

Поверхностные интегралы

§1. Мера Лебега на поверхностях

Пусть на множестве $E \subset \mathbb{R}^d$ задана вектор-функция φ со значениями в \mathbb{R}^N , $N \geq d$, класса $C^{(r)}(E)$, $r \geq 1$, т.е. $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $\varphi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, N$, и каждая функция φ_j имеет все непрерывные частные производные порядка r (условие $\varphi \in C^{(r)}(E)$ также называют гладкостью отображения φ порядка r). Для такой вектор-функции определена матрица Якоби

$$\varphi' = \frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_N)}{\partial(t_1, \dots, t_d)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_N}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_N}{\partial t_d} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.1. Множество $S \subset \mathbb{R}^N$ называется d -мерной поверхностью класса $C^{(r)}$, $r \geq 1$, в \mathbb{R}^N , $N \geq d$, если существует открытое множество $E \subset \mathbb{R}^d$ и вектор-функция $\varphi \in C^{(r)}(E)$, взаимно однозначно отображающая E на S , и такая, что $\text{rang } \varphi' = d$ на E .

Таким образом, поверхность определяется отображением $\varphi : E \rightarrow S$, которое часто называют параметрическим заданием поверхности. В случае, когда не существенно, какого

класса данная поверхность, мы не будем упоминать число r , всегда предполагая при этом, что $r \geq 1$.

Отметим, что на практике в случае $N = d$, как правило, термин "поверхность" не употребляют, вместо этого используют слова "область" или "тело" а в случае $d = 1$ поверхности называют кривыми. С другой стороны, поверхностями часто называют (например в задачниках) множества в \mathbb{R}^N , не являющиеся таковыми в смысле данного определения. Например, часть некоторой поверхности, которая является образом (при отображении φ) замкнутого множества $E_1 \subset E$, или объединение нескольких поверхностей.

В добавление к определению 1.1, условимся считать 0-мерной поверхностью любой не более чем счетный набор точек в \mathbb{R}^N .

Пример 1. Пусть $d = 1$, $N = 2$, $E = (0, 3\pi/2)$, $\varphi : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Поскольку $\varphi'(t) = (-\sin t, \cos t)^T$ а функции \sin и \cos одновременно не обращаются в ноль, $\text{rang } \varphi'(t) = 1$ для всех t . Поэтому данное отображение φ задает одномерную поверхность (кривую), являющуюся частью единичной окружности, заключенной в 1-3-м квадрантах. Если E заменить на $E_1 = (-\pi, \pi/2)$, то получим другую часть окружности. Объединение этих частей покрывает всю окружность, но сама окружность не является поверхностью в смысле определения 1.1.

Пример 2. Пусть $d = 1$, $N = 3$, $E = (-\infty, \infty)$, $\varphi : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Нетрудно видеть, что матрица φ' постоянна, $\text{rang } \varphi' = 1$, и отображение φ задает кривую в трехмерном пространстве, совпадающую с координатной осью x .

Пример 3. Пусть $d = 2$, $N = 3$, $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi : \begin{cases} x = 0 \\ y = u \\ z = v \end{cases}$. Нетрудно видеть, что матрица φ' постоянна, $\text{rang } \varphi' = 2$, и отображение φ задает двумерную поверхность в трехмерном пространстве, совпадающую с координатной плоскостью yz .

Будем называть отображение φ , заданное на d -мерной поверхности S в \mathbb{R}^N , гладким, если для любой точки $x_0 \in S$ существует d -мерная поверхность S_1 , $S_1 \subset S$, $x_0 \in S_1$, и отображение ψ , определенное и непрерывно дифференцируемое в некоторой N -мерной окрестности точки x_0 , такое что $\psi|_{S_1} = \varphi$. Вектор-функция φ , взаимно однозначно отображающая d -мерную поверхность S на d -мерную поверхность T , назовем *диффеоморфизмом*, если φ и φ^{-1} – гладкие отображения.

Теорема 1.2. Если вектор-функция $\varphi : E \rightarrow S$ задает поверхность S , то φ – диффеоморфизм.

Доказательство. По определению поверхности φ является взаимно однозначным отображением и $\varphi \in C^{(1)}(E)$. Пусть $x^0 = (x_1^0, \dots, x_N^0) \in S$, положим $t^0 = (t_1^0, \dots, t_d^0) = \varphi^{-1}(x^0)$. Так как $\text{rang } \varphi'(t^0) = d$, существуют номера k_1, \dots, k_d , такие что

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{k_1}}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_{k_1}}{\partial t_d}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{k_d}}{\partial t_1}(t_0) & \dots & \frac{\partial \varphi_{k_d}}{\partial t_d}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $k_l = l$, $l = 1, \dots, d$. Для произвольного $x = (x_1, \dots, x_N)$ условимся обозначать соответствующий d -мерный вектор с координатами x_1, \dots, x_d через \tilde{x} , в частности, $\tilde{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_d^0)$. Рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_k(t) = u_k, \quad k = 1, \dots, d,$$

с неизвестными $t_1, \dots, t_d, u_1, \dots, u_d$ и разрешим ее относительно t_1, \dots, t_d в окрестности точки (t^0, \tilde{x}^0) . По теореме о неявной функции существуют $E_\varepsilon \subset E$, $E_\delta \subset \mathbb{R}^d$ – окрестности (кубические) точек t^0, \tilde{x}^0 соответственно, и единственный набор функций

$$t_k^* : E_\delta \longrightarrow (t_k^0 - \varepsilon, t_k^0 + \varepsilon), \quad k = 1, \dots, d,$$

таких что $t_k^*(\tilde{x}^0) = t_k^0$ и $\varphi_k(t_1^*(u), \dots, t_d^*(u)) = u_k$ для всех $u \in E_\delta$, причем эти функции непрерывно дифференцируемы. Положим $S_1 = \varphi(t^*(E_\delta))$. Если $x \in S_1$, то $x = \varphi(t^*(u))$, $u \in E_\delta$, что влечет $x_k = \varphi_k(t_1^*(u), \dots, t_d^*(u)) = u_k$ для всех $k = 1, \dots, d$, т.е. $\tilde{x}^0 = u$. Таким образом, если $x \in S_1$, то $x = \varphi(t^*(\tilde{x}))$, а значит $\varphi^{-1}(x) = t^*(\tilde{x})$. Осталось заметить, $\psi(x) := t^*(\tilde{x})$ непрерывно дифференцируема в некоторой N -мерной окрестности точки x^0 , поскольку от переменных x_k , $k = d + 1, \dots, N$, она не зависит, а непрерывная дифференцируемость функций t_k^* , $k = 1, \dots, d$, установлена, и $\psi|_{S_1} = \varphi^{-1}$. \diamond

Пусть d -мерная поверхность S задана вектор-функцией $\varphi : E \longrightarrow S$. Обозначим σ -алгебру измеримых по Лебегу множеств в \mathbb{R}^d через $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$ и введем совокупность подмножеств множества S

$$\mathfrak{A}(S) := \{e \subset S : \varphi^{-1}(e) \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)\}.$$

Предложение 1.3. *Совокупность $\mathfrak{A}(S)$ является σ -алгеброй.*

Доказательство. Пусть дан не более чем счетный набор множеств $e_n \in \mathfrak{A}(S)$, тогда $\varphi^{-1}(e_n) \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$, а значит и объединение этих множеств измеримо (поскольку $\mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$ является σ -алгеброй). Равенство имеем

$$\varphi^{-1}\left(\bigcup_n e_n\right) = \bigcup_n \varphi^{-1}(e_n),$$

влечет $\bigcup_n e_n \in \mathfrak{A}(S)$. Аналогично, используя равенство

$$\varphi^{-1}(S \setminus e) = \varphi^{-1}(S) \setminus \varphi^{-1}(e),$$

устанавливаем, что если $e \in \mathfrak{A}(S)$, то $S \setminus e \in \mathfrak{A}(S)$. \diamond

Построенная σ -алгебра формально зависит от φ , ниже будет показано, что на самом деле этой зависимости нет.

Далее нам будет удобно использовать для квадратных матриц следующие обозначения

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =: \{a_{kl}\}$$

Рассмотрим матрицу Грама¹ вектор-функции φ

$$G_\varphi = (\varphi')^T \cdot \varphi' = \left\{ \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right\rangle \right\}, \quad \text{где} \quad \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t_k}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_l} \right\rangle = \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_l}.$$

Из алгебры известно, что определитель матрицы Грама неотрицателен и обращается в ноль только в случае, когда векторы $\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}$, $k = 1, \dots, d$, линейно зависимы. Поскольку $\text{rang } \varphi' = d$ на E , векторы $\frac{\partial \varphi}{\partial t_k}$, $k = 1, \dots, d$, линейно независимы, и значит определитель матрицы Грама вектор-функции φ строго положителен на E .

Определим на σ -алгебре $\mathfrak{A}(S)$ функцию множеств, сопоставляющую каждому $e \in \mathfrak{A}(S)$ значение

$$s e = \int_{\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu, \quad (1)$$

¹Иорген Грам (1850-1916) – датский математик.

где $\mu = \mu_d$ – мера Лебега в \mathbb{R}^d . Отметим, что этот интеграл имеет смысл, так как множество $\varphi^{-1}(e)$ измеримо в \mathbb{R}^d , а подинтегральная функция непрерывна и положительна.

Предложение 1.4. *Функция множеств s , определенная равенством (1), является полной мерой в S .*

Доказательство. Проверим счетную аддитивность s . Пусть дан не более чем счетный набор попарно дизъюнктивных множеств $e_n \in \mathfrak{A}(S)$, $e = \bigcup_n e_n$, тогда ввиду взаимной однозначности отображения φ множества $\varphi^{-1}(e_n)$ также попарно дизъюнктивны, и

$$\varphi^{-1}(e) = \varphi^{-1}\left(\bigcup_n e_n\right) = \bigcup_n \varphi^{-1}(e_n),$$

поэтому, используя счетную аддитивность интеграла Лебега, имеем

$$s e = \int_{\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu = \sum_n \int_{\varphi^{-1}(e_n)} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu = \sum_n s e_n.$$

Чтобы убедиться в том, что s – мера, осталось проверить свойство $s \emptyset = 0$, которое очевидно. Теперь докажем полноту этой меры. Пусть $e \in \mathfrak{A}(S)$, $s e = 0$, $e' \subset e$. Тогда

$$\int_{\varphi^{-1}(e')} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu = 0,$$

что ввиду положительности подинтегральной функции влечет $\mu(\varphi^{-1}e') = 0$. Поскольку $\varphi^{-1}(e') \subset \varphi^{-1}(e)$, а мера μ полная,

отсюда следует, что $\varphi^{-1}(e') \in \mathfrak{A}(\mathbb{R}^d)$ и $\mu\varphi^{-1}(e') = 0$, а значит $e' \in \mathfrak{A}(S)$ и

$$s e' = \int_{\varphi^{-1}(e')} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu = 0. \diamond$$

Построенная мера формально зависит от φ .

Теорема 1.5. σ -алгебра $\mathfrak{A}(S)$ и мера s , определенная равенством (1), не зависят от способа задания поверхности S .

Доказательство. Пусть d -мерная поверхность S в \mathbb{R}^N задана двумя вектор-функциями: $\varphi : E \rightarrow S$ и $\tilde{\varphi} : \tilde{E} \rightarrow S$. По теореме 1.2 оба отображения $\varphi, \tilde{\varphi}$ являются диффеоморфизмами, а значит и отображение $\Phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$, действующее из \tilde{E} в E , – тоже диффеоморфизм, т.е. оба отображения Φ, Φ^{-1} являются гладкими. Поскольку гладкое отображение сохраняет измеримость в \mathbb{R}^d , для любого $e \in S$ множества $\varphi^{-1}(e)$, $\tilde{\varphi}^{-1}(e)$ измеримы или не измеримы по Лебегу одновременно. Это означает, что $\mathfrak{A}(S)$ не зависит от φ .

