очевидно: 1) $\varphi(x_0) = ||\, x_0||$, 2) $||\, \varphi(x)|| = |\, t|\, ||\, x_0|| = ||\, x||$. Отсюда следует $||\varphi(x)|| = 1$. Продолжая функционал $\varphi(x)$ на все пространство X без увеличения нормы на основании Теоремы 1, получим функционал $f(x)$, имеющий требуемые свойства. ◀

Следствие 2. Пусть в линейном нормированном пространстве X заданы линейное многообразие M и элемент $x_0 \notin M$, находящийся на расстоянии $d > 0$ от M ($d = \inf_{x \in M} ||\, x - x_0||$). Тогда существует функционал $f(x)$, определенный на X и такой, что

$$1)\ f(x) = 0 \text{ для } x \in M,\ 2)\ f(x_0) = 1,\ 3)\ ||\, f|| = 1/d.$$

Второе следствие важно для выяснения вопроса о возможности аппроксимации заданного элемента $x_0 \in X$ другими элементами $\{x_n\} \subset X$.

Сопряженное пространство

Определение 2. Совокупность всех непрерывных линейных функционалов, определенных на некотором линейном пространстве E образует линейное пространство, называемое сопряженным с E и обозначаемое E^*.

Для линейных функционалов из E^*, заданном на нормированном пространстве E, сохраняется данное ранее определение нормы

$$||\, f|| = \sup_{x \neq \theta} \frac{|\, f(x)|}{||\, x||}.$$

Эта норма удовлетворяет всем аксиомам нормированного пространства. Таким образом, пространство E^*, сопряженное к нормированному пространству E, также является нормированным.

Теорема 2. Сопряженное пространство E^* полно.

► Доказательство аналогично соответствующей теореме для линейных операторов. ◄

Эта теорема справедлива независимо от того, полно ли исходное пространство E. Кроме того, здесь не требуется заранее условие полноты пространства $Y \subset \mathcal{R}^1$ – значений функционала $f(x)$, так как это множество является числовым.

Замечание. Если нормированное пространство E не полно, а $\overline{E}$ – его пополнение, то пространства E^* и $\overline{E}^*$ изоморфны.

2.9 Слабая сходимость в нормированном пространстве

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного пространства X называется слабо сходящейся к элементу $x \in X$, если для любого непрерывного линейного функционала $f(x)$ на X числовая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x)$.

Теорема 1. Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ в нормированном пространстве X ограничена, то есть $||\,x_n|| \leq C > 0$.

Теорема 2. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства X слабо сходится к элементу $x \in X$, если:

1) $||\,x_n||$ ограничены в совокупности;

2) $f(x_n) \to f(x)$ для любого функционала $f \in D$, где D – некоторое множество, линейная оболочка которого всюду плотна в X^*. Линейная оболочка – наименьшее линейное многообразие, содержащее данные элементы.

Можно доказать единственность предела слабо сходящейся последовательности и, что любая подпоследовательность слабо сходящейся последовательности сходится к тому же пределу.

Аналогичным образом можно ввести понятие слабой сходимости функционалов: последовательность функционалов $\{f_n\}$ называется слабо сходящейся к функционалу $f \in X^*$, если для каждого $x \in X$ выполняется соотношение $f_n(x) \to f(x)$.

Для последовательности функционалов имеют место теоремы, аналогичные теоремам 1 и 2 для последовательностей элементов. Пространство X здесь предполагается полным, то есть $\mathcal{B}$ – пространством.

Теорема 3. Пусть $A\colon X \to Y$ – линейный ограниченный оператор, X, Y – линейные нормированные пространства. Если последовательность $\{x_n\} \subset X$ слабо сходится к $x_0 \in X$, то последовательность $\{Ax_n\} \subset Y$ слабо сходится к $Ax_0 \in Y$.

► Возьмем любой функционал $\varphi \in Y^*$. Тогда $\varphi\left(Ax_n\right) = f\left(x_n\right)$, где $f \in X^*$. Аналогично $\varphi\left(Ax_0\right) = f\left(x_0\right)$. Так как x_n слабо сходится к x_0, то $f\left(x_n\right) \to f\left(x_0\right)$, то есть $\varphi\left(Ax_n\right) \to \varphi\left(Ax_0\right)$. Поскольку φ – произвольный функционал из Y^*, то Ax_n слабо сходится к Ax_0. ◄

2.10 Сопряженные операторы

Рассмотрим непрерывный линейный оператор $A\colon X \to Y$, отображающий линейное пространство X в такое же пространство Y. Пусть g – линейный непрерывный функционал, определенный на Y, то есть $g \in Y^*$. Применим функционал g к элементу $y = Ax$. Легко проверить, что $g(Ax)$ есть непрерывный линейный функционал, определенный на X, обозначим его f. Функционал f есть, таким образом, элемент пространства X^*. Каждому функционалу $g \in Y^*$ мы поставили в соответствие функционал $f \in X^*$, то есть получили некоторый оператор, отображающий Y^* в X^*. Этот оператор называют сопряженным оператору A и обозначают A^*, таким образом $A^*\colon Y^* \to X^*$.

Обозначим $(f, x) = f(x)$, тогда получим, что

$$(g, Ax) = (f, x) \;\text{ или }\; (g, Ax) = (A^* g, x).$$

Это соотношение можно принять за определение сопряженного оператора. Из определения оператора A^* вытекают его свойства:

1) оператор A^* линеен;

2) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

3) $(\lambda\, A)^* = \lambda\, A^*$, λ – некоторое число.

Теорема 1. Оператор A^*, сопряженный с ограниченным линейным оператором $A\colon X \to Y$, где X и Y – $\mathcal{B}$ пространства, также ограничен и $||\, A^*|| = ||\, A||$.

► В силу свойств нормы оператора имеем

$$|\,(A^* g, x)| = |\,(g, Ax)| \le ||\, g||\, ||\, A||\, ||\, x||,$$

откуда $||\, A^* g|| \le ||\, A||\, ||\, g|| \Longrightarrow ||\, A^*|| \le ||\, A||$.

Пусть $x \in X$ и $Ax \neq \theta$, положим $y_0 = \frac{Ax}{||\, Ax||} \in Y$, очевидно, что $||\, y_0|| = 1$. По Следствию 1 из Теоремы 1 (Банаха - Хана) существует такой функционал g, что $||\, g|| = 1$ и $(g, y_0) = 1$, то есть $(g, Ax) = ||\, Ax||$.

Из соотношений

$$||\, Ax|| = (g, Ax) = |\,(A^* g, x)| \leq ||\, A^* g||\, ||x|| \leq$$
$$\leq ||\, A^*||\, ||\, g||\, ||\, x|| = ||\, A^*||\, ||\, x||$$

получаем $||\, A|| \leq ||\, A^*||$, из двух неравенств следует $||A^*|| = ||\, A||$. ◄

2.11 Вполне непрерывные операторы

Класс операторов, по своим свойствам близкий к операторам, действующим в конечномерных пространствах, и в то же время весьма важный с точки зрения приложений, образуют вполне непрерывные операторы.

Определение 1. Линейный оператор $A\colon X \to Y$, отображающий $\mathcal{B}$ – пространство X в такое же пространство Y, называется вполне непрерывным, если он каждое ограниченное множество $E \subset X$ переводит в относительно компактное множество из Y.

В конечномерном нормированном пространстве всякий линейный оператор вполне непрерывен, поскольку он переводит любое ограниченное множество снова в ограниченное множество, а в конечномерном пространстве любое ограниченное множество относительно компактно.

В бесконечномерном пространстве полная непрерывность оператора есть требование более сильное, чем просто его непрерывность (то есть ограниченность). Например, единичный оператор $Ax = x$ в $\mathcal{B}$ - пространстве непрерывен, но не вполне непрерывен.

Лемма. Если последовательность $\{x_n\} \xrightarrow{\text{сл.}} x_0$ и относительно компактна, то она сильно сходится к x_0.

► Предположим, что это не так, то есть существует $\varepsilon > 0$, что $||\, x_n - x_0|| \geq \varepsilon$ при сколь угодно больших n (таких номеров бесконечно много). Так как последовательность $\{\, x_n\}$ относительно компактна, то найдется подпоследовательность $\{\, x_{n_k}\}$, что $||\, x_{n_k} - x_0'|| \to 0$, $k \to \infty$. Поскольку $\{x_{n_k}\} \xrightarrow{\text{сл.}} x_0'$, то $x_0' = x_0$. Но по предположению $||\, x_{n_k} - x_0|| \geq \varepsilon$. Это противоречие доказывает Лемму. ◄

Теорема 1. Вполне непрерывный оператор A отображает слабо сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ в сильно сходящуюся.

▶ Пусть последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0. Тогда $||\, x_n||$ ограничена и $\{x_n\}$ как ограниченное множество оператором A переводится в относительно компактную последовательность $\{y_n\}$, где $y_n = Ax_n$. С другой стороны по Теореме 3 п. 2.9 $y_n = Ax_n \xrightarrow{\text{сл.}} Ax_0 = y_0$. Если последовательность $y_n \xrightarrow{\text{сл.}} y_0$ и относительно компактна, то $y_n \to y_0$. ◀

Основные свойства вполне непрерывных операторов

Теорема 2. Если $\{A_n\}$ – последовательность вполне непрерывных операторов, отображающих линейное нормированное пространство X в $\mathcal{B}$ – пространство Y, сходящаяся по норме к оператору A, то A тоже вполне непрерывный оператор.

▶ Для доказательства полной непрерывности оператора A достаточно показать, что для любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$, $||\, x_n|| \leq C$, из последовательности $\{Ax_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Так как оператор A_1 вполне непрерывен, то из последовательности $\{A_1 x_n\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{x_n^{(1)}\}$ – такая подпоследовательность, что последовательность $\{A_1 x_n^{(1)}\}$ сходится.

Рассмотрим теперь последовательность $\{A_2 x_n^{(1)}\}$, из нее также можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Пусть $\{x_n^{(2)}\}$ такая подпоследовательность последовательности $\{x_n^{(1)}\}$, что $\{A_2 x_n^{(2)}\}$ сходится. Продолжим этот процесс до бесконечности. Возьмем затем диагональную последовательность $\{x_n^{(n)}\}$. Каждый из операторов $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ переводит эту последовательность в сходящуюся. Покажем,что последовательность $\{Ax_n^{(n)}\}$ тоже сходится. Тем самым полная непрерывность оператора A будет установлена. Так как пространство Y полно, то достаточно показать, что последовательность $\{Ax_n^{(n)}\}$ – фундаментальна. Имеем

$$|| \, Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}|| \leq || \, Ax_N^{(n)} - A_k x_n^{(n)}||+$$
$$+|| \, A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}|| + || \, A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}||, \quad (1)$$

Выберем число k так, что $||\, A - A_k|| < \varepsilon/3C$, а затем выберем такое n_ε, что при всех $m, n > n_\varepsilon$ будет выполнено соотношение

$$|| A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)} || < \varepsilon/3$$

Это возможно, так как последовательность $\{A_k x_n^{(n)}\}$ сходится.

При этих условиях из (1) получаем, что

$$|| A x_n^{(n)} - A x_m^{(m)} || < \varepsilon,$$

при всех достаточно больших m и n. ◀

Теорема 3. Если A – вполне непрерывный оператор, а оператор B – ограничен, тогда операторы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ вполне непрерывны.