Пусть $e \in \mathfrak{A}(S)$. Заменяя переменную в интеграле, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu &= \int_{\Phi^{-1} \circ \varphi^{-1}(e)} \sqrt{\det G_\varphi \circ \Phi} |\det \Phi'| d\mu = \\ &= \int_{\tilde{\varphi}^{-1}(e)} \sqrt{(\det G_\varphi \circ \Phi) \det^2 \Phi'} d\mu. \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы осталось проверить тождество

$$(\det G_\varphi \circ \Phi) \det^2 \Phi' = \det G_{\tilde{\varphi}}. \quad (2)$$

Поскольку $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \Phi$, имеем

$$\begin{aligned} G_{\tilde{\varphi}} &= (\tilde{\varphi}')^T \cdot \tilde{\varphi}' = ((\varphi' \circ \Phi) \cdot \Phi')^T \cdot ((\varphi' \circ \Phi) \cdot \Phi') = \\ &= (\Phi')^T \cdot ((\varphi' \circ \Phi)^T \cdot (\varphi' \circ \Phi)) \cdot (\Phi'). \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку матрица Φ' квадратная, следует

$$\det G_{\tilde{\varphi}} = \det(\Phi')^T \det(\Phi') \det((\varphi' \circ \Phi)^T \cdot (\varphi' \circ \Phi))$$

что с учетом равенства

$$\det((\varphi' \circ \Phi)^T \cdot (\varphi' \circ \Phi)) = \det(G_{\varphi} \circ \Phi) = \det G_{\varphi} \circ \Phi$$

влечет (2). \diamond

Итак, для каждой поверхности S существует мера, определенная равенством (1), которая зависит только от самой поверхности S и не зависит от способа ее задания. Назовем ее *мерой Лебега* на S .

Определив меру на поверхности, мы получили соответствующий набор измеримых относительно этой меры функций, заданных на поверхности или на какой-то ее части.

Предложение 1.6. Пусть d -мерная поверхность S задана вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, $e \in \mathfrak{A}(S)$. Функция f измерима на e тогда и только тогда, когда функция $f \circ \varphi$ измерима на $\varphi^{-1}(e)$.

Доказательство. Доказываемое утверждение следует из равенства

$$\{x \in e : f(x) \geq a\} = \{x = \varphi(t) : t \in \varphi^{-1}(e), f(\varphi(t)) \geq a\} = \varphi\{t : t \in \varphi^{-1}(e), (f \circ \varphi)(t) \geq a\}.\diamond$$

Теперь обсудим геометрический смысл меры Лебега на поверхности. По-прежнему считаем, что поверхность S задана вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, $E \subset \mathbb{R}^d$, $S \subset \mathbb{R}^N$. Поскольку множество E открыто, его можно представить в виде объединения попарно дизъюнктивных кубических ячеек, соответственно поверхность S разобьется на образы этих ячеек. Пусть Δ — одна

из ячеек, $e = \varphi(\Delta)$. Выбрав подходящие системы координат в \mathbb{R}^d и \mathbb{R}^N , мы можем считать, что $\Delta = [0, \delta)^d$, $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Если $t \in \Delta$, то по формуле Тейлора $\varphi(t) = Dt + \|t\|\alpha(t)$, где $\alpha(t) \in \mathbb{R}^N$, $\lim_{t \rightarrow \mathbf{0}} \alpha(t) = \mathbf{0}$, а D – касательное отображение:

$$D(t) = \varphi'(\mathbf{0}) \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Касательной плоскостью к поверхности S в точке $x = \mathbf{0}$ назовем поверхность, заданную вектор-функцией D .

Покажем, что мера малого участка поверхности близка к объему соответствующей части касательной плоскости (в том смысле, что мала их относительная погрешность). Образом ячейки Δ (при отображении D) будет некоторый косоугольный параллелепипед P . Заметим, что функция $G_D(t)$ постоянна. Обозначим меру Лебега на касательной плоскости через s_D и вычислим значение

$$s_D P = \int_{D^{-1}P} \sqrt{\det G_D} d\mu = \int_{\Delta} \sqrt{\det G_D} d\mu = C \delta^d.$$

Теперь заметим, что $G_D(t) = G_\varphi(\mathbf{0})$ для всех $t \in \mathbb{R}^d$. Ввиду гладкости φ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $|\sqrt{\det G_\varphi(t)} - \sqrt{\det G_\varphi(\mathbf{0})}| < \varepsilon$ для всех $t \in \Delta$, и значит

$$|se - s_D P| \leq \int_{\Delta} |\sqrt{\det G_D} - \sqrt{\det G_\varphi}| d\mu \leq \varepsilon \delta^d.$$

Таким образом, относительная погрешность уклонения $s_D P$ от se мала. С другой стороны, по теореме 1.5 величина $s_D P$ не зависит от способа задания поверхности, и мы можем задать касательную плоскость с помощью вектор-функции \tilde{D} :

$$\tilde{D}_k(t) = t_k, \quad k = 1, \dots, d; \quad \tilde{D}_k(t) = 0, \quad k = d + 1, \dots, N.$$

Ясно, что $G_{\tilde{D}}$ – единичная матрица, и $\tilde{D}^{-1}(P) = P$, поэтому

$$s_D P = \int_P d\mu = \mu P.$$

Поэтому естественно истолковывать меру s множества $e \subset S$ как его объем (площадь).

Имея полную меру s на поверхности S , для функции f , заданной на S и измеримой (относительно s), и множества $e \in \mathfrak{A}(S)$ мы можем рассматривать интеграл

$$\int_e f ds,$$

определенный в соответствии с общей теорией интеграла Лебега. Такие интегралы называют *поверхностными интегралами первого рода*.

Теорема 1.7. Пусть d -мерная поверхность S задана вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, $e \in \mathfrak{A}(S)$, функция f измерима на e , тогда

$$\int_e f ds = \int_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi} d\mu, \quad (3)$$

причем интегралы в левой и правой части имеют или не имеют смысла одновременно.

Доказательство. 1. Предположим сначала, что функция f суммируема на e .

а) Пусть $f = \chi_{e'}$, $e' \in \mathfrak{A}(S)$, $e' \subset e$, тогда

$$\int_e f ds = \int_{e'} ds = s e' = \int_{\varphi^{-1}e'} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu =$$

$$\int_{\varphi^{-1}(e)} \chi_{\varphi^{-1}(e')} \sqrt{\det G_\varphi} d\mu = \int_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi} d\mu.$$

b) Пусть f – простая неотрицательная функция, т.е. существует не более чем счетный набор попарно дизъюнктивных множеств $e_n \in \mathfrak{A}(S)$, таких что $e = \bigcup_n e_n$ и $f = \sum_n c_n \chi_{e_n}$, $c_n \geq 0$.

Используя доказанное в п. а), мы имеем

$$\begin{aligned} \int_e f ds &= \int_e \sum_n c_n \chi_{e_n} ds = \sum_n c_n \int_{e_n} \chi_{e_n} ds = \\ &= \sum_n c_n \int_{\varphi^{-1}(e_n)} \chi_{e_n} \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi} d\mu = \int_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi} d\mu. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств мы могли вынести знак суммы из под интеграла в силу теоремы Лебега (функция f суммируема и неотрицательна, и поэтому является мажорантой для частичных сумм ряда), внесение знака суммы под интеграл оправдано следствием к теореме Леви.

с) Пусть $f \geq 0$. В этом случае существует последовательность простых функций f_n , таких что $f_n \leq f_{n+1} \leq f$, $f_n \geq 0$, $f_n \rightarrow f$ почти везде на e . Используя доказанное в п. b), мы имеем

$$\begin{aligned} \int_e f ds &= \int_e \lim_{n \rightarrow \infty} f_n ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_e f_n ds = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varphi^{-1}(e)} f_n \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi} d\mu = \int_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_\varphi} d\mu. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств мы могли вынести знак предела из под интеграла в силу первой теоремы Леви, внесение знака предела под интеграл оправдано второй теоремой Леви.

d) Произвольную суммируемую на e функцию представим в виде $f = f_+ - f_-$. Используя доказанное в п. с) для функций f_+, f_- , приняв во внимание, что $f_{\pm} \circ \varphi = (f \circ \varphi)_{\pm}$, получим (3).

2. Теперь предположим, что функция f не суммируема на e .

а) Пусть $f \geq 0$. В этом случае для любого $n \in \mathbb{N}$ существует множество конечной меры e_n , $e_n \subset e$, на котором функция f ограничена (и стало быть суммируема), и

$$\int_{e_n} f ds > n.$$

В силу уже доказанного для суммируемых функций равенства (3) отсюда следует, что

$$\int_{\varphi^{-1}(e_n)} f \circ \varphi \sqrt{\det G_{\varphi}} d\mu > n.$$

Это означает, что интеграл в правой части (3) равен бесконечности.

b) Пусть интеграл в левой части (3) равен бесконечности. В этом случае конечен один и только один из двух интегралов

$$\int_e f_+ ds, \quad \int_e f_- ds. \quad (4)$$

Используя доказанное в пп. 1с), 2а) для функций f_+, f_- , устанавливаем, что интеграл в правой части (3) тоже равен бесконечности.

с) Пусть интеграл в левой части (3) не имеет смысла. В этом случае оба интеграла (4) бесконечны. Используя доказанное в п. 2а) для функций f_+, f_- , устанавливаем, что интеграл в правой части (3) тоже не имеет смысла.

3. Для доказательства теоремы осталось заметить, что из пп. 1d), 2b), 2c) от противного следует, что интеграл в правой части (3) имеет смысл тогда и только тогда, когда имеет смысл интеграл в левой части. \diamond

§2. Мера Лебега на многообразиях

Определение 2.1. Множество $M \subset \mathbb{R}^N$ называется d -мерным многообразием (без края) в \mathbb{R}^N , $N \geq d$, класса $C^{(r)}$, $r \geq 1$, если оно является объединением не более чем счетного набора d -мерных поверхностей класса $C^{(r)}$ и обладает свойством \mathcal{M} : для любой d -мерной поверхности $S \subset M$ и для любого $x^0 \in S$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$M \cap \{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x, x^0) < \varepsilon\} \subset S.$$

Пример 1. Пусть одномерные поверхности S_1, S_2 заданы соответственно вектор-функциями $\varphi_j : E_j \rightarrow S_j$, $j = 1, 2$, $E_1 = (0, 3\pi/2)$, $E_2 = (-\pi, \pi/2)$, $\varphi_1 = \varphi_2 : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Уже обсуждалось, что объединением этих поверхностей будет окружность, которая сама не является поверхностью. Ясно, что свойство \mathcal{M} выполнено, и, таким образом, окружность является многообразием.

Пример 2. Положим $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 < 1, x_2 = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_2 < 1, x_1 = 0\}$. Ясно, что S_1, S_2 — одномерные поверхности, но их объединение не будет многообразием, так как свойство \mathcal{M} не выполняется при $x^0 = \mathbf{0}$.

Лемма 2.2. Пусть M – d -мерное многообразие, S, S' – d -мерные поверхности, $S, S' \subset M$, $S \cap S' \neq \emptyset$. Тогда $S \cap S'$ – d -мерная поверхность, $S \cap S' \in \mathfrak{A}(S)$.

Доказательство. Пусть поверхность S задана вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$. Покажем, что множество $\tilde{E} := \varphi^{-1}(S \cap S')$ открыто в \mathbb{R}^d . Возьмем произвольную точку $t^0 \in \tilde{E}$ и положим $x^0 = \varphi(t^0)$. По свойству \mathcal{M} существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$M \cap \{x \in \mathbb{R}^N : \rho(x, x^0) < \varepsilon\} \subset S'.$$

Поскольку множество E открытое, а отображение φ гладкое, существует окрестность точки t^0 , которая целиком содержится в E , а ее образ попадет в ε -окрестность точки x^0 . Значит образ этой окрестности содержится в $S \cap S'$, что и доказывает открытость \tilde{E} . Отсюда по определению поверхности и $\mathfrak{A}(S)$ следуют оба утверждения леммы. \diamond

Следствие 2.3. Если в условиях леммы 2.2 $e \subset S \cap S'$, то $e \in \mathfrak{A}(S)$ тогда и только тогда, когда $e \in \mathfrak{A}(S')$, и имеет место равенство $se = s'e$, где s, s' – меры Лебега соответственно на поверхностях S, S' .