▶ Если множество $M \subset X$ ограничено, то множество $B(M)$ тоже ограничено. Следовательно $A(B(M))$ относительно компактно. Это и означает, что оператор $A \cdot B$ вполне непрерывен. Далее, если множество $M \subset X$ ограничено, то $A(M)$ – относительно компактно, а тогда в силу непрерывности B, множество $B(A(M))$ тоже относительно компактно, то есть оператор $B \cdot A$ вполне непрерывен. ◀

Следствие. В бесконечномерном пространстве X вполне непрерывный оператор не может иметь ограниченного обратного.

▶ Действительно, иначе единичный оператор $I = A^{-1}A$ был бы вполне непрерывен в X, что невозможно. ◀

Теорема 4. Оператор, сопряженный с вполне непрерывным оператором, тоже вполне непрерывен.

▶ Без доказательства. ◀

ГЛАВА 3. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

3.1 Пространства со скалярным произведением

Определение 1. Линейное пространство X называется пространством со скалярным произведением, если для любых элементов $x, y \in X$ определена функция (x, y) — вещественное число, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(x, y) = (y, x)$

2) $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$

3) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = \theta$

Замечание. Часто в основу пространства со скалярным произведением кладется комплексное линейное множество. В этом случае скалярное произведение — комплексное число и условие 1) заменяется на $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

Линейное пространство со скалярным произведением называют также евклидовым пространством.

Из определения пространства со скалярным произведением следует:

a) $(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1(x, y_1) + \lambda_2(x, y_2)$,

b) $(x, \theta) = (\theta, y) = 0$,

c) $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$ — неравенство Коши-Буняковского.

► Для его доказательства рассмотрим выражение $(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \lambda(x, y) + \lambda(y, x) + \lambda^2(y, y)$. По условию 3) $(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$ при любом λ. Пусть $(y, y) \neq 0$, если $y = \theta$ неравенство очевидно. Возьмем $\lambda = -(x, y)/(y, y)$, тогда имеем

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} + \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0$$

и неравенство доказано. ◄

Если в пространстве со скалярным произведением ввести норму с помощью формулы

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}, \tag{1}$$

то оно становится нормированным пространством. Из аксиом нормы только неравенство треугольника не вытекает из аксиом евклидова пространства. Докажем его. Пусть $x, y \in X$, используя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \le$$
$$\le ||x||^2 + 2||x||||y|| + ||y||^2 = \big(||x|| + ||y||\big)^2$$

Извлекая квадратный корень, получим нужный результат.

Так как X — нормированное пространство, оно обладает всеми свойствами последнего. Отметим еще два предложения, относящиеся специально к пространствам со скалярным произведением:

a) Непрерывность скалярного произведения: если $x_n \to x,\ y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

► С помощью неравенства Коши-Буняковского имеем

$$||(x_n, y_n) - (x, y)|| \le |(x, y - y_n)| + |(x - x_n, y_n)| \le ||x||||y - y_n|| + ||x - x_n||||y_n|| \to 0$$

при $n \to \infty$, так как сходящаяся последовательность $\{y_n\}$ ограничена. ◄

b)

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\big(||x||^2 + ||y||^2\big). \qquad (2)$$

► Действительно, $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = (x+y, x+y) + (x-y, x-y) = 2(x,x) + 2(y,y)$. ◄

Равенство (2) выражает известное свойство параллелограмма в евклидовом пространстве: сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон.

Справедливо следующее утверждение: для того, чтобы нормированное пространство было евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы в нем для любых двух элементов x и y выполнялось равенство (2).

Ортогональность элементов евклидова пространства

Элементы x, y евклидова пространства X называются ортогональными, если $(x, y) = 0$. При этом пишут $x \perp y$. Если фиксированный элемент $x \in X$ ортогонален каждому элементу множества $E \subset X$, то говорят, что $x \perp E$. Если элементы двух множеств E_1 и E_2 попарно ортогональны, то множества называют ортогональными и пишут $E_1 \perp E_2$.

Система ненулевых векторов $\{x_k\} \subset X$ называется ортогональной, если $(x_i, x_j) = 0$ при $i \ne j$. Векторы ортогональной системы линейно независимы.

Определение 2. Система элементов $\{x_k\}$ нормированного пространства X называется полной в X, если замыкание линейной оболочки $\overline{\mathcal{L}}(\{x_k\}) = X$, то есть если множество всех линейных комбинаций векторов $\{x_k\}$ плотно в X.

Система ортогональных векторов $\{x_k\}$ называется ортогональным базисом линейного пространства X, если линейная оболочка $\overline{\mathcal{L}}(\{x_k\}) = X$. Система векторов $\{e_k\}$ называется ортонормированной, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Некоторые примеры евклидовых пространств

1. Пространство $\mathcal{R}^n$, элементами которого являются системы вещественных чисел $x = (x_1, ..., x_n)$, со скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ представляет собой евклидово пространство. Ортонормированный базис в нем образуют векторы $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, где единица стоит на k-ом месте (это один из бесконечного числа возможных базисов).

2. Пространство ℓ_2 с элементами $x = (x_1, ..., x_n, ...)$, где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty$, и скалярным произведением $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ есть евклидово пространство. Сходимость ряда была доказана раньше, аксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно. Ортонормированным базисом являются векторы $e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, где единица стоит на k-ом месте. Эта система векторов является полной. Возьмем любой вектор $x = (x_1, ..., x_n, ...) \in \ell_2$ и обозначим $x^{(n)} = (x_1, ..., x_n, 0, ...)$. Тогда $x^{(n)}$ есть линейная комбинация векторов $e_1, ..., e_n$ и $||x - x^{(n)}|| \to 0$ при $n \to \infty$.