Доказательство. Из доказательства леммы 2.2 ясно, что поверхность $S \cap S'$ может быть задана сужением вектор-функции φ , задающей S , на $\varphi^{-1}(S \cap S')$. Отсюда ясно, что условия $e \in \mathfrak{A}(S)$ и $e \in \mathfrak{A}(S \cap S')$ равносильны. Точно так же устанавливаем, что $e \in \mathfrak{A}(S')$ равносильно $e \in \mathfrak{A}(S \cap S')$. Из тех же рассуждений, учитывая, что значение меры Лебега множества e на поверхности $S \cap S'$ не зависит от выбора способа задания поверхности, приходим к выводу, что оно совпадает и с se , и с $s'e$. \diamond

Теорема 2.4. Пусть M – d -мерное многообразие,

$$M = \bigcup_n S_n, \quad (5)$$

где S_n , $n \in \mathbb{N}$, – d -мерные поверхности (не обязательно различные),

$$\mathfrak{A}(M) := \left\{ e \subset M : e = \bigcup_n e_n, e_n \in \mathfrak{A}(S_n) \right\}. \quad (6)$$

Тогда совокупность множеств $\mathfrak{A}(M)$ является σ -алгеброй и не зависит от выбора представления (5).

Доказательство. В первую очередь отметим, что $S_n \in \mathfrak{A}(S_n)$, поэтому из (5) следует $M \in \mathfrak{A}(M)$. Пусть $e = \bigcup_k e_k$, $e_k \in \mathfrak{A}(M)$, тогда $e_k = \bigcup_n e_{nk}$, $e_{nk} \in \mathfrak{A}(S_n)$, и значит $e = \bigcup_n e'_n$, $e'_n = \bigcup_k e_{nk}$, $e'_n \in \mathfrak{A}(S_n)$, что означает $e \in \mathfrak{A}(M)$. Теперь предположим, что $e \in \mathfrak{A}(M)$, $e = \bigcup_k e_k$, $e_k \in \mathfrak{A}(S_k)$, тогда

$$\begin{aligned} M \setminus e &= \bigcup_n (S_n \setminus e) = \bigcup_n \bigcap_k (S_n \setminus e_k), \\ S_n \setminus e_k &= (S_n \setminus (S_k \cap S_n)) \cup ((S_n \cap S_k) \setminus e_k). \end{aligned}$$

По лемме 2.2 $S_n \setminus (S_k \cap S_n) \in \mathfrak{A}(S_n)$, $(S_n \cap S_k) \setminus e_k \in \mathfrak{A}(S_k)$, но тогда $(S_n \cap S_k) \setminus e_k \in \mathfrak{A}(S_n)$ ввиду следствия 2.3, а значит $S_n \setminus e_k \in \mathfrak{A}(S_n)$ для любого k , что влечет $M \setminus e \in \mathfrak{A}(M)$. Мы доказали, что $\mathfrak{A}(M)$ – σ -алгебра.

Теперь предположим, что $M = \bigcup_k S'_k$, где S'_k , $k \in \mathbb{N}$, – d -мерные поверхности. Покажем, что если

$$e = \bigcup_k e'_k, e'_k \in \mathfrak{A}(S'_k),$$

то $e \in \mathfrak{A}(M)$. Поскольку $\mathfrak{A}(M)$ – σ -алгебра, достаточно проверить, что $e'_k \in \mathfrak{A}(M)$. Положим $e_{nk} = e'_k \cap S_n = e'_k \cap (S_n \cap S'_k)$.

По лемме 2.2 $e_{nk} \in \mathfrak{A}(S'_k)$, но тогда $e_{nk} \in \mathfrak{A}(S_n)$ ввиду следствия 2.3. Осталось заметить, что $e'_k = \bigcup_n e_{nk}$. \diamond

Лемма 2.5. Пусть M – d -мерное многообразие, S, S' – d -мерные поверхности, $S, S' \subset M$, $e \in \mathfrak{A}(S)$, $e' \in \mathfrak{A}(S')$, тогда $e \cap e' \in \mathfrak{A}(S)$, $e \setminus e' \in \mathfrak{A}(S)$.

Доказательство. Из леммы 2.2 следует $e \cap (S \cap S') \in \mathfrak{A}(S)$, $e' \cap (S \cap S') \in \mathfrak{A}(S')$, но тогда $e' \cap (S \cap S') \in \mathfrak{A}(S)$ ввиду следствия 2.3, а значит

$$e \cap e' = (e \cap (S \cap S')) \cap (e' \cap (S \cap S')) \in \mathfrak{A}(S).$$

Второе включение следует из равенства $e \setminus e' = e \setminus (e \cap e')$. \diamond

Следствие 2.6. Пусть d -мерное многообразие M представимо в виде (5), тогда для любого множества $e \in \mathfrak{A}(M)$ имеет место разложение

$$e = \bigcup_n e_n, \quad e_n \in \mathfrak{A}(S_n), \quad e_n \cap e_k = \emptyset \text{ при } n \neq k. \quad (7)$$

Доказательство. По определению σ -алгебры $\mathfrak{A}(M)$ существует набор множеств $e'_n \in \mathfrak{A}(S_n)$, $n \in \mathbb{N}$, таких что $e = \bigcup_n e'_n$. Положив $e_1 = e'_1$, $e_2 = e'_2 \setminus e'_1$, $e_3 = (e'_3 \setminus e'_2) \setminus e'_1$ и т.д., ввиду леммы 2.5, получим требуемые множества e_n , $n \in \mathbb{N}$. \diamond

Теорема 2.7. Пусть d -мерное многообразие M представимо в виде (5), множество $e \in \mathfrak{A}(M)$ представимо в виде (7),

$$s e := \sum_n s_n e_n, \quad (8)$$

где s_n – мера Лебега на S_n . Тогда $s e$ не зависит от выбора набора множеств e_n в (7) и набора поверхностей S_n в (5), а определенная таким образом на $\mathfrak{A}(M)$ функция множеств s является полной мерой.

Доказательство. Рассмотрим другое представление многообразия: $M = \bigcup_k S'_k$ и другое представление множества e :

$$e = \bigcup_k e'_k, \quad e'_k \in \mathfrak{A}(S'_k), \quad e'_n \cap e'_k = \emptyset \text{ при } n \neq k.$$

Положим $e_{nk} = e_n \cap e'_k$. Пусть s'_n – мера Лебега на поверхности S'_n . Из очевидных равенств $e_n = \bigcup_k e_{nk}$, $e'_k = \bigcup_n e_{nk}$, принимая во внимание лемму 2.5 и счетную аддитивность мер s_n , s'_n , получим

$$s e = \sum_n s_n e_n = \sum_n \sum_k s_n e_{nk} = \sum_k \sum_n s'_k e_{nk} = \sum_k s'_k e'_k.$$

Для проверки счетной аддитивности функции множеств s рассмотрим набор попарно дизъюнктивных множеств $e'_n \in \mathfrak{A}(M)$, и пусть для e'_n представление (7) имеет вид

$$e'_n = \bigcup_k e'_{nk}, \quad e'_{nk} \in \mathfrak{A}(S_k), \quad e'_{nk} \cap e'_{nl} = \emptyset \text{ при } l \neq k,$$

тогда

$$\sum_n s e'_n = \sum_n \sum_k s_k e'_{nk} = \sum_k s_k \left(\bigcup_n e'_{nk} \right).$$

Ясно, что множества $e_k := \bigcup_n e'_{nk}$ попарно дизъюнктивны, $e_k \in \mathfrak{A}(S_k)$ и $e = \bigcup_k e_k$, откуда следует, что $\sum_k s e_k = s e$.

Свойство $s \emptyset = 0$ и полнота меры очевидны. \diamond

Имея полную меру s на многообразии M , для множества $e \in \mathfrak{A}(M)$ и функции f , заданной и измеримой на e (относительно s), мы можем рассматривать интеграл

$$\int_e f ds,$$

определенный в соответствии с общей теорией интеграла Лебега. Такие интегралы тоже будем называть *поверхностными интегралами первого рода*.

§3. Дифференциальные формы

Пусть $N \in \mathbb{N}$, $d + 1 \in \mathbb{N}$, введем множество \mathcal{I}_d векторов $i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{R}^d$, $i_k \in \{1, \dots, N\}$, $k = 1, \dots, d$. В случае $d = 0$ считаем, что \mathcal{I}_d – пустое множество.

Определение 3.1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, дифференциальной формой в \mathbb{R}^N , заданной на U , порядка d (или d -формой) назовем набор непрерывных на U функций f_i , $i \in \mathcal{I}_d$, (при $d = 0$ считаем, что этот набор состоит из единственной функции без индекса). Если все функции, определяющие d -форму, имеют на U все непрерывные частные производные порядка r , то будем говорить, что это форма класса $C^{(r)}$, $r \geq 1$.

Пока это новое понятие введено чисто формально и не несет содержательного смысла, он появится, когда для дифференциальных форм будут введены различные действия, операции и отношение равенства, которое будет иметь место не только в случае совпадения определяющих наборов функций.

В случае, когда U – измеримое подмножество некоторой поверхности или многообразия, можно расширить понятие диф-

ференциальной формы, потребовав от функций f_i их измеримость вместо непрерывности. Однако, поскольку основной результат будет связан с формами, в которых f_i — гладкие функции, мы ограничимся рассмотрением непрерывных функций.

Определим *сложение дифференциальных форм*. Суммой d -форм ω, ω' , определенных соответственно функциями $f_i, f'_i, i \in \mathcal{I}_d$, называется d -форма $\omega + \omega'$, определенная функциями $f_i + f'_i, i \in \mathcal{I}_d$. Очевидно, что сложение дифференциальных форм коммутативно и ассоциативно.

Теперь каждую дифференциальную форму можно рассматривать как сумму одночленных форм (определяемых единственной ненулевой функцией).

Для одночленной дифференциальной d -формы ω , определенной функцией f_i , будем использовать обозначение

$$\omega = f_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}.$$

Тогда произвольная d -форма ω , определенная функциями $f_i, i \in \mathcal{I}_d$, имеет вид

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}.$$

Если все f_i тождественно равны нулю на U , то будем писать $\omega = 0$. В случае $d = 0$ будем писать $\omega = f$. Далее будет понятно, почему такая форма записи удобна, но одно из удобств отметим сразу. Индекс функции i присутствует и в стоящем после нее дифференциальном выражении, поэтому при обозначении функций разными буквами его можно опускать. При малых размерностях переменные $dx_{i_1}, dx_{i_2}, \dots$ можно также обозначать разными буквами. Например, дифференциальную форму

$$f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{23} dx_2 \wedge dx_3 + f_{31} dx_3 \wedge dx_1, \quad (N = 3, d = 2)$$

переобозначив $f_{12} = P, f_{23} = Q, f_{31} = R$, можно переписать в виде

$$P dx \wedge dy + Q dy \wedge dz + R dz \wedge dx. \quad (9)$$

Далее мы не всегда будем уточнять, на каком множестве U задана дифференциальная форма, в частности, если такого уточнения нет для нескольких обсуждаемых форм, то будем считать, что они заданы на одном и том же U .

Определим *отношение равенства дифференциальных форм*. Две d -формы будем считать равными тогда и только тогда, когда у них равны друг другу одночленные компоненты с одинаковыми номерами, и постулируем следующие правила для одночленных форм:

$$f_i \equiv f'_i \Rightarrow f_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d} = f'_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}; \quad (10)$$

$$i_k = i_l, l \neq k \Rightarrow f_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d} = 0; \quad (11)$$

$$f_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx_{i_d} = \\ (-f_i) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k+1}} \wedge dx_{i_k} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}. \quad (12)$$

Правило (11) говорит, что ненулевыми одночленными дифференциальными формами могут быть лишь те, у которых все координаты номера различны. В частности, при $d > N$ не существует ненулевых дифференциальных форм. По правилу (12), перемена местами двух соседних координат номера равносильна перемене знака у функции, например,

$$P dx \wedge dy \wedge dz = -P dy \wedge dx \wedge dz = P dy \wedge dz \wedge dx.$$

Отметим, что при рассмотрении дифференциальных форм, у которых функции f_i измеримые, равенство функций f_i, f'_i в свойстве (10) следует заменить на их эквивалентность.

Определим *умножение дифференциальных форм*. Произведением одночленных d - и k -форм

$$\omega = f_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}, \quad \omega' = f'_j dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

называется $(d + k)$ -форма

$$(f_i \cdot f'_j) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_d} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} =: \omega \wedge \omega'.$$

Чтобы определить произведение произвольных дифференциальных форм постулируем две дистрибутивности:

$$\begin{aligned} \omega \wedge (\omega_1 + \omega_2) &= \omega \wedge \omega_1 + \omega \wedge \omega_2, \\ (\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega &= \omega_1 \wedge \omega + \omega_2 \wedge \omega. \end{aligned}$$

На основании этих равенств рекурсивно (по количеству слагаемых в формах) определим произведение произвольных d - и k -форм. В случае умножения 0-формы $\omega' = f$ на d -форму ω их произведение будем записывать в виде $f \cdot \omega$. В частности, если $f \equiv \text{const}$, то это действие можно воспринимать как умножение дифференциальной формы на число. Ясно, что умножение ассоциативно. Коммутативности, вообще говоря, нет, но в случае, когда один из сомножителей является 0-формой, она, очевидно, есть.

Теперь каждую одночленную d -форму можно рассматривать как произведение $(d + 1)$ -го сомножителя, один из которых – 0-форма, а остальные – 1-формы.

Определим понятие *дифференциала дифференциальной формы*. Для d -формы класса $C^{(1)}$ в \mathbb{R}^N

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d},$$

дифференциалом называется $(d + 1)$ -форма

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_d} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_d} =: d\omega.$$

В случае 0-формы $\omega = f$ мы имеем обычную формулу для дифференциала функции f .

Отметим очевидное свойство дифференциала:

$$d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'. \quad (13)$$

Лемма 3.2. Пусть ω и ω' – соответственно d - и k -формы класса $C^{(1)}$ в \mathbb{R}^N , тогда

$$d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^d \omega \wedge d\omega'.$$

Доказательство. Ясно, что достаточно проверить утверждение для одночленных форм. Пусть

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}, \quad \omega' = g dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}.$$

Положим $\beta = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}$, $\beta' = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$. Из определения дифференциала, используя (12), имеем

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \omega') &= \sum_{l=1}^N \frac{\partial(fg)}{\partial x_l} dx_l \wedge \beta \wedge \beta' = \\ &= \sum_{l=1}^N g \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l \wedge \beta \wedge \beta' + (-1)^d \sum_{l=1}^N f \frac{\partial g}{\partial x_l} \beta \wedge dx_l \wedge \beta' = \\ &= \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_l} dx_l \wedge \beta \right) \wedge (g \beta') + (-1)^d (f \beta) \wedge \left(\sum_{l=1}^N \frac{\partial g}{\partial x_l} dx_l \wedge \beta' \right) = \\ &= d\omega \wedge \omega' + (-1)^d \omega \wedge d\omega'. \diamond \end{aligned}$$

Предложение 3.3. Пусть ω – дифференциальная форма класса $C^{(2)}$, тогда

$$d^2\omega := d(d\omega) = 0.$$

Доказательство. Сначала предположим, что ω – 0-форма, $\omega = f$. Тогда, используя (11), (12), имеем

$$\begin{aligned} d^2\omega &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} dx_l \wedge dx_k = \\ &= \sum_{k < l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} dx_l \wedge dx_k - \sum_{k > l} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k} dx_k \wedge dx_l = 0. \end{aligned}$$

Теперь докажем общий случай. Ясно, что достаточно проверить утверждение для одночленных форм. Пусть $\omega = f\beta$ (используем обозначения леммы 3.2). тогда по лемме 3.2

$$d^2\omega = d(df \wedge \beta) = d^2f \wedge \beta - (df \wedge d\beta).$$

Отсюда из уже доказанного случая и очевидного равенства $d\beta = 0$ получаем $d^2\omega = 0$. \diamond

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, $V \subset \mathbb{R}^M$, Φ – вектор-функция класса $C^{(1)}$, действующая из U в V , и пусть на V задана d -форма

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_d}.$$

Положим

$$\omega_\Phi = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i \circ \Phi d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}.$$

Подставив в правую часть равенства $d\Phi_{i_k} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \Phi_{i_k}}{\partial x_j} dx_j$, и воспользовавшись дистрибутивностью умножения, после приве-

дения подобных членов (с использованием (11), (12)) мы преобразуем ее к виду

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_d} g_i dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d},$$

показав тем самым, что ω_Φ – d -форма в \mathbb{R}^N , определенная на U . Преобразование $\omega \rightarrow \omega_\Phi$ называют *заменой переменной в дифференциальной форме*. Отметим, в 0-форме $\omega = f$ замена переменной означает подстановку, т.е. $\omega_\Phi = \omega \circ \Phi$.

Теорема 3.4. Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, $V \subset \mathbb{R}^M$, Φ – вектор-функция класса $C^{(1)}$, $\Phi : U \rightarrow V$, ω и ω' – соответственно d - и k -формы в \mathbb{R}^M , заданные на V . Тогда

- (i) $(\omega \wedge \omega')_\Phi = \omega_\Phi \wedge \omega'_\Phi$,
- (ii) если $k = d$, то $(\omega + \omega')_\Phi = \omega_\Phi + \omega'_\Phi$,
- (iii) если ω класса $C^{(1)}$, а Φ класса $C^{(2)}$, то $d(\omega_\Phi) = (d\omega)_\Phi$.

Доказательство. Утверждение (ii) очевидно, а из него вместе с дистрибутивностью умножения и (13) следует, что остальные утверждения достаточно проверить для одночленных форм. Пусть

$$\omega = f dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_d}, \quad \omega' = g dy_{j_1} \wedge \dots \wedge dy_{j_k},$$

тогда

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \omega')_\Phi &= (fg) \circ \Phi d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d} \wedge d\Phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{j_k} = \\ &= (f \circ \Phi d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}) \wedge (g \circ \Phi d\Phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{j_k}) = \omega_\Phi \wedge \omega'_\Phi. \end{aligned}$$

Осталось проверить (iii). Сначала предположим, что ω – 0-форма, $\omega = f$. Тогда

$$d(\omega_\Phi) = d(f \circ \Phi) = \sum_{l=1}^N \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial x_l} dx_l =$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \circ \Phi \right) \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} dx_l &= \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \circ \Phi \right) \sum_{l=1}^N \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} dx_l = \\ &= \sum_{k=1}^M \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \circ \Phi \right) d\Phi_k = \left(\sum_{k=1}^M \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k \right)_{\Phi} = (d\omega)_{\Phi}. \end{aligned}$$

В общем случае из уже доказанного для 0-форм, леммы 3.2 и утверждения (i) следует

$$\begin{aligned} (d\omega)_{\Phi} &= (df)_{\Phi} \wedge (dy_{i_1} \wedge \dots \wedge dy_{i_d})_{\Phi} = \\ d(f \circ \Phi) \wedge (d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}) &= d(\omega_{\Phi}) - (f \circ \Phi) d(d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}). \end{aligned}$$

С другой стороны, опять используя лемму 3.2 и предложение 3.3, имеем

$$\begin{aligned} d(d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}) &= d^2\Phi_{i_1} \wedge (d\Phi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}) - \\ d\Phi_{i_1} \wedge d(d\Phi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}) &= -d\Phi_{i_1} \wedge d(d\Phi_{i_2} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_d}) = \\ \dots &= (-1)^{d-1} (d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_{d-1}}) \wedge d^2\Phi_{i_d} = 0. \diamond \end{aligned}$$

Теорема 3.5. Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$, $V \subset \mathbb{R}^M$, $W \subset \mathbb{R}^L$, Φ, Ψ – вектор-функции класса $C^{(1)}$, $\Phi : U \rightarrow V$, $\Psi : V \rightarrow W$, ω – d -форма в \mathbb{R}^L , заданная на W . Тогда

$$(\omega_{\Psi})_{\Phi} = \omega_{\Psi \circ \Phi}.$$

Доказательство. Ввиду свойства (ii) теоремы 3.4 имеют место равенства

$$\begin{aligned} ((\omega + \omega')_{\Psi})_{\Phi} &= (\omega_{\Psi} + \omega'_{\Psi})_{\Phi} = (\omega_{\Psi})_{\Phi} + (\omega'_{\Psi})_{\Phi}, \\ (\omega + \omega')_{\Psi \circ \Phi} &= \omega_{\Psi \circ \Phi} + \omega'_{\Psi \circ \Phi}, \end{aligned}$$

поэтому утверждение теоремы достаточно доказать для одночленной формы

$$\omega = f dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_d}.$$

Из свойства (i) теоремы 3.4 следует

$$\begin{aligned} ((\omega \wedge \omega')_{\Psi})_{\Phi} &= (\omega_{\Psi} \wedge \omega'_{\Psi})_{\Phi} = (\omega_{\Psi})_{\Phi} \wedge (\omega'_{\Psi})_{\Phi}, \\ (\omega \wedge \omega')_{\Psi \circ \Phi} &= \omega_{\Psi \circ \Phi} \wedge \omega'_{\Psi \circ \Phi}, \end{aligned}$$

поэтому достаточно ограничиться рассмотрением форм только с одним сомножителем, т.е. рассмотреть два случая: $\omega = 0$ -форма и $\omega = dz_j$. В первом случае

$$(\omega_{\Psi})_{\Phi} = (\omega \circ \Psi)_{\Phi} = (\omega \circ \Psi) \circ \Phi = \omega \circ \Psi \circ \Phi = \omega_{\Psi \circ \Phi}.$$

Во втором случае имеем

$$(\omega_{\Psi})_{\Phi} = (d\Psi_j)_{\Phi} = \left(\sum_{l=1}^M \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} dy_l \right)_{\Phi} = \sum_{l=1}^M \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} \circ \Phi \sum_{k=1}^N \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} dx_k.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \omega_{\Psi \circ \Phi} &= d((\Psi \circ \Phi)_j) = d(\Psi_j \circ \Phi) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial (\Psi_j \circ \Phi)}{\partial x_k} dx_k = \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\sum_{l=1}^M \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} \circ \Phi \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} \right) dx_k = \sum_{l=1}^M \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_l} \circ \Phi \sum_{k=1}^N \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} dx_k. \diamond \end{aligned}$$

Следствие 3.6. Если d -форма ω в \mathbb{R}^N определена на k -мерной поверхности S , и $k < d$, то $\omega = 0$.

Доказательство. Пусть поверхность S задана вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, $E \subset \mathbb{R}^k$. По теореме 3.5

$$\omega = \omega_{\varphi \circ \varphi^{-1}} = (\omega_{\varphi})_{\varphi^{-1}}.$$

Отсюда, поскольку $\omega_{\varphi} - d$ -форма в \mathbb{R}^k , а при $k < d$ в \mathbb{R}^k не существует ненулевых форм, получаем требуемое утверждение. \diamond

§4. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть вектор-функции $\varphi : E \rightarrow S$, $\tilde{\varphi} : \tilde{E} \rightarrow S$ задают поверхность S . Тогда отображение $\Phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$, действующее из \tilde{E} в E , – диффеоморфизм (см. теорему 1.5), и значит $\det \Phi' \neq 0$. Будем говорить, что отображения φ и $\tilde{\varphi}$ *эквивалентны*, если $\det \Phi' > 0$. Зафиксируем какую-нибудь вектор-функцию, задающую поверхность, и рассмотрим класс всех эквивалентных ей вектор-функций. Нетрудно видеть, что все вектор-функции из этого класса эквивалентны друг другу, и все вектор-функции, не попавшие в этот класс тоже эквивалентны друг другу. Таким образом, множество всех вектор-функций φ , задающих поверхность S , можно разбить на два класса смежности.

Определение 4.1. *Класс всех эквивалентных друг другу вектор-функций $\varphi : E \rightarrow S$, задающих поверхность S , называется ориентацией поверхности. Упорядоченную пару, состоящую из поверхности и ее ориентации, назовем ориентированной поверхностью.*

Понятие ориентированности можно распространить и на подмножества ориентированной поверхности S , так как любое множество $e \subset S$, можно задать любой вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, задающей S . Поэтому автоматически такое множество мы будем считать ориентированным, понимая под этим упорядоченную пару, состоящую из множества и ориентации поверхности. Будем также говорить, что ориентация множества $e \subset S$ индуцирована ориентацией поверхности S . Если e, e' – ориентированные подмножества поверхности S , то они могут иметь одинаковую ориентацию или различные (проти-

воположные) ориентации в зависимости от того, индуцированы их ориентации одной ориентацией S или разными.

Определение 4.2. Пусть S – d -мерная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^N , заданная вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, $e \in \mathfrak{A}(S)$ – множество, ориентация которого индуцирована ориентацией поверхности S . Интегралом по e от дифференциальной формы, заданной на e ,

$$\omega = \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_d}$$

(или поверхностным интегралом второго рода) называется число

$$\int_{\varphi^{-1}(e)} \sum_{i \in \mathcal{I}_d} f_i \circ \varphi \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} d\mu =: \int_e \omega. \quad (14)$$

Теорема 4.3. Поверхностный интеграл второго рода не зависит от способа задания ориентированной поверхности.