3. Пространство $C^2[a, b]$, состоящее из непрерывных на $[a, b]$ вещественных функций со скалярным произведением $(f, g) = \int\limits_a^b f(t)g(t)dt$ также представляет собой евклидово пространство. Среди различных базисов можно указать ортогональную систему тригонометрических функций

$$\frac{1}{2},\ \cos n\frac{2\pi t}{b-a},\ \sin n\frac{2\pi t}{b-a},\ n = 1, 2, ...$$

Эта система полна (показано раньше).

3.2 Гильбертово пространство H

Определение 1. Линейное пространство со скалярным произведением, полное в смысле метрики, порожденной заданным скалярным произведением, называется гильбертовым пространством и обозначается H.

Просто линейное пространство со скалярным произведением часто называют предгильбертовым пространством. Справедлива теорема.

Теорема 1. Всякое предгильбертово пространство X содержится и плотно в некотором гильбертовом пространстве H.

► Без доказательства. ◄

Совокупность всех элементов, ортогональных данному множеству $E \subset H$, являющаяся подмножеством пространства H, называется ортогональным дополнением множества E.

Теорема 2 (основная теорема H – пространств). Пусть H_1 — замкнутое подмножество пространства H и H_2 его ортогональное дополнение. Любой элемент $x \in H$ единственным образом представим в форме $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, где $x^{(1)} \in H_1,\ x^{(2)} \in H_2$, при этом элемент $x^{(1)}$ реализует расстояние от x до H_1, то есть $||x - x^{(1)}|| = \rho(x, H_1)$.

► Если $x \in H_1$, то очевидно $x^{(1)} = x,\ x^{(2)} = \theta$. Пусть $x \notin H_1$, обозначим $d = \rho\,(x, H_1)$. Зададим числа $d_n = d + \dfrac{1}{n},\ n = 1, 2, ...$ Из определения d как нижней грани следует, что при каждом $n\ \exists\, x_n \in H_1$, для которого

$$||x - x_n|| < d_n. \tag{1}$$

Возьмем любые m и n, в силу равенства (2) §1 имеем

$$||x_n - x_m||^2 + ||(x - x_n) + (x - x_m)||^2 = 2\big(||x - x_n||^2 + ||x - x_m||^2\big). \tag{2}$$

Так как $\dfrac{1}{2}(x_n + x_m) \in H_1$, то

$$||(x - x_n) + (x - x_m)||^2 = 4\left|\left|x - \frac{1}{2}(x_n + x_m)\right|\right|^2 \geq 4d^2.$$

Тогда из (2) и (1) находим

$$||x_n - x_m||^2 < 2(d_n^2 + d_m^2) - 4d.$$

Но $d_n, d_m \to d$, а потому $||x_n - x_m|| \to 0,\ m, n \to \infty$. То есть, последовательность $\{x_n\} \subset H_1$ является фундаментальной. Вследствие полноты $H\ \exists\, x^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, при этом $x^{(1)} \in H_1$, так как H_1 — замкнуто. Переходя к пределу в (1), найдем $||x - x^{(1)}|| \leq d$, а так как для любого элемента из H_1, в том числе и для $x^{(1)}$, должно быть $||x - x^{(1)}|| \geq d$, то

$$||x - x_n|| = d. \tag{3}$$

Покажем теперь, что элемент $x^{(2)} = x - x^{(1)}$ ортогонален H_1 и, следовательно, $x^{(2)} \in H_2$, то есть ортогонален любому элементу $y \in H_1$. При любом λ элемент $x^{(1)} + \lambda y \in H_1$, так что $||x - (x^{(1)} + \lambda y)||^2 \geq d^2$. Что можно переписать, используя (3), в виде

$$|\lambda|^2 (y, y) - \overline{\lambda}(x^{(2)}, y) - \lambda(y, x^{(2)}) \geq 0.$$

Положив $\lambda = (x^{(2)}, y)/(y, y)$, получим $|(x^{(2)}, y)|^2 \leq 0$, что возможно только в случае $(x^{(2)}, y) = 0$, то есть $x^{(2)} \perp y$.

Требуемое представление $\forall\, x \in H$ получено. Докажем его единственность. Пусть имеем еще одно представление $x = x' + x''$, где $x' \in H_1,\ x'' \in H_2$. Тогда $x' + x'' = x^{(1)} + x^{(2)}$, или $x^{(1)} - x' = x'' - x^{(2)}$. Элемент $(x^{(1)} - x') \in H_1$, а элемент $(x'' - x^{(2)}) \in H_2$. Следовательно, $(x^{(1)} - x') \perp (x'' - x^{(2)})$, тогда $x^{(1)} - x' = x'' - x^{(2)} = \theta$, то есть $x' = x^{(1)},\ x'' = x^{(2)}$. ◀

Элементы $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, однозначно определяемые элементом $x \in H$, называются проекциями элемента x на подпространства H_1 и H_2 соответственно.

Следствие. Для того, чтобы система элементов $\{x_k\} \subset H$ была полной в пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало ненулевого элемента, ортогонального каждому элементу системы.

► *Необходимость.* Если система $\{x_k\}$ полна в H, то есть $\overline{\mathcal{L}}(\{x_n\}) = H$ и $x \perp \{x_k\}$, то $x \perp H$, то есть $(x, x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \theta$.