Доказательство. Ясно, что утверждение теоремы достаточно проверить для одночленных дифференциальных форм. Пусть вектор-функции $\varphi : E \rightarrow S$, $\tilde{\varphi} : \tilde{E} \rightarrow S$ задают ориентированную поверхность S . Тогда отображение $\Phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$, действует из \tilde{E} в E , и $\det \Phi' > 0$. Заменяя переменную в интеграле, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(e)} f_i \circ \varphi \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} d\mu = \\ \int_{(\Phi^{-1} \circ \varphi^{-1})(e)} f_i \circ \varphi \circ \Phi \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \circ \Phi \det \Phi' d\mu. \end{aligned}$$

Учитывая равенства $\Phi := \varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi}$ и

$$\frac{\partial(\tilde{\varphi}_{i_1}, \dots, \tilde{\varphi}_{i_d})}{\partial(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_d)} = \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \circ \Phi \cdot \Phi',$$

преобразуем правую часть к виду

$$\int_{\tilde{\varphi}^{-1}(e)} f_i \circ \tilde{\varphi} \det \frac{\partial(\tilde{\varphi}_{i_1}, \dots, \tilde{\varphi}_{i_d})}{\partial(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_d)} d\mu.$$

◇

Теорема 4.4. *Интегралы от равных дифференциальных форм равны.*

Доказательство. Ясно, что достаточно рассмотреть только одночленные формы, и что интегралы от одночленных форм, определяемых равными функциями с одним и тем же индексом, равны. Покажем, что интегралы будут равными и от форм, равных друг другу в соответствии с правилами (11), (12). Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = f dt_{i_1} \wedge dt_{i_2} \wedge \dots \wedge dt_{i_d},$$

у которой $i_k = i_j$, $k \neq j$. Тогда в матрице Якоби

$$\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)}$$

две одинаковых строки, следовательно ее определитель равен нулю, а значит и интеграл (14). Пусть теперь дифференциальная форма ω' получена из формы ω перестановкой dt_{i_k} с $dt_{i_{k+1}}$, тогда по (12) $\omega = -\omega'$. Матрица Якоби для ω' получается из матрицы Якоби для ω перестановкой двух соседних строк,

поэтому определители этих матриц, а следовательно и соответствующие интегралы (14) будут отличаться друг от друга только знаком, что и означает равенство интегралов от форм ω , $-\omega'$. \diamond

Пример 1. Пусть $d = 1$, $N = 2$, $\varphi : E \rightarrow S$, $\varphi : \begin{cases} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}$, функции P , Q заданы и непрерывны на S (т.е. функции двух переменных x, y), $(\alpha, \beta) \subset E$, $e = \varphi(\alpha, \beta)$, $\omega = P dx + Q dy$. Тогда

$$\int_e \omega = \int_\alpha^\beta (P(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_1'(t) + Q(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_2'(t)) dt.$$

Будем обозначать через I_d тождественный оператор в \mathbb{R}^d .

Теорема 4.5. Пусть S — d -мерная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^N , заданная вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, E — d -мерная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^d , заданная вектор-функцией $I_d : E \rightarrow E$, $e \in \mathfrak{A}(S)$, ω — d -форма в \mathbb{R}^N , определенная на e . Тогда

$$\int_e \omega = \int_{\varphi^{-1}(e)} \omega_\varphi,$$

где ориентации множеств e и $\varphi^{-1}(e)$ индуцированы соответственно ориентированными поверхностями S и E .

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать утверждение теоремы для одночленных форм. Пусть

$$\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_d},$$

тогда

$$\omega_\varphi = f \circ \varphi d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_d} = f \circ \varphi \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_k} dt_k \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi_{i_d}}{\partial t_k} dt_k \right).$$

В правой части стоит d -форма в \mathbb{R}^d , используя дистрибутивность, преобразуем ее к виду

$$f \circ \varphi \sum_{k \in \mathcal{I}_d} \frac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_{k_1}} \dots \frac{\partial \varphi_{i_d}}{\partial t_{k_d}} dt_{k_1} \wedge \dots \wedge dt_{k_d}.$$

В соответствии с правилом (11) ненулевыми слагаемыми в этой сумме могут быть лишь те, у которых все k_l , $l = 1, \dots, d$, различны, т.е. суммирование идет по всевозможным перестановкам упорядоченного множества $\{1, \dots, d\}$. Из (12) следует, что

$$dt_{k_1} \wedge \dots \wedge dt_{k_d} = (-1)^\sigma dt_1 \wedge \dots \wedge dt_d,$$

где σ – число инверсий в перестановке (k_1, \dots, k_d) . Отсюда ясно, что

$$\omega_\varphi = f \circ \varphi \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)},$$

и следовательно

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(e)} \omega_\varphi &= \int_{(I_d^{-1} \circ \varphi^{-1})(e)} f \circ \varphi \circ I_d \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} \circ I_d d\mu = \\ &= \int_{\varphi^{-1}(e)} f \circ \varphi \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_d})}{\partial(t_1, \dots, t_d)} d\mu = \int_e \omega. \diamond \end{aligned}$$

Теперь несложно получить формулу замены переменной в поверхностном интеграле второго рода.

Следствие 4.6. Пусть S – d -мерная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^N , $e \in \mathfrak{A}(S)$, T – d -мерная ориентированная поверхность в \mathbb{R}^M , диффеоморфизм Φ отображает S на T , ω – d -форма в \mathbb{R}^M , заданная на $\Phi(e)$. Тогда $\Phi(e) \in \mathfrak{A}(T)$ и

$$\int_{\Phi(e)} \omega = \pm \int_e \omega_{\Phi}. \quad (15)$$

Доказательство. Пусть S и T соответственно заданы вектор-функциями $\varphi : E \rightarrow S$ и $\psi : F \rightarrow T$. Тогда, ввиду теоремы 1.2, φ и ψ – диффеоморфизмы, а значит и отображение $\psi^{-1} \circ \Phi \circ \varphi : E \rightarrow F$ является диффеоморфизмом в \mathbb{R}^d . Поскольку ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждой из них, $\text{rang}(\Phi \circ \varphi)' = d$. Таким образом, вектор-функция $\Phi \circ \varphi : E \rightarrow T$ задает поверхность T (возможно с ориентацией, противоположной исходной). Отсюда следует, что $\Phi(e) \in \mathfrak{A}(T)$, и, используя теоремы 4.5, 3.5, имеем

$$\int_e \omega_{\Phi} = \int_{\varphi^{-1}(e)} (\omega_{\Phi})_{\varphi} = \int_{\varphi^{-1}(e)} \omega_{\Phi \circ \varphi} = \int_{((\Phi \circ \varphi)^{-1} \circ \Phi)(e)} \omega_{\Phi \circ \varphi} = \int_{\Phi(e)} \omega,$$

где ориентации множеств e и $\Phi(e)$ индуцированы соответствующими заданиями поверхностей $\varphi : E \rightarrow S$ и $\Phi \circ \varphi : E \rightarrow T$, которые могут отличаться от исходных ориентаций поверхностей S и T . \diamond

Замечание 4.7. Если в условиях следствия 4.6 ориентации множеств e и Φe индуцированы отображениями $\varphi : E \rightarrow S$ и $\Phi \circ \varphi : E \rightarrow T$, то в формуле (15) будет знак плюс.

§5. Формула Стокса

Стандартным симплексом в \mathbb{R}^d называется множество

$$\Delta_0 = \Delta_0^d := \{x \in \mathbb{R}^d : x_k > 0, k = 1, \dots, d, x_1 + \dots + x_d < 1\}.$$

Вектор $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ и единичные орты $\mathbf{e}_k, k = 1, \dots, d$, пространства \mathbb{R}^d назовем *вершинами* стандартного симплекса. Множества

$$\begin{aligned} \gamma_0 &:= \{x \in \mathbb{R}^d : x_k > 0, k = 1, \dots, d, x_1 + \dots + x_d = 1\}, \\ \gamma_l &:= \{x \in \mathbb{R}^d : x_l = 0, x_k > 0, k = 1, \dots, l-1, l+1, \dots, d, \\ &\quad x_1 + \dots + x_d < 1\}, \quad l = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

назовем *гранями стандартного* симплекса. Будем говорить, что вершина \mathbf{e}_1 противоположна грани $\gamma_l, l = 1, \dots, d$, а остальные вершины прилегают к ней. Грани γ_0 противоположна вершина $\mathbf{0}$, а остальные вершины прилегают к ней.

Рассмотрим вектор-функцию φ , действующую из \mathbb{R}^d в $\mathbb{R}^N, d \leq N$, определенную равенством $\varphi(t) = a + A \cdot t, t \in \mathbb{R}^d$, где $a \in \mathbb{R}^N, A$ – матрица размера $N \times d, \text{rang } A = d$. Множество $\Delta := \varphi(\Delta_0^d)$ назовем *d-мерным симплексом* в \mathbb{R}^N . Образы вершин и граней стандартного симплекса при отображении φ соответственно назовем *вершинами* и *гранями симплекса* Δ .

Предложение 5.1. *Грани d-мерного симплекса являются (d – 1)-мерными симплексами.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение для стандартного симплекса. Пусть $\mathbf{e}_l, l = 1, \dots, d$, и $\tilde{\mathbf{e}}_l, l = 1, \dots, d-1$, – единичные орты соответственно в пространствах \mathbb{R}^d и \mathbb{R}^{d-1} .

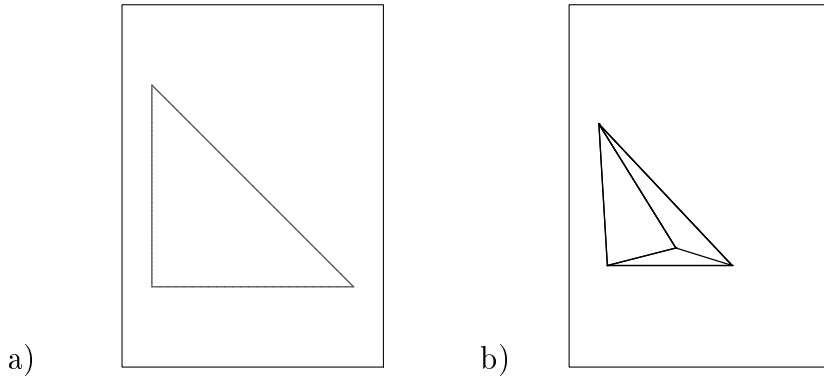


Рис. 1. а) симплекс Δ_0^2 ; б) симплекс Δ_0^3 .

Положим $\varphi_{k,d}^*(t) = \varphi_k^*(t) = A_k \cdot t$, $t \in \mathbb{R}^{d-1}$, $k = 1, \dots, d$, где

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица размера $d \times (d - 1)$, у которой в k -й строке стоят все нули, а после вычеркивания k -й строки остается единичная матрица. Нетрудно видеть, что $\varphi_k^*(\tilde{\mathbf{e}}_l) = \mathbf{e}_l$, $l = 1, \dots, k - 1$, и $\varphi_k^*(\tilde{\mathbf{e}}_l) = \mathbf{e}_{l+1}$, $l = k, \dots, d - 1$, из чего в силу базисности системы $\{\tilde{\mathbf{e}}_l\}_{l=1}^{d-1}$ легко следует равенство $\gamma_k = \varphi_k^*(\Delta_0^{d-1})$. Для $k = 0$ положим $\varphi_{0,d}^*(t) = \varphi_0^*(t) = \mathbf{e}_1 + A_0 \cdot t$, $t \in \mathbb{R}^{d-1}$, где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

– матрица размера $d \times (d - 1)$, у которой все элементы первой строки равны -1 , а под первой строкой стоит единичная матрица. Нетрудно видеть, что $\varphi_0^*(\tilde{\mathbf{e}}_l) = \mathbf{e}_{l+1}$, $l = 1, \dots, d - 1$, и $\varphi_0^*(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_1$, из чего следует $\gamma_0 = \varphi_0^*(\Delta_0^{d-1})$.