Достаточность. Если $\{x_k\}$ — неполная система в H, то подпространство $H_1 = \overline{\mathcal{L}}(\{x_n\}) \neq H$ и, следовательно, взяв элемент $x \in H \backslash H_1$ и разложив его на сумму $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, где $x^{(1)} \in H_1,\ x^{(2)} \perp H_1$ будем иметь $x^{(2)} \neq \theta$ и $x^{(2)} \perp x_k$ что противоречит условию. ◀

3.3 Ортонормированные системы векторов в H

Система векторов $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A$ называется ортогональной, если любые два вектора этой системы ортогональны. Если, кроме того, норма каждого вектора $||x_\alpha|| = 1$, то система $\{x_\alpha\}$ называется ортонормированной. Если среди векторов x_α нет нулевого, то такая система линейно независима.

Действительно, если бы существовала линейная зависимость $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_{\alpha_k} = 0$, то, умножая скалярно обе части на x_{α_i}, мы получим $c_i ||x_{\alpha_i}||^2 = 0$, следовательно $c_i = 0$.

От ортогональной системы элементов $\{x_\alpha\}$ легко перейти к ортонормированной, для этого нужно разделить каждый элемент на его норму (предполагается, что среди векторов нет нулевого).

В конечномерном евклидовом пространстве на основе линейно независимой системы векторов можно построить ортонормированную систему методом ортогонализации Грама-Шмидта. В любом линейном пространстве со скалярным произведением можно ортонормировать любую линейно независимую систему векторов.

Теорема 1. Пусть $\{y_n\}$ — линейно независимая система элементов пространства H. Существует ортонормированная система $\{x_n\}$: $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} y_k$, где $\lambda_k^{(n)} \neq 0$, $n = 1, 2, ...$

► Докажем методом математической индукции. Пусть $x_1 = \lambda_1^{(1)} y_1$, где $\lambda_1^{(1)} = \dfrac{1}{||y_1||}$ и пусть уже построены ортонормированные элементы $x_1, ..., x_{n-1}$, связанные с $y_1, ..., y_{n-1}$ указанным в теореме соотношением. Пусть H'_n — линейные оболочки элементов $y_1, ..., y_{n-1}$, а H''_n — ортогональные дополнения к H'_n в H. Так как $y_n \notin H'_n$, то в разложении $y_n = y'_n + y''_n$, где $y'_n \in H'_n$, $y''_n \in H''_n$ элемент $y''_n \neq 0$. Обозначим $x_n = \lambda_n^{(n)} y''_n$, где $\lambda_n^{(n)} = \dfrac{1}{||y''_n||}$. Тогда будем иметь $||x_n|| = 1$ и так как $x_n \perp H'_n$ и $x_k \in H'_n$ при $k < n$, то $x_n \perp x_k$, $k < n$. Далее, $x_n = \lambda_n^{(n)} y''_n = \lambda_n^{(n)} (y_n - y'_n) = \lambda_n^{(n)} y_n - \lambda_n^{(n)} y'_n$. Ввиду того, что $y'_n \in H'_n$ имеем $y'_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k^{(n)} y_k$. Пусть $\lambda_k^{(n)} = -\alpha_k^{(n)} \lambda_n^{(n)}$ при $k < n$, получим $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} y_k$. Доказательство теоремы завершено по индукции. ◄

Замечание 1. Так как $\lambda_n^{(n)} \neq 0$, то элементы y_n могут быть выражены через x_n : $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} x_k$, $(\gamma_n^{(n)} = 1/\lambda_n^{(n)})$.

Замечание 2. Элементы x_n определяются элементами y_n неоднозначно, но если предположить, что $\lambda_n^{(n)} > 0,\ n = 1, 2, ...$, то система $\{x_n\}$ определяется однозначно.

Теорема 2. Ортонормированная система $\{x_\alpha\}$ сепарабельного пространства H не более чем счетна.

► Пусть D — счетное плотное в H множество. Для любого $x_\alpha \in H$ найдем $y_\alpha \in D:\ ||x_\alpha - y_\alpha|| < \dfrac{1}{2}$. При этом различным x_α и x'_α отвечают различные y_α и y'_α. Действительно,

$$||y_\alpha - y'_\alpha|| = ||(x_\alpha - x'_\alpha) + (x'_\alpha - y'_\alpha) + (y_\alpha - x_\alpha)|| \geq ||x_\alpha - x'_\alpha|| -$$

$$-\big(||x'_\alpha - y'_\alpha|| + ||y_\alpha - x_\alpha||\big) > \sqrt{2} - 1 > 0,$$

так как $||x_\alpha - x'_\alpha||^2 = (x_\alpha - x'_\alpha, x_\alpha - x'_\alpha) = (x_\alpha, x_\alpha) - 2(x_\alpha, x'_\alpha) + (x'_\alpha, x'_\alpha) = 2$. Таким образом, множество $\{x_\alpha\}$ эквивалентно части счетного множества D и, следовательно, не более чем счетно. ◄

3.4 Ряды Фурье в гильбертовом пространстве H

Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H дана ортонормированная система векторов $\{x_k\}$ и пусть $x \in H$. Числа $a_k = (x, x_k),\ k = 1, 2, ...$ называются коэффициентами Фурье элемента x по данной ортонормированной системе $\{x_k\}$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, где $a_k = (x, x_k)$, называется рядом Фурье элемента x. Образуем подпространство $H_n = \mathcal{L}(\{x_1, ..., x_n\}) \subset H$, элементами которого являются всевозможные линейные комбинации первых n элементов данной ортонормированной системы $\{x_k\}$.

Теорема 1. Отрезок ряда Фурье элемента x: $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k$ есть проекция x на подпространство H_n.