Теперь рассмотрим произвольный симплекс, заданный вектор-функцией φ , $\varphi(x) = a + A \cdot x$, $\text{rang } A = d$. По определению его грани – это множества $\Gamma_k = \varphi(\gamma_k)$. Ясно, что Γ_k задается отображением $\varphi \circ \varphi_k^* : \Delta_0^{d-1} \rightarrow \Gamma_k$. Осталось проверить, что $\text{rang}(\varphi \circ \varphi_k^*)' = \text{rang}(A \cdot A_k) = d - 1$. Для $k = 1, \dots, d$ это следует из того, что умножение справа на A_k уничтожает k -й столбец. Обозначим через u_1, \dots, u_d столбцы матрицы A . Нетрудно видеть, что столбцами матрицы $A \cdot A_0$ являются векторы $u_2 - u_1, \dots, u_d - u_1$. Принимая во внимание, что ранг матрицы со столбцами $u_1, u_2 - u_1, \dots, u_d - u_1$ равен d , устанавливаем, что $\text{rang}(A \cdot A_0) = d - 1$. \diamond

Поскольку стандартный симплекс – открытое связное множество в \mathbb{R}^d , его можно рассматривать как ориентированную d -мерную поверхность в \mathbb{R}^d , заданную тождественным отображением $I_d : \Delta_0^d \rightarrow \Delta_0^d$. Ориентацию стандартного симплекса, определенную таким заданием, назовем *стандартной*. Произвольный d -мерный симплекс в \mathbb{R}^N тоже можно рассматривать как ориентированную поверхность, один из способов ее задания осуществляется отображением φ , посредством которого определялся симплекс. В частности, о гранях симплекса можно говорить как об ориентированных поверхностях. Назовем ориентацию грани γ_k стандартного симплекса *согласованной* со стандартной ориентацией Δ_0^d , если она определена отображением φ_k^* (из предложения 5.1) при четном k , и не определена этим отображением при нечетном k . Ориентацию произвольного симплекса Δ назовем *согласованной* с ориентацией его

границы Γ , если существует отображение $\varphi : \Delta_0^d \rightarrow \Delta$, задающее ориентацию Δ , такое что $\Gamma = \varphi(\gamma_k)$ и ориентация Γ определяется вектор-функцией $\varphi \circ \varphi_k^* : \Delta_0^{d-1} \rightarrow \Gamma$ при четном k , и не определена этим отображением при нечетном k . Последнее определение требует проверки корректности, так как согласование ориентации стандартного симплекса и его грани можно теперь понимать как в смысле определения согласованности для стандартного симплекса, так и для произвольного.

Предложение 5.2. Пусть φ – аффинное преобразование, взаимно однозначно отображающее Δ_0^d на Δ_0^d , $\varphi(\gamma_n) = \gamma_k$. Тогда

$$\text{sign det } \varphi' = (-1)^{n+k} \text{sign det } (\varphi_k^{*-1} \circ \varphi \circ \varphi_n^*)'. \quad (16)$$

Доказательство. а) Сначала предположим, что $k, n \neq 0$, $\varphi(x) = a + A \cdot x$. Из равенства $\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_k$ следует, что при $j \neq n$ либо $\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_l$, $l \neq k$, либо $\varphi(\mathbf{e}_j) = \mathbf{0}$. Значит $(\varphi(\mathbf{e}_n))_k = 1$, $(\varphi(\mathbf{e}_j))_k = \mathbf{0}$ для всех $j \neq n$. Поэтому в k -й строке матрицы $A = \varphi'$ стоит \mathbf{e}_n^T . Умножение матрицы справа на $(\varphi_n^*)' = A_n$ (используем обозначения предложения 5.1) уничтожает n -ый столбец. Поскольку $(\varphi_k^*)^{-1}(\mathbf{e}_j) = \tilde{\mathbf{e}}_j$ для $j = 1, \dots, k-1$, $(\varphi_k^*)^{-1}(\mathbf{e}_j) = \tilde{\mathbf{e}}_{j-1}$ для $j = k+1, \dots, d$, ясно, что $(\varphi_k^{*-1})' = A_k^T$. Умножение матрицы слева на A_k^T уничтожает k -ую строку. Таким образом, матрица $B = (\varphi_k^{*-1})' \cdot \varphi' \cdot (\varphi_n^*)' = (\varphi_k^{*-1} \circ \varphi \circ \varphi_n^*)'$ получается из A вычеркиванием k -й строки и n -го столбца, на пересечении которых стоит 1. Раскладывая определитель матрицы A по k -ой строке, получаем $\text{det } A = (-1)^{n+k} \text{det } B$.

б) Пусть теперь $k = 0$, $n \neq \mathbf{0}$. В этом случае $\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$. Если $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{e}_r$, то $\varphi(x) = \mathbf{e}_r + A \cdot x$, в n -ом столбце матрицы A стоит вектор $-\mathbf{e}_r$, а в других столбцах – векторы $\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_r$.

Положим $\psi(x) = \mathbf{e}_1 + A' \cdot x$, где A' – матрица, полученная из A перестановкой 1-ой и r -ой строк. Нетрудно видеть, что умножение матрицы слева на $(\varphi_0^{*-1})'$ уничтожает первую строку, а все элементы первой строки матрицы A' равны -1 , и, повторив рассуждения пункта а), получим

$$\det \psi' = (-1)(-1)^{n+1} \det(\varphi_0^{*-1} \circ \psi \circ \varphi_n^*)'. \quad (17)$$

Поскольку из равенств $\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$, $\psi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$ следует, что $(\psi^{-1} \circ \varphi)(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n$, по уже доказанному в пункте а) имеем

$$\begin{aligned} \det(\psi^{-1} \circ \varphi)' &= \det(\varphi_n^{*-1} \circ (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi_n^*)' = \\ &= \det((\psi \circ \varphi_n^*)^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi_n^*))'. \end{aligned}$$

Таким образом эквивалентность функций φ и ψ равносильна эквивалентности функций $\varphi \circ \varphi_n^*$ и $\psi \circ \varphi_n^*$, что вместе с (17) влечет (16).

с) Пусть $k = n = 0$, в этом случае $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\varphi(\mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_{j_l}$, $l = 1, \dots, d$, т.е. столбцы матрицы φ' образуют некоторую перестановку векторов \mathbf{e}_l , $j = 1, \dots, d$. Обозначим через σ число инверсий в перестановке (j_2, \dots, j_d) , тогда

$$\det \varphi' = (-1)^{\sigma+j_1-1}. \quad (18)$$

Столбцами матрицы $\varphi' \cdot (\varphi_n^*)'$ являются векторы $\mathbf{e}_{j_2} - \mathbf{e}_{j_1}, \dots, \mathbf{e}_{j_d} - \mathbf{e}_{j_1}$. Поскольку умножение матрицы слева на $(\varphi_0^{*-1})'$ уничтожает первую строку, матрица $B := (\varphi_0^{*-1})' \varphi' \cdot (\varphi_n^*)'$ имеет вид

$$(\tilde{\mathbf{e}}_{j_2} - \tilde{\mathbf{e}}_{j_1}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{j_d} - \tilde{\mathbf{e}}_{j_1}),$$

где $\tilde{\mathbf{e}}_k - (d-1)$ -мерный вектор, полученный из \mathbf{e}_k вычеркиванием первой координаты. Если $j_1 = 1$, то $B = (\tilde{\mathbf{e}}_{j_2}, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_{j_d})$, и значит

$$\det B = (-1)^\sigma = (-1)^{\sigma+j_1-1}. \quad (19)$$

Пусть $j_1 \neq 1$, $j_l = 1$. Переставив l -ый столбец в B на первое место, получим матрицу B' . В первом столбце матрицы B' единственный ненулевой элемент в строке с номером $j_1 - 1$, который равен -1 , поэтому разложив определитель матрицы B' по первому столбцу и приняв во внимание, что число инверсий в перестановке (j_1, j_2, \dots, j_d) равно $\sigma - l$, получим

$$\det B' = (-1)^{j_1} (-1)^{\sigma-l} (-1) \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

$\det B = (-1)^l \det B' = (-1)^{\sigma+j_1-1}$, что вместе с (18) и (19) влечет (16).

d) Наконец рассмотрим случай $n = 0$, $k \neq \mathbf{0}$. Отображение φ^{-1} удовлетворяет условиям пункта b), поэтому

$$\begin{aligned} \text{sign det } \varphi' &= \text{sign} (\det(\varphi^{-1})') = \\ &= (-1)^k \text{sign} (\det(\varphi_0^{*-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi_k^*))' = \\ &= (-1)^k \text{sign det}(\varphi_k^{*-1} \circ \varphi \circ \varphi_0^*)'. \diamond \end{aligned}$$

Следствие 5.3. Пусть ориентированный симплекс Δ в \mathbb{R}^N задан аффинным отображением $\varphi : \Delta_0^d \rightarrow \Delta$, Γ – его грань, $\gamma_n = \varphi^{-1}(\Gamma)$. Для того, чтобы ориентации Γ и Δ были согласованы, необходимо и достаточно, чтобы ориентация Γ задавалась вектор-функцией $\varphi \circ \varphi_n^* : \Delta_0^{d-1} \rightarrow \Gamma$ при четном n и не задавалась при нечетном.

Доказательство. Достаточность следует из определения согласованности. Пусть ориентации Γ и Δ согласованы, тогда существует аффинное отображение $\psi : \Delta_0^d \rightarrow \Delta$, задающее ориентацию Δ и такое, что ориентация Γ задается вектор-функцией $\psi \circ \varphi_k^* : \Delta_0^{d-1} \rightarrow \Gamma$, если k четно, и не задается

ей, если k нечетно. Поскольку φ и ψ задают одну и ту же ориентированную поверхность, $\det(\psi^{-1} \circ \varphi)' > 0$, и по предложению 5.2

$$\begin{aligned} & \text{sign det}((\psi \circ \varphi_k^*)^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi_n^*))' = \\ & \text{sign det}(\varphi_k^{*-1} \circ (\psi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi_n^*)' = \\ & (-1)^{n+k} \text{sign det}(\psi^{-1} \circ \varphi)' = (-1)^{n+k}. \end{aligned}$$

Пусть k и n – четные. Тогда вектор-функция $\psi \circ \varphi_k^*$ задает Γ и эквивалентна вектор-функции $\varphi \circ \varphi_n^*$, а значит $\varphi \circ \varphi_n^*$ задает Γ . Аналогично, перебирая варианты по четности n и k , убеждаемся в справедливости необходимости. \diamond

Пусть ориентированный симплекс Δ в \mathbb{R}^N задан аффинным отображением $\varphi : \Delta_0^d \rightarrow \Delta$, Γ – его грань с согласованной ориентацией, заданной вектор-функцией $\varphi \circ \varphi^* : \Delta_0^{d-1} \rightarrow \Gamma$, ψ – аффинное отображение из \mathbb{R}^N в \mathbb{R}^M , $\tilde{\Delta} = \psi(\Delta)$, $\tilde{\Gamma} = \psi(\Gamma)$, тогда ψ индуцирует ориентации симплекса $\tilde{\Delta}$ и его грани $\tilde{\Gamma}$, заданные вектор-функциями $\psi \circ \varphi : \Delta_0^d \rightarrow \tilde{\Delta}$, $\psi \circ \varphi \circ \varphi^* : \Delta_0^{d-1} \rightarrow \tilde{\Gamma}$. Пусть $\gamma_k = \varphi^{-1}(\Gamma)$. Ввиду согласованности ориентации симплекса Δ и его грани Γ , по следствию 5.3, отображение φ^* эквивалентно φ_k^* при четном k и не эквивалентно при нечетном. Но по тому же следствию 5.3 отсюда следует, что ориентации $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\Gamma}$ согласованы. Таким образом, аффинное отображение *сохраняет согласованность ориентаций симплекса и его гранией*.

Предложение 5.4. Пусть $\Delta, \tilde{\Delta}$ – d -мерные симплексы в \mathbb{R}^d с одинаковой ориентацией, Γ – их общая грань, вершины симплексов, противоположащие грани Γ , лежат по разные стороны от плоскости этой грани. Тогда ориентация Γ , согласованная с ориентацией Δ , противоположна ориентации Γ , согласованной с ориентацией $\tilde{\Delta}$.

Доказательство. Предположим противное: ориентации грани Γ согласованные с ориентациями симплексов Δ , $\tilde{\Delta}$ совпадают. Выберем декартовы координаты в \mathbb{R}^d так, чтобы начало координат было на плоскости грани Γ , а орт \mathbf{e}_d был ей перпендикулярен. Пусть a_0, a_1, \dots, a_d – вершины симплекса Δ , занумерованные так, что a_0, a_1, \dots, a_{d-1} прилегают к Γ . Симплекс $\tilde{\Delta}$ имеет вершины $a_0, \dots, a_{d-1}, \tilde{a}_d$. Пусть A и \tilde{A} – матрицы, со столбцами соответственно $a_1 - a_0, \dots, a_{d-1} - a_0, a_d - a_0$ и $a_1 - a_0, \dots, a_{d-1} - a_0, \tilde{a}_d - a_0$ (занумерованными в том же порядке). Положим $\varphi(x) = a_0 + A \cdot x$, $\tilde{\varphi}(x) = a_0 + \tilde{A} \cdot x$. Поскольку $\varphi(\mathbf{e}_j) = a_j$, $\varphi(\mathbf{0}) = a_0$, вектор-функция $\varphi(x)$ задает Δ , аналогично вектор-функция $\tilde{\varphi}(x)$ задает $\tilde{\Delta}$. Покажем, что отображения $\varphi \circ \varphi_d^*$, $\tilde{\varphi} \circ \varphi_d^*$ задают грань Γ . Действительно, пусть $\tilde{\mathbf{e}}_l$, $l = 1, \dots, d-1$, – единичные орты пространства \mathbb{R}^{d-1} , тогда $\varphi_d^*(\tilde{\mathbf{e}}_j) = \mathbf{e}_j$, а значит $(\varphi \circ \varphi_d^*)(\tilde{\mathbf{e}}_j) = a_j$, $(\tilde{\varphi} \circ \varphi_d^*)(\tilde{\mathbf{e}}_j) = a_j$, $1, \dots, d-1$, $(\varphi \circ \varphi_d^*)(\mathbf{0}) = a_0$, $(\tilde{\varphi} \circ \varphi_d^*)(\mathbf{0}) = a_0$. Более того, мы установили, что $\varphi \circ \varphi_d^* = \tilde{\varphi} \circ \varphi_d^*$.

В выбранной системе координат последняя строка матрицы φ' имеет вид $(0, \dots, 0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$. Поскольку матрицы $(\varphi^{-1})'$ и φ' взаимно обратны, последняя строка матрицы $(\varphi^{-1})'$ ортогональна векторам $a_1 - a_0, \dots, a_{d-1} - a_0$, которые образуют базис координатной плоскости $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$, и значит она имеет вид $(0, \dots, 0, \alpha^{-1})$. Отсюда с учетом того факта, что матрицы φ' и $\tilde{\varphi}'$ отличаются лишь последним столбцом, ясно что матрица $(\varphi^{-1} \circ \tilde{\varphi})' = (\varphi^{-1})' \cdot \tilde{\varphi}'$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{\alpha}/\alpha \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\alpha}$ – последняя координата вектора \tilde{a}_d , знак которой от-

личается от знака α , так как вершины a_d и \tilde{a}_d лежат по разные стороны от координатной плоскости $x_d = 0$. Определитель этой матрицы отрицателен, из чего следует, что отображения φ и $\tilde{\varphi}$ не эквивалентны, но тогда и отображения $\varphi \circ \varphi_d^*$, $\tilde{\varphi} \circ \varphi_d^*$ не эквивалентны, что противоречит их равенству. \diamond

Ориентированная d -мерная поверхность Δ в \mathbb{R}^N , заданная вектор-функцией $\varphi : \Delta_0^d \rightarrow \Delta$, называется d -мерным *поверхностным симплексом* в \mathbb{R}^N . В частности, любой симплекс является поверхностным симплексом. Если вектор-функция φ , задающая d -мерный поверхностный симплекс Δ в \mathbb{R}^N , определена и непрерывна на $\overline{\Delta_0^d}$ (замыкании множества Δ_0^d), и для некоторого $k = 0, \dots, d$ вектор-функция $\varphi \circ \varphi_k^* : \Delta_0^{d-1} \rightarrow \Gamma$ задает $(d-1)$ -мерную поверхность Γ в \mathbb{R}^N , то эту поверхность назовем *гранью поверхностного симплекса Δ* . Заданные таким образом ориентации симплекса Δ и его грани Γ назовем *согласованными* в случае четного k и *несогласованными* в случае нечетного k . Если образом каждой грани γ_k стандартного симплекса Δ_0^d , является m -мерная поверхность, $m < d$, причем в случае $m = d - 1$ эта поверхность является гранью поверхностного симплекса, то такой симплекс будем называть *подходящим*. Объединение всех граней подходящего поверхностного симплекса назовем его границей и будем ее обозначать $\partial\Delta$.

Пример 1. Пусть $\varphi : \Delta_0^2 \rightarrow \Delta$, $\varphi : \begin{cases} x = 1 + u - v^3 \\ y = 2 + v + u^3 \end{cases}$. Нетрудно проверить, что образы всех трех ребер Δ_0^2 являются одномерными поверхностями, т.е. поверхностный симплекс Δ имеет три ребра.

Пример 2. Пусть $\varphi : \Delta_0^2 \rightarrow \Delta$, $\varphi : \begin{cases} x = \rho \cos \pi\theta \\ y = \rho \sin \pi\theta \end{cases}$. Нетрудно проверить, что образы ребер γ_0, γ_1 являются одномерными по-

верхностями, а ребро γ_2 вектор-функция φ переводит в точку, т.е. в 0-мерную поверхность. Таким образом, Δ – подходящий симплекс, но он имеет только два ребра (см. рис. 2).

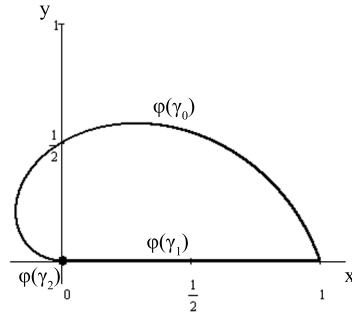


Рис. 2. Δ – область, ограниченная осью x и кривой внутри единичного круга.

Пусть $\tau \in (0, 1)$, $x \in \Delta_0^{d-1}$ положим

$$\Psi_\tau^d(x) = \tau \mathbf{e}_d + (1 - \tau) A_d \cdot x,$$

где, как и ранее,

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

– матрица размерности $d \times (d - 1)$. Ясно, что $\Psi_\tau^d(\Delta_0^{d-1})$ – сечение симплекса Δ_0^d плоскостью, параллельной координатной плоскости $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$, поднятой на высоту τ . В соответствии с обозначениями теоремы Фубини, проекцию этого сечения, ортогональной вектору \mathbf{e}_d , на $(d-1)$ -мерное пространство, совпадающее с координатной плоскостью $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$, будем обозначать через $E(\tau)$.

Нетрудно видеть, что при $k \neq d$ отображения $\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*$ и $\varphi_{k,d}^* \circ \Psi_\tau^{d-1}$, заданные на \mathbb{R}^{d-2} , совпадают, в частности,

$$(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2}) = (\varphi_{k,d}^* \circ \Psi_\tau^{d-1})(\Delta_0^{d-2}), \quad (20)$$

и это множество является сечением грани γ_k плоскостью, параллельной координатной плоскости $\{x \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$, поднятой на высоту τ .

Лемма 5.5. Пусть γ_k – грань симплекса Δ_0^d с ориентацией, согласованной со стандартной ориентацией Δ_0^d , $k \neq d$, на γ_k определена $(d-1)$ -форма $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{d-2}} \wedge dx_d$ в \mathbb{R}^d . Тогда

$$\int_{\gamma_k} \omega = (-1)^k \int_0^1 d\tau \int_{(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2})} \tilde{\omega},$$

где $\tilde{\omega} = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{d-2}}$.

Доказательство. Зафиксируем $k \neq d$ и переобозначим грань γ_k и задающее ее (с точностью до четности k) отображения $\varphi_{k,d}^*$ соответственно через γ и φ . Поскольку γ задается вектор-функцией φ и при четном k и не задается при нечетном,

$$\int_{\gamma} \omega = (-1)^k \int_{\varphi^{-1}(\gamma)} f \circ \varphi \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \dots, t_{d-1})} d\mu_{d-1}.$$

Отсюда, применяя теорему Фубини и учитывая, что якобиан отображения φ' постоянен, имеем

$$\int_{\gamma} \omega = (-1)^k \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \dots, t_{d-1})} \int_{\Delta_0^{d-1}} f \circ \varphi d\mu_{d-1} =$$

$$(-1)^k \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \dots, t_{d-1})} \int_0^1 dt_{d-1} \int_{\Delta_0^{d-1}(t_{d-1})} f \circ \varphi d\mu_{d-2}.$$

Используя равенство

$$\Delta_0^{d-1}(\tau) = \{t \in \mathbb{R}^{d-2} : (t_1, \dots, t_{d-2}, \tau) \in \Delta_0^{d-1}\} = (1 - \tau)\Delta_0^{d-2}$$

и заменяя переменную во внутреннем интеграле, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 dt_{d-1} \int_{\Delta_0^{d-1}(t_{d-1})} f \circ \varphi d\mu_{d-2} &= \int_0^1 dt_{d-1} \int_{(1-t_{d-1})\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi d\mu_{d-2} = \\ &= \int_0^1 (1 - \tau)^{d-2} d\tau \int_{\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi \circ \Psi_\tau^{d-1} d\mu_{d-2}. \end{aligned}$$

С другой стороны, принимая во внимание (20), имеем

$$\begin{aligned} \int_{(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2})} \tilde{\omega} &= \int_{(\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})(\Delta_0^{d-2})} \tilde{\omega} = \\ \int_{\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi \circ \Psi_\tau^{d-1} \det \frac{\partial((\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_1}, \dots, (\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_{d-2}})}{\partial(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{d-2})} d\mu_{d-2} &= \\ \det \frac{\partial((\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_1}, \dots, (\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_{d-2}})}{\partial(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{d-2})} \int_{\Delta_0^{d-2}} f \circ \varphi \circ \Psi_\tau^{d-1} d\mu_{d-2}. \end{aligned}$$

Осталось заметить, что

$$\det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d-2}}, \varphi_d)}{\partial(t_1, \dots, t_{d-1})} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d-2}})}{\partial(t_1, \dots, t_{d-2})},$$

поскольку в последней строке определителя в левой части все элементы кроме последнего равны нулю, а последний элемент равен единице, и

$$\det \frac{\partial((\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_1}, \dots, (\varphi \circ \Psi_\tau^{d-1})_{i_{d-2}})}{\partial(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_{d-2})} = \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d-2}})}{\partial(t_1, \dots, t_{d-1})} \cdot (\Psi_\tau^{d-1})' = (1 - \tau)^{d-2} \det \frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_{d-2}})}{\partial(t_1, \dots, t_{d-2})}. \diamond$$

Лемма 5.6. Пусть Δ_0^d – стандартный симплекс со стандартной ориентацией, которая согласована с ориентацией его граней, ω – $(d - 1)$ -форма в \mathbb{R}^d класса $C^{(1)}$, заданная на $\overline{\Delta_0^d}$. Тогда

$$\int_{\Delta_0^d} d\omega = \int_{\partial\Delta_0^d} \omega.$$

Доказательство. В первую очередь заметим, что достаточно доказать для одночленных форм, причем, не умаляя общности, можно считать, что $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{d-2}} \wedge dx_d$, $i_k \neq d$, $k = 1, \dots, d - 2$.