► Так как $x = s_n + (x - s_n)$, а $s_n \in H_n$, то достаточно доказать, что $(x - s_n) \perp H_n$. Ясно, что $x - s_n \perp x_k,\ k = \overline{1, n}$, а тогда $(x - s_n) \perp \overline{\mathcal{L}}(\{x_k\}) = H_n,\ k = \overline{1, n}$. ◄

Следствие 1. Используя теорему 1, получаем: для любого элемента $z = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k \in H_n,\ ||x - s_n|| = \rho(x, H_n) \leq ||x - z||$. Далее, так как $||x||^2 = ||s_n||^2 + ||x - s_n||^2 \geq ||s_n||^2$, а $||s_n||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2$, то справедливо утверждение $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leq ||x||^2$ —

неравенство Бесселя. Переходя к пределу при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leq ||x||^2. \tag{1}$$

Если для некоторого $x \in H$ в (1) имеем знак равенства, то говорят, что для этого x удовлетворяется уравнение замкнутости.

Теорема 2. Для любого элемента $x \in H$ его ряд Фурье всегда сходится, при этом сумма ряда равна проекции элемента x на подмножество $H_0 = \overline{\mathcal{L}}(\{x_k\}),\ k = 1, 2, ...$ Для того, чтобы сумма ряда Фурье была равна элементу x, необходимо и достаточно, чтобы для x выполнялось условие замкнутости.

► Из неравенства (1) следует, что что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится. Обозначим s_n — частичную сумму ряда Фурье. Имеем $||s_{n+p} - s_n|| = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и следует сходимость ряда Фурье.

Пусть $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, так как $S \in H_0$ и $x = S + (x - S)$ то, как и в теореме 1, можно ограничиться доказательством того, что $(x - S) \perp H_0$, доказывается аналогично теореме 1.

Если, используя равенство $||s_n||^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^2$, переписать равенство $||x||^2 = ||s_n||^2 + ||x - s_n||^2$ в виде $||x - s_n||^2 = ||x||^2 - ||s_n||^2$ и перейти к пределу при $n \to \infty$, то теорема будет доказана. ◄

Следствие 2. Если система $\{x_k\},\ k = 1, 2, ...$ полная, то ряд Фурье для любого элемента $x \in H$ сходится к x.

► Если $\{x_k\}$ — полная система, то $H_0 = H$ и проекция любого элемента $x \in H$ на H_0 совпадает с x. По теореме 2 ряд сходится к элементу x. ◄

Ортонормированная система $\{x_k\},\ k = 1, 2, ...$ называется замкнутой, если для любого $x \in H$ выполняется условие замкнутости

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2. \tag{2}$$

Учитывая предыдущие результаты, можно сформулировать следующее утверждение.

Следствие 3. Для того, чтобы ортонормированная система $\{x_k\}$ была замкнута в H, необходимо и достаточно, чтобы она была полной.

► Из теоремы 2 следует, что условие замкнутости удовлетворяется для любого $x \in H_0$ и только для них. Следовательно, замкнутость системы равносильна равенству $H_0 = H$, которое в свою очередь означает полноту данной системы $\{x_k\}$. ◄

Теорема 3. (Рисса-Фишера). Пусть $\{c_k\}$ — числовая последовательность, для которой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится. Тогда существует единственный элемент $x \in H$ такой, что его коэффициенты Фурье $a_k = (x, x_k) = c_k,\ k = 1, 2, ...,$ причем для этого x удовлетворяется условие замкнутости.

► Как и при доказательстве теоремы 2 убеждаемся, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ — сходится. Обозначим его сумму x, тогда

$$a_n = (x, x_n) = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k, x_n \right) = c_n,\ n = 1, 2, ...,$$

так как для $m \geq n$ будет $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} c_k x_k, x_n \right) = c_n$.

Выполнение условия замкнутости для элемента x следует из теоремы 2, единственность элемента x также следует из этой теоремы, так как элемент, для которого выполняется условие замкнутости, должен быть суммой своего ряда Фурье. ◄

Обобщенное уравнение замкнутости

Пусть для элементов $x, y \in H$ выполнено уравнение замкнутости. Если $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — последовательности коэффициентов Фурье этих элементов, то $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k$.

► Действительно, в силу теоремы 2, $x = \sum a_k x_k,\ y = \sum b_k x_k$, поэтому

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k, \sum_{k=1}^{n} b_k x_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k. \quad ◄$$

Если рассматриваемая ортонормированная система $\{x_k\}$ — полная, то обобщенное уравнение замкнутости справедливо для любых $x, y \in H$.

3.5 Изометричность гильбертовых пространств

Определение 1. Два нормированных пространства X и Y называются линейно изометричными, если они изоморфны и из $x \leftrightarrow y$, где $x \in X,\ y \in Y$, следует $||x|| = ||y||$.

Теорема 1. Если сепарабельное гильбертово пространство H бесконечномерно, то в нем имеется полная счетная ортонормированная система векторов.

▶ Так как H сепарабельно, то в нем имеется счетное плотное множество $D = \{z_n\}$. Полную линейно независимую систему $\{y_k\}$ построим следующим образом. Пусть $z_1 \neq \theta$, возьмем $y_1 = z_1$, далее в качестве y_2 возьмем элемент z_{n_2} с минимальным номером $n_2 \geq 2$, чтобы y_1 и $y_2 = z_{n_2}$ были линейно независимы. Продолжая процесс, придем к искомой системе $\{y_k\}$. Действительно, так как любой элемент из системы $\{z_n\}$ есть, очевидно, линейная комбинация элементов $y_j = z_{n_j}$ $(n_j \leq n)$, так что $D \subset \mathcal{L}(\{y_k\})$ и, следовательно, $\overline{\mathcal{L}}(\{y_k\}) = H$. Применяя к системе $\{y_k\}$ процесс ортогонализации, придем к полной ортонормированной и очевидно счетной системе. ◀

Теорема 2. Любые два сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространства линейно изометричны.