Проведем индукцию по d . База для $d = 1$ следует из равенства

$$\int_0^1 df = f(1) - f(0).$$

Проведем индукционный переход $d - 1 \rightarrow d$. Поскольку среди индексов i_1, \dots, i_{d-2}, d отсутствует единственное $k \in \{1, \dots, d\}$, в форме $d\omega$ ненулевым слагаемым будут лишь те, которое содержит dx_k , т.е. форма $d\omega$ является одночленной и может быть

приведена к виду $d\omega = F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$. Применяя теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_0^d} d\omega &= \int_{I_d^{-1}(\Delta_0^d)} F \circ I_d \det I'_d d\mu_d = \int_{\Delta_0^d} F d\mu_d = \int_0^1 dx_d \int_{\Delta_0^d(x_d)} F d\mu_{d-1} = \\ &= \int_0^1 d\tau (1-\tau)^{d-1} \int_{\Delta_0^{d-1}} F \circ \Psi_\tau^d d\mu_{d-1} = \int_0^1 d\tau \int_{\Delta_0^{d-1}} (\widetilde{d\omega})_{\Psi_\tau^d}, \end{aligned}$$

где операция " \sim " отбрасывает последний дифференциал в дифференциальной форме, т.е. $\widetilde{d\omega} = F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{d-1}$. Отсюда, используя индукционное предположение, лемму 5.5, теоремы 4.5, 3.4 и очевидные равенства $\widetilde{d\omega} = d\tilde{\omega} - \frac{\partial f}{\partial x_d} dx_d \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{d-2}}$, $d(\Psi_\tau^d)_d = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_0^d} d\omega &\stackrel{\text{теор. 4.5}}{=} \int_0^1 d\tau \int_{\Delta_0^{d-1}} (\widetilde{d\omega})_{\Psi_\tau^d} \stackrel{\text{теор. 3.4}}{=} \int_0^1 d\tau \int_{\Delta_0^{d-1}} d(\tilde{\omega}_{\Psi_\tau^d}) \stackrel{\text{инд. пр.}}{=} \\ &= \int_0^1 d\tau \int_{\partial\Delta_0^{d-1}} \tilde{\omega}_{\Psi_\tau^d} = \int_0^1 d\tau \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \int_{\varphi_{k,d-1}^*(\Delta_0^{d-2})} \tilde{\omega}_{\Psi_\tau^d} \stackrel{\text{теор. 4.5}}{=} \\ &= \sum_{k=0}^{d-1} (-1)^k \int_0^1 d\tau \int_{(\Psi_\tau^d \circ \varphi_{k,d-1}^*)(\Delta_0^{d-2})} \tilde{\omega} \stackrel{\text{лем. 5.5}}{=} \sum_{k=0}^{d-1} \int_{\gamma_k} \omega. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы осталось заметить, что $\int \omega = 0$, поскольку последняя координата вектор-функции φ_d^* — тождественный нуль, и значит в матрице

$$\frac{\partial((\varphi_d^*)_{i_1}, \dots, (\varphi_d^*)_{i_{d-2}}, (\varphi_d^*)_d)}{\partial(t_1, \dots, t_{d-1})}$$

последняя строка состоит из всех нулей. \diamond

Теорема 5.7. (Стокс²) Пусть Δ – подходящий d -мерный поверхностный симплекс в \mathbb{R}^N , ориентация которого согласована с ориентацией всех его граней, ω – $(d-1)$ -форма в \mathbb{R}^N класса $C^{(1)}$, определенная на $\overline{\Delta}$. Тогда

$$\int_{\Delta} d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega$$

Доказательство. Пусть симплекс Δ задан вектор-функцией $\varphi : \Delta_0^d \rightarrow \Delta$. Используя теоремы 4.5, 3.4 и лемму 5.6, имеем.

$$\int_{\Delta} d\omega = \int_{\varphi(\Delta_0^d)} d\omega = \int_{\Delta_0^d} (d\omega)_{\varphi} = \int_{\Delta_0^d} d\omega_{\varphi} = \int_{\partial\Delta_0^d} \omega_{\varphi}.$$

Множество $\partial\Delta_0^d$ состоит из граней стандартного симплекса Δ_0^d . Если для некоторой грани γ_k ее образ $\varphi(\gamma_k)$ является m -мерной поверхностью, $m < d-1$, то по следствию 3.6

$$\int_{\gamma_k} \omega_{\varphi} = 0.$$

Если $\varphi(\gamma_k)$ является $(d-1)$ -мерной поверхностью (т.е. $\varphi(\gamma_k)$ – грань поверхностного симплекса Δ), то по теореме 4.5

$$\int_{\gamma_k} \omega_{\varphi} = \int_{\varphi(\gamma_k)} \omega.$$

²Джорж Габриэль Стокс (1819-1903) – английский математик.

Просуммировав эти равенства по всем $k = 0, \dots, d$, получим

$$\int_{\partial\Delta_0^d} \omega_\varphi = \int_{\partial\Delta} \omega. \diamond$$

Теорему Стокса легко распространить на существенно более широкий класс множеств. *Простой d -мерной областью* в \mathbb{R}^N назовем объединение конечного числа попарно дизъюнктивных подходящих ориентированных d -мерных поверхностных симплексов в \mathbb{R}^N , таких что каждая грань каждого симплекса либо не пересекается ни с какой другой гранью, либо совпадает ровно с одной гранью, причем ориентация общей грани двух поверхностных симплексов, согласованная с ориентацией одного симплекса, противоположна ее ориентации, согласованной с ориентацией другого. Объединение всех граней, не пересекающихся ни с какой другой гранью, назовем границей простой области Ω и будем ее обозначать $\partial\Omega$. Если грань некоторого поверхностного симплекса имеет ориентацию, согласованную с ориентацией симплекса, и принадлежит границе простой d -мерной области Ω , будем говорить, что ориентация этой грани согласована с ориентацией Ω .

Теорема 5.8. (*Стокс*) Пусть Ω – простая d -мерная область в \mathbb{R}^N , ориентация которой согласована с ориентацией ее границы, ω – $(d-1)$ -форма в \mathbb{R}^N класса $C^{(1)}$, заданная на $\bar{\Omega}$. Тогда

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega. \quad (21)$$

Утверждение теоремы следует из теорем 5.7 и 4.3. \diamond

Любой d -мерный многогранник в \mathbb{R}^d , снабженный ориентацией, порожденной тождественным отображением, является (с точностью до множества меры ноль) простой d -мерной областью Ω в \mathbb{R}^d , а его граница при должном выборе ориентации граней совпадает (с точностью до множества меры ноль) с $\partial\Omega$. Действительно, любой многогранник можно триангулировать, т.е. представить его в виде объединения замкнутых d -мерных симплексов (т.е. замыканий d -мерных симплексов), таких что их внутренности не пересекаются, каждая грань каждого симплекса либо не пересекается ни с какой другой гранью, либо совпадает ровно с одной гранью. Снабдим каждую грань каждого симплекса ориентацией, согласованной с ориентацией симплекса (порожденной тождественным отображением). По предложению 5.4 совпадающие грани будут иметь противоположные ориентации.

Ясно, что если S – d -мерная поверхность в \mathbb{R}^N , заданная вектор-функцией $\varphi : E \rightarrow S$, Ω – простая d -мерная область в \mathbb{R}^d , содержащаяся в E вместе со своей границей, то множества $\varphi(\Omega)$ и $\varphi(\partial\Omega)$ с ориентациями, индуцированными отображением φ , являются соответственно простой d -мерной областью в \mathbb{R}^N и ее границей. Число граней у Ω и $\varphi(\Omega)$ будет одинаковым. В частности, в качестве Ω можно взять любой многогранник, снабженный вместе со своими гранями ориентацией, по описанной выше схеме.

Однако понятие простой области охватывает не только описанные ситуации.

Пример 3. Пусть $\Delta_1 = \{(\theta, \rho) : 0 < \theta < 2\pi, \frac{\theta}{2\pi} < \rho < 1\}$, $\Delta_2 = \{(\theta, \rho) : 0 < \theta < 2\pi, 0 < \rho < \frac{\theta}{2\pi}\}$. Множества Δ_1, Δ_2 – двумерные симплексы, поэтому существуют определяющие их аффинные отображения $\varphi_1 : \Delta_0^2 \rightarrow \Delta_1$, $\varphi_2 : \Delta_0^2 \rightarrow \Delta_2$,

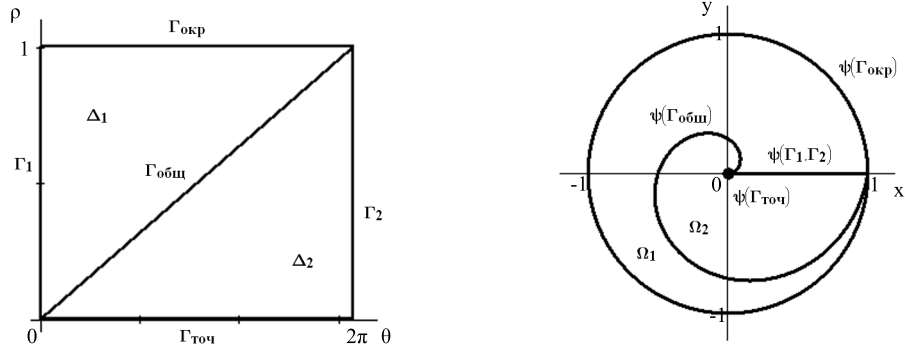


Рис. 3. Единичный круг, разбитый на поверхностные симплексы Ω_1, Ω_2 .

такие что Δ_1, Δ_2 имеют одинаковую ориентацию (как части одной и той же двумерной поверхности, например, плоскости (θ, ρ)). Положим $\psi : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$. Нетрудно видеть, что вектор-функции $\psi \circ \varphi_1 : \Delta_0^2 \longrightarrow \Omega_1$, $\psi \circ \varphi_2 : \Delta_0^2 \longrightarrow \Omega_2$ задают дизъюнктивные поверхностные симплексы Ω_1, Ω_2 , объединение которых совпадает с единичным кругом (с точностью до множества меры ноль), причем Ω_1 имеет три грани, а Ω_2 – только две, так как ребро $\{(\theta, \rho) : 0 < \theta < 2\pi, \rho = 0\}$ симплекса Δ_2 отображается вектор-функцией ψ в точку (см рис. 3). По предложению 5.4 общее ребро $\{(\theta, \rho) : 0 < \theta < 2\pi, \frac{\theta}{2\pi} = \rho\}$ симплексов Δ_1, Δ_2 имеет противоположные ориентации, а значит и соответствующее общее ребро поверхностных симплексов Ω_1, Ω_2 имеет противоположные ориентации. Ввиду 2π -периодичности ψ по аргументу θ образы ребер $\Gamma_1 = \{(\theta, \rho) : \theta = 0, 0 < \rho < 1\}$, $\Gamma_2 = \{(\theta, \rho) : \theta = 2\pi, 0 < \rho < 1\}$ совпадут как множества. Покажем, они будут иметь противоположные ориентации. Рассмотрим симплекс $\tilde{\Delta}_2$, заданный вектор-функцией $\tilde{\varphi}_2 : \Delta_0^2 \longrightarrow \tilde{\Delta}_2$, где $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 + 2\pi\mathbf{e}_1$, а ориентацию его ребра Γ_2 определим вектор-функцией $\tilde{\varphi}_2^* :=$

$\varphi_2^* + 2\pi\mathbf{e}_1$, где φ^* – отображение, задающее ребро Γ_1 симплекса Δ_2 . Поскольку $(\varphi_2)' = (\tilde{\varphi}_2)'$, $(\varphi^*)' = (\tilde{\varphi}^*)'$, ориентация $\tilde{\Delta}_2$ совпадет с ориентацией Δ_1, Δ_2 и согласована с ориентацией ребра Γ_2 . По предложению 5.4 общее ребро Γ_2 симплексов $\Delta_1, \tilde{\Delta}_2$ имеет противоположные ориентации а значит и их образы при отображении ψ имеют противоположные ориентации, но $\psi \circ \varphi^* = \psi \circ \tilde{\varphi}^*$ ввиду 2π -периодичности вектор-функции ψ по θ . Таким образом, ориентированные поверхностные симплексы Ω_1, Ω_2 составляют простую двумерную область с единственным ребром $\psi(\{(\theta, \rho) : 0 < \theta < 2\pi, \rho = 1\})$, совпадающим (с точностью до множества меры ноль) с единичной окружностью.

Рассмотрим три частных случая теоремы Стокса.

1. Пусть $N = 2$, $d = 2$, $\omega = f dx + g dy$. Тогда

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

и формула (21) примет вид

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy = \int_{\partial\Omega} f dx + g dy.$$

Это равенство называют формулой Грина³.

2. Пусть $N = 3$, $d = 3$, $\omega = P dx \wedge dy + Q dy \wedge dz + R dz \wedge dx$. Тогда

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx = \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

³Джорж Грин (1793-1841) – английский математик.

и формула (21) примет вид

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial\Omega} P dx \wedge dy + Q dy \wedge dz + R dz \wedge dx.$$

Это равенство называют формулой Остроградского⁴-Гаусса.

3. Пусть $N = 3$, $d = 2$, $\omega = P dx + Q dy + R dz$. Тогда

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx,$$

и формула (21) примет вид

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx = \int_{\partial\Omega} P dx + Q dy + R dz.$$

Это равенство называют формулой Стокса.

⁴Михаил Васильевич Остроградский (1801-1862) – русский математик.