▶ Пусть H и H' — пространства указанного вида. На основании теоремы 1 существуют счетные полные ортонормированные системы $\{x_k\}$ и $\{x'_k\}$ в H и H' соответственно. Пусть $x \in H$ — произвольный элемент. Обозначим через $\{a_k\}$ последовательность коэффициентов Фурье этого элемента. Тогда по следствию 2 теоремы 2 п. 3.4 $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = ||x||^2 < +\infty$. Применяя в H' теорему 3 Рисса-Фишера к последовательности $\{a_k\}$, найдем элемент $x' \in H'$, имеющий те же коэффициенты Фурье, что и элемент $x \in H$. При этом $x' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x'_k$. Этот элемент и сопоставляется элементу x. Указанное соответствие удовлетворяет условиям изометричности (вместо равенства норм $||x|| = ||x'||$ здесь нужно говорить о равенстве скалярных произведений этих элементов).

Не останавливаясь вследствие простоты на проверке сохранения алгебраических операций, покажем, что если $x, y \in H$ и $x', y' \in H'$ — соответствующие элементы, то $(x, y) = (x', y')$. Так как обе системы $\{x_k\}$ и $\{x'_k\}$ полны, для элементов x, y, а также x', y' выполняется обобщенное уравнение замкнутости, то есть

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k, \quad (x', y') = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \bar{b}_k,$$

где $\{a_k\}$ — последовательность коэффициентов Фурье элементов x или x', а $\{b_k\}$ — последовательность коэффициентов Фурье элементов y и y'. ◀

Пример. Пространство ℓ_2, элементами которого являются последовательности $x = (x_1, ..., x_n, ...)$, для которых ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ сходится, является гильбертовым пространством.

Если $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ и $y = (y_1, ..., y_n, ...) \in \ell_2$, то в силу неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < +\infty,$$

так что $x+y \in \ell_2$. Ясно, что элемент $\lambda\, x$, где λ — число, принадлежит ℓ_2. Таким образом, ℓ_2 — линейное пространство.

Если принять $||x|| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$, то ℓ_2 становится нормированным пространством. Можно доказать, что ℓ_2 — полное пространство, то есть банахово. Определим скалярное произведение равенством $(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$, $||x|| = \sqrt{(x, x)}$. Из сказанного выше ясно, что ℓ_2 — гильбертово пространство.

3.6 Пространство суммируемых функций L_p

1. Пространство L. Рассмотрим совокупность всех функций, заданных и суммируемых на множестве $E \subset X$ с мерой μ. Это множество называется множеством суммируемых функций и обозначается L. В множестве L эквивалентные между собой функции отождествляются. Легко установить, что L — линейное множество. Введем норму для $\forall\, f \in L$

$$||f|| = \int_E |f| d\mu$$

Все аксиомы нормы выполнены, следовательно L — нормированное пространство. Сходимость $f_k \to f$ по норме пространства L означает $\int_E |f_k - f| d\mu \to 0$. Эту сходимость называют сходимостью в среднем первого порядка. Из сходимости в среднем $f_k \to f$ вытекает сходимость по мере $f_k \Rightarrow f$ к той же функции. Можно доказать, что L — полное пространство, то есть банахово. Если $E \subset X \subset \mathcal{R}^n$ с мерой Лебега μ_n, то L — сепарабельное пространство.

2. Пространство L_2. Измеримая функция f, заданная и почти всюду конечная на множестве $E \subset X$ с мерой μ, называется суммируемой с квадратом, если $\int_E f^2 d\mu < +\infty$. Совокупность всех функций, суммируемых с квадратом на некотором измеримом множестве $E \subset X$, обозначается L_2. Эквивалентные между собой функции в L_2 отождествляются.

Можно доказать, что L_2 — линейное множество. Введением в L_2 нормы соотношением

$$||f|| = \left(\int_E f^2 d\mu \right)^{1/2}$$

L_2 становится нормированным пространством. Множество L не включается в множество L_2. Можно доказать, что если $\mu E < +\infty$, то $L_2 \subset L$ и для $\forall\, f \in L_2$ $||f||_L \le \sqrt{\mu E}\, ||f||_{L_2}$.

Сходимость $f_k \to f$ по норме пространства L_2 означает, что $\int_E |f_k - f|^2 d\mu \to 0$. Такая сходимость называется сходимостью второго порядка. Из сходимости по норме пространства L_2 $f_k \to f$ следует сходимость по мере $f_k \Rightarrow f$. Если $\mu E < +\infty$ и $f_k \to f$ по норме в L_2, то $f_k \to f$ по норме в L, то есть из сходимости в среднем 2- го порядка вытекает сходимость в среднем 1- го порядка.

Можно показать, что L_2 — полное пространство, то есть банахово. Если $E \subset X \subset \mathcal{R}^n$ с мерой Лебега μ_n, то пространство L_2 — сепарабельно.

Расстояние (метрика) в L_2 будет

$$\rho(f, g) = ||f - g|| = \left(\int_E |f - g|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

Скалярным произведением двух функций f и g из L_2 называется выражение $(f, g) = \int_E fg d\mu$. Норма в L_2 фактически определена через скалярное произведение $||f|| = \sqrt{(f, f)}$. Из сказанного выше следует, что L_2 — гильбертово пространство.

3. Пространство L_p. Это совокупность всех функций, измеримых и почти всюду конечных на $E \subset X$ с мерой μ, для которых

$$\int_E |f|^p d\mu < +\infty,\ p \ge 1$$

В множестве L_p отождествляются функции, эквивалентные между собой. Легко доказать, что L_p — линейное множество. Действительно, если $f \in L_p$, то включение $\lambda f \in L_p$ очевидно. Пусть $f, g \in L_p$ и $E_1 = E\big(|f(x)| \le |g(x)|\big),\ E_2 = E \backslash E_1$. Тогда для $\forall\, x \in E_1$ имеем

$$|f(x) + g(x)|^p \le \big(|f(x)| + |g(x)|\big)^p \le 2^p |g(x)|^p,$$

следовательно,

$$\int_{E_1} |f(x) + g(x)|^p d\mu \le 2^p \int_{E_1} |g(x)|^p d\mu < +\infty$$

Аналогично,
$$\int_{E_2} |f(x)+g(x)|^p d\mu \leq 2^p \int_{E_2} |f(x)|^p d\mu < +\infty$$
Следовательно, $\int_E |f(x)+g(x)|^p d\mu < +\infty$ и потому $f+g \in L_p$.

Изучение пространства L_p при $p>1$ тесно связано с рассмотрением второго пространства такого же типа L_q, где $p^{-1}+q^{-1}=1$, такие p и q называются сопряженными. Имеет место следующее утверждение: если $f \in L_p,\ g \in L_q$, то произведение $f \cdot g$ суммируемо на E и
$$\int_E |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_E |g|^q d\mu\right)^{1/q}.$$
Это неравенство Гёльдера.

Пусть $f, g \in L_p$ $(p \geq 1)$, тогда
$$\left(\int_E |f+g|^p d\mu\right) \leq \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p d\mu\right)^{1/p}.$$
Это неравенство Минковского.

Если ввести норму для $\forall f \in L_p$ соотношением
$$||f|| = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu\right)^{1/p},$$
то неравенство Минковского превращается в неравенство треугольника. Выполнение других аксиом нормированного пространства очевидно, и, следовательно, L_p — нормированное пространство. Его называют пространством функций, суммируемых с p-ой степенью.

Из всех пространств $L_p,\ p \geq 1$, только L_2 является гильбертовым.

3.7 Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах

1. Линейные функционалы в пространстве $\mathcal{R}^n$.

Пусть f — линейный функционал, определенный на $E \subset \mathcal{R}^n$. Элемент пространства $x \in E$ можно записать в виде $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$, где $\{e_k\},\ k=\overline{1,n}$ — базис в $\mathcal{R}^n$. Тогда
$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k.$$

Обратно, выражение вида $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k f_k$, где f_k — произвольные числа, есть очевидно линейный функционал на $\mathcal{R}^n$. Линейный функционал можно записать в виде скалярного произведения, если f_k рассматривать как компоненты вектора $f(x) = (x, f)$, где $x \in \mathcal{R}^n$.

2. Линейные функционалы в пространстве $C[a, b]$.

Теорема 1. (Ф. Рисс). Всякий линейный непрерывный функционал $F \subset C[a, b]$ может быть представлен в виде

$$F(f) = \int_a^b f(x) dg(x), \tag{1}$$

где $g(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации на $[a, b]$.

При этом $||F|| = \bigvee\limits_a^b g(x)$.

3. Линейные функционалы в гильбертовом пространстве H.

Теорема 2. Пусть H — вещественное гильбертово пространство. Для любого непрерывного линейного функционала f на H существует единственный элемент $x_0 \in H$ такой, что

$$f(x) = (x, x_0),\ \forall\, x \in H, \tag{2}$$

причем $||f|| = ||x_0||$. Обратно, формула (2) определяет такой непрерывный линейный функционал f, что $||f|| = ||x_0||$. Таким образом, пространства H и H^* изоморфны.

► Очевидно, для $\forall\, x_0 \in H$ формула (2) определяет линейный функционал на H. Так как $|f(x)| = |(x, x_0)| \leq ||x|| ||x_0||$, то этот функционал непрерывен, а так как $f(x_0) = ||x_0||^2$, то $||f|| = ||x_0||$. Покажем, что любой непрерывный линейный функционал f на H представим в виде (2). Если $f = 0$, то полагаем $x_0 = \theta$. Пусть теперь $f \neq 0$ и $H_0 = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$ — множество нулей функционала f, так как f — непрерывен, то H_0 — замкнутое линейное подмножество в H. Любой вектор $x \in H$ однозначно представим в виде $x = y + \lambda y_0$, где $y \in H_0,\ y_0 \perp H_0$— ненулевой вектор. Можно считать $||y_0|| = 1$. Положим $x_0 = f(y_0) \cdot y_0$, тогда для $\forall\, x \in H$ имеем $x = y + \lambda y_0$, $y \in H_0$, $f(x) = f(y) + \lambda f(y_0) = \lambda f(y_0)$, $(f(y) = 0)$, $(x, x_0) = \lambda (y_0, x_0) = \lambda f(y_0) \cdot (y_0, y_0) = \lambda f(y_0)$. Таким образом, $f(x) = (x, x_0)$ для $\forall\, x \in H$. Единственность: если $f(x) = (x, x_0')$, $x \in H$, то $(x, x_0 - x_0') = 0$, следовательно, при $x = x_0 - x_0'$, что $x_0 = x_0'$. Теорема доказана. ◄

Литература

Основная литература.

1. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1,2. М., 1976.

2. Зорич В.А. Математический анализ. Ч.1, М. 1982, Ч.2, М. 1984.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Т.1,2. М. 1998.

4. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.1,2,3. М., 1988-89.

5. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. М., 1973.

6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.

Дополнительная литература.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1,2,3. М. 1960.

2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1,2,5. М., 1961-66.

3. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т. 1,2. М., 1990.

4. Камынин Л.И. Курс математического анализа. Ч.1. М. 1993. Ч.2. М. 1995.

5. Рудин У. Основы математического анализа. Мир. М. 1976.

6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Ч.1. М., 1985, Ч.2. М., 1987.

7. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. М. 1967.

8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М. 1974